Conteúdo

Parte I

Física Clássica

Capítulo 1

Fundamentos da Física

Grandezas físicas. Caracterização do mundo físico. O que se mede.

Caracterizar o mundo físico significa dizer de modo explícito e detalhado aquilo que observamos, aquilo que vemos e que desejamos reproduzir outras vezes. Este é um problema complexo na ausência da caracterização matemática, o que foi a origem da maior parte dos erros dos antigos ao tentar descrever a natureza. Foi deste modo que a descrição matemática se tornou a base de todo o sucesso da física moderna.

Podemos caracterizar o mundo físico por uma descrição simples do que vemos, e é como os antigos gregos o faziam. Podemos dizer que o céu é azul, a montanha é alta, os pássaros voam. Podemos dizer que jogamos uma pedra e ela cai, que a água escorre pelo leito do rio. Quanto à causa da queda, poderíamos dizer que uma pedra cai porque seu lugar natural é no centro da Terra, ou no centro do mundo. Assim era a descrição da física por Aristóteles[1]. Podemos, enfim, dizer que empurramos um móvel e que ele se move, às vezes de modo fácil, ou com pouca força, às vezes de modo difícil, parecendo até que o móvel está preso no chão. Esta é uma caracterização que dizemos holística, do mundo natural.

A definição de holismo segundo o Michaelis é: *Compreensão da realidade em totalidades integradas onde cada elemento de um campo considerado reflete e contém todas as dimensões do campo, conforme a indicação de um holograma, evidenciando que a parte está no todo, assim como o todo está na parte, numa inter-relação constante, dinâmica e paradoxal.*

Holismo significa portanto a compreensão como um todo. Veremos mais adiante que a grande revolução da ciência moderna se baseia em caracterizarmos as partes de um fenômeno para se compreender o significado delas, para depois se compreender como as partes se relacionam com o todo, como formam o todo. Apesar de toda crítica que se pode fazer em relação a tal procedimento, foi assim que a ciência moderna evoluiu. Veremos, um pouco mais adiante, como os antigos viam a ciência.

A caracterização mais precisa do mundo físico se dá pela medida que podemos ter daquilo que observamos. Certas afirmações sobre o céu, assunto com que iniciamos, são de fato muito complexas, e só foram compreendidas depois do eletromagnetismo de Maxwell. Primeiramente, compreendeu-se o que é básico na física do céu. Depois, o papel do eletromagnetismo, e a luz como fenômeno eletromagnético, as cores como definidas pela freqüência da luz, e finalmente a cor do céu como resultado da interação da luz com a matéria, portanto um caminho extremamente longo e complexo.

A altura da montanha é mais simples. Ela é simplesmente uma medida de distância, da base ao topo. Mas não é tão simples assim. Afinal, medir distâncias pode ser simplesmente contar quantos passos se pode dar de um ponto a outro. Poderíamos dizer que caminhamos para o topo e contamos o número de passos. No entanto, queremos a altura da montanha como se retirássemos a montanha de seu lugar, fossemos até o ponto onde estaria o pico, estendêssemos uma linha até o chão e medíssemos o comprimento total da linha, do ponto onde estaria o cume até o chão. Deste modo, até mesmo para fazer uma medida simples, precisamos de um procedimento. Para medir a altura da montanha, utilizamos a geometria. A geometria utilizada foi estudada por Euclides mais de dois mil anos atrás[2].

Aqui temos uma primeira medida física de grande importância, qual seja, a medida de distância. Medir distâncias significa comparar tamanhos, sendo que um deles é utilizado como o padrão de comprimento. Isto é conhecido desde a antiguidade. Os problemas mais simples diziam respeito a medidas de terrenos. Quer-se saber se um terreno é grande ou pequeno para que se possa utilizá-lo de modo eficiente. Para isto, dado o formato do terreno, queremos uma medida de sua área. Esta é uma outra grandeza física bem definida matematicamente, e os antigos gregos e egípcios sabiam fazer esta medida.

Sabemos como calcular a área de um quadrado, o produto de dois de seus lados. A área de um triângulo também sabemos determinar: a metade de um lado multiplicado pela distância do vértice oposto aquele mesmo lado. Então percebe-se que se pode dividir uma área que possui uma forma tão complexa quanto se queira, em uma soma de triângulos. Então é só somar as áreas de todos os triângulos que compõem a área original e temos o resultado desejado.

Daí a medirmos volumes arbitrários não será muito difícil. Basta lembrar que o volume em uma pirâmide tetraédrica de base com área B e altura h, é obtido multiplicando a área da sua base pela sua altura e dividindo por três. Subdividindo um volume qualquer em pirâmides pequenas, podemos calcular o volume original.

Este é o princípio do cálculo integral, que só seria descoberto, de modo formal, por Leibnitz e por Newton, no século XVII. No entanto, rudimentos do procedimento podem ser utilizados já nos problemas acima. Ainda mais, os problemas acima exemplificam como podemos resolver um problema complexo dividindo-o em partes mais simples.

Discutir: tamanho de terrenos, distâncias lineares, volumes. Exemplos.

Medida da altura de uma montanha. A medida da altura de um objeto de dimensões muito grandes, como uma montanha, ou um edifício, é um exemplo de medida indireta muito simples, que de outro modo, seria muito difícil de se efetuar de modo direto. Suponhamos que temos um edifício muito alto. Ao invés de medirmos a sua altura h diretamente, podemos usar geometria. Uma medida direta seria estender uma corda ao lado de uma das paredes verticais deste edifício. A corda deveria ser muito grande, ou por vezes não podemos entrar no edifício. Então fazemos toda medida permanecendo externamente a ele. Primeiramente medimos a distância de um ponto de observação até o prédio em questão, digamos que obtemos um valor x. Depois, medimos, a partir deste ponto, o ângulo entre uma linha horizontal imaginária e outra que liga o ponto de observação ao ponto mais alto deste edifício. Digamos que θ é o ângulo entre essas duas retas. A trigonometria nos dá que $\mathrm{tg}\theta = h/x$. Sabendo-se x, que medimos diretamente, e θ, que também medimos com um teodolito,[1] saberemos a altura h. Assim, para o edificio Itália, se nos colocarmos a 30 metros de distância, e medirmos o ângulo, vamos verificar que ele mede cerca de 78,8^o, ou 78 graus e 48 minutos, e olhando em uma tabela (ou calculadora) veremos que a tangente deste ângulo é igual a

[1] O teodolito é um instrumento óptico de medida utilizado na topografia, na geodésia e na agrimensura para realizar medidas de ângulos verticais e horizontais, usado em redes de triangulação. Ver wikipedia.

5.03. Assim,$h = 151$m. É claro que teremos outras dificuldades, dependendo do que queremos medir. Por exemplo, podemos medir a altura do prédio Martinelli, um dos primeiros edifícios altos da cidade de São Paulo. Sabemos que ele mede 130m. No entanto, localizado em um declive, devemos tomar cuidado nas medidas, para que não estejamos abaixo do nível inferior (térreo) do edifício. Um pouco mais de geometria pode ser necessário.

1.0.1 Medida de Eratóstenes do tamanho da Terra. Distâncias Terra-Lua e Terra-Sol feitas por Aristarco.

Aristóteles já falava, quatro séculos antes de Cristo, sobre medidas do raio da Terra. Eratóstenes, (aprox. 284 - 192 A.C.), o bibliotecário de Alexandria, foi o primeiro a estimar o raio da Terra com precisão, por volta do terceiro século antes de Cristo. Este foi o primeiro passo para uma visão quantitativa do Universo, pois passamos a ter uma idéia da dimensão do nosso mundo. Este cálculo é simples. Ele observou a sombra de um *gnomon*[2] em Alexandria, em um certo dia em que o Sol estava a pino em Siena (hoje conhecida como Aswan), uma outra cidade egípcia, a uma distância de cerca de 5000 estádios. Os raios de luz que chegam do Sol nessas duas cidades são quase paralelos (veja a Fig.1.1). Quando a luz do Sol incide verticalmente em Siena (os objetos deixam de ter sombra), em Alexandria os raios solares fazem um ângulo α com a vara do *gnomon*. Observe que este ângulo α também é a abertura angular das duas cidades medidas a partir do centro da Terra. O ângulo α medido foi de $\frac{1}{50}$ do círculo máximo,de 360^o, ou seja, $7\frac{1}{5}$, o que levou Eratóstenes a estimar a circunferência da Terra em 250 000 estádios. Como a circunferência da Terra é igual a $2\pi R_T$, sendo R_T o raio da Terra, Eratós-

[2]Uma vara vertical usada como relógio solar.

Figura 1.1: Figura em que temos os dois feixes de luz que chegam as cidades de Alexandrina e Siena e o ângulo α medido por Eratóstenes.

tenes obteve uma estimativa para o raio da Terra através da medida deste ângulo. Vejamos a importância de termos padrões de medidas reconhecidos mundialmente: hoje não sabemos ao certo o valor do estádio, mas estima-se que $1\text{estádio} = 160m$ e que o valor obtido por Eratóstenes para o raio da Terra esteja apenas 5% abaixo do valor exato. Ataualmente sabemos que o raio da Terra varia de 6.378 km no Equador a 6.356 km nos polos[3]. Como os valores acima, usados por Eratóstenes, são estimativas já devidamente arredondadas, podemos dizer que o valor obtido foi excelente.

As observações de Aristarco de Samos são as mais interessantes. Aristarco é também conhecido por ter sido quem propôs o sistema heliocêntrico bem antes de Copérnico. Aristarco fez medidas muito apreciáveis. Para medir a distância relativa até o Sol e até a Lua, ele observou a Lua quando ela estava exatamente com aparência de meia Lua. Esta observação, sem instrumentos, é, na prática, extremamente difícil. Medindo o ângulo entre a direção da Lua e a do Sol, ele pode estimar tais distâncias relativas.

Pelas observações de Aristarco, o ângulo é de 87^o, quando o correto é de $89^o\ 51'$. O valor relativo entre a distância Terra-Sol e a distância Terra-Lua obtida por Aristarco foi de 19, enquanto o valor correto é de 400. Embora haja um erro de um fator de 20, consideramos que para uma observação sem qualquer instrumento, a olho nu, o resultado desta estimativa, para a época, é plenamente satisfatório.

Aristarco usou duas outras observações mais simples. A primeira é que durante um eclipse solar, a Lua cobre exatamente o Sol. Em outras palavras, mesmo sem observar um eclipse solar, verificamos que o ângulo subentendido pelo Sol ou pela Lua é o mesmo, qual seja, $0{,}5^o$. Assim, a relação entre o diâmetro do Sol e o da Lua é dado pela relação entre suas distâncias até nós, ou seja, 19 para Aristarco, e 400 para nós. Falta-nos ainda um dado para completar o quebra-cabeça. Este dado suplementar é fornecido pelo eclipse lunar, quando se verifica, conforme feito por Aristarco, que o diâmetro da Lua corresponde à metade do tamanho do cone de sombra (veja Fig. **??**). Assim, Aristarco tinha as relações

$$\frac{x}{2d} = \frac{x + 20R}{19d} = \frac{x + R}{D} \,,$$

enquanto nós teríamos

$$\frac{x}{2d} = \frac{x + 401R}{400d} = \frac{x + R}{D} \,.$$

Aristarco resolveu as equações, com $x = 40R/17$, obtendo $d = 0{,}35D$ e, portanto, $R_{sol} = 6{,}6R_T$. Se fizermos o cálculo sem o erro original devido à medida imprecisa de ângulo, obtemos $x = 2R$, $D = 3d$, e $R_{\text{sol}} = 130R_T$. Para comparação com valores observados hoje, temos $D = 3,67d$ e $R_{sol} = 109R_T$, de modo que a idéia foi brilhante. Note-se ainda que, para o diâmetro da Lua, obtemos, aproximadamente, $1/3$ do diâmetro da Terra, que corresponde à realidade. Se usarmos o fato, já bem conhecido, que o tamanho aparente da Lua corresponde a um ângulo de $\frac{1}{2}$, obtemos a distância Terra-Lua,

$$\sin \frac{1}{2}^o = \sin \frac{\pi}{360} \simeq \frac{\pi}{360} = \frac{\frac{2}{3}R_T}{D_{TL}}$$

Portanto,

$$D_{TL} \simeq 75R_T \,,$$

ou seja, a distância Terra-Lua corresponde, aproximadamente, a 75 vezes o raio da Terra. Os valores atuais são

$$
\begin{aligned}
R_T &\simeq 6378\,\text{km} \\
R_L &\simeq 1740\,\text{km} \\
D_{TL} &\simeq 3{,}84 \times 10^5\,\text{km} \;\simeq\; 60 R_T \,.
\end{aligned}
$$

Note que, para a época, os valores são excelentes, se levarmos em conta que não havia qualquer sofisticação além de medidas de ângulos e distâncias, e conhecimento de geometria.

1.1 Aristóteles.

Aristóteles foi uma mente prodigiosa. Nasceu em Estagira, a leste da atual Thessalônica, em 384 Antes de Cristo, vindo a falecer em 322. Escreveu sobre quase todos os aspectos do conhecimento. Sua lógica permanece válida hoje. Foi uma das pessoas mais influentes da história da civilização. Sua filosofia foi o marco fundamental da igreja católica durante mais de um milênio.

No campo da física, todavia, seus escritos acabaram por retardar, em certa medida, o desenvolvimento ulterior da ciência. A conceituação grega do mundo era baseada, conforme já vimos, em um ideário holista. A princípio isto não é mau ou errado, mas a tentativa de se compreender o mundo de forma total é extremamente difícil, e em algum ponto torna impossível o desenvolvimento de idéias. De alguma forma devemos compreender os fenômenos em suas partes, para melhor compreender o todo. O método aristotélico iniciava-se pela observação do particular, naquilo que ele considerava a essência das coisas. Daí tirava conclusões. Mas o particular, para Aristóteles, continha toda a complexidade de sistema como um todo. Então temos complicadores neste ponto de vista. Vejamos como, em detalhe.

Aristóteles e sua escola tentavam, por exemplo, compreender o movimento. Olhavam para o movimento real, como uma carroça em movimento. Se olharmos o movimento de uma carroça, veremos que há um enorme número de variáveis envolvidas. Pior ainda uma carroça antiga. Havia atrito em toda parte: as rodas atritam com a carroça por um lado, e com o chão de outro. O cavalo pisa em falso em um terreno difícil, perdendo energia com a terra em que pisa devido à irregularidade do terreno, ou até devido à possível presença de lama no chão. O arreio não é firme, ou puxa para um dos lados. Assim, um dos lados se move mais que outro, muitas vezes rodopia um pouco, às vezes escorrega em um barranco. A impressão é que não há como haver movimento sem que se faça um grande esforço. De fato, esta foi a conclusão de Aristóteles: para haver movimento deve haver alguma ação. Outra conclusão similar é que os corpos devem ter posições ditas naturais, onde eles devem naturalmente existir.

Tal linha de pensamento leva a muitas conseqüências erroôneas. Este é um dos perigos que se corre quando não se tem a experimentação como guia do desenvolvimento científico: uma linha de pensamento, uma vez errônea, leva a conclusões cada vez mais distantes daquilo que é correto. O erro está em se tomar um sistema tão complexo como algo que possa ser descrito em termos de leis simples. A comparação com a realidade se faz de modo apenas quantitativo, não permitindo aquilatar de modo preciso onde está o erro ou o acerto de uma conclusão. De fato, a corroça necessita de uma força para iniciar o movimento, mas a causa é simples, estando contida em todo atrito de um sistema tão complexo (no sentido de ser cheio de detalhes) e fortemente rudimentar, já que as peças que compõem o sistema não o fazem para simplificar o movimento e, de algum modo ajudá-lo, mas acaba atrapalhando-o.

Apesar das críticas freqüentes a Aristóteles encontradas em livros de física, devemos contextualizá-las para uma melhor compreensão. Como dito acima, Aristóteles foi um dos homens mais influentes da história humana. Foi um dos maiores pensadores. Física, no entanto, é algo muito difícil, e sua total compreensão necessitou de uma evolução histórica milenar, apenas podendo alçar vôo após a descoberta do método científico. Na época de Aristóteles o pensamento humano apenas se iniciava em sua vertente lógica, e o conhecimento enquanto informação ainda era irrisório. Em vista disto, as noções de física eram ainda ingênuas. As maiores contribuições da época se deram na matemática, principalmente dentro do contexto de geometria, a geometria euclidiana. A lógica aristotélica é válida, hoje e sempre. Conheceram-se também os céus e seus movimentos inerentes. Não foi pouco. Este conjunto de conhecimentos, passados depois aos árabes, compilados durante séculos de evolução no oriente próximo deram a base necessária para a posterior evolução através da revolução de Copérnico, das observações de Tycho Brahe, das Leis de Kepler, do método científico de Descartes, da física de Galileu e das Leis de Newton, além de outras contribuições importantes. Foi uma longa história.

1.2 Os céus

Olhar para os céus sempre foi uma grande fonte de inspiração. A busca da compreensão do cosmos motivou gerações de pesquisadores em todas as áreas do conhecimento. O ser humano, tornado consciente, passa a viver o mito do herói e a planejar a compreensão de si mesmo e de seu mundo exterior, principalmente através da ciência, almejando poder descrever a criação do mundo, suas leis e conseqüências. É assim que a preocupação humana, desde os antigos, tomou forma em objetos longínquos, primeiramente no macrocosmo. Não havia, na época, como se preocupar com o microcosmo por falta da técnica adequada. Foi somente ao final do século XVIII que este caminho em direção ao micro começou a ser trilhado e posteriormente pavimentado.

Eram duas as vertentes da ciência dos céus na antigüidade. Por um lado, os místicos, os astrólogos e os sacerdotes se preocupavam com questões de princípios, com os deuses, com a orígem, formando o imaginário mitológico e religioso. Por outro lado, havia preocupações quotidianas com as medidas de tempo. Afinal, o homem depende muito, principalmente no início da civilização, do ciclo anual que rege as colheitas, do verão e do inverno. A medida do tempo também era parte do cotidiano, assim como o é hoje, já que todos nós temos um relógio à disposição para nos localizarmos nesta tão transcendente direção que é a temporal. As medidas de tempo, assim como as observações astrológicas, levaram a uma astronomia, enquanto as preocupações místicas e mitológicas foram o princípio de uma cosmologia.

O olhar para os céus motivou teorias. É difícil saber como é formado o cosmo, em vista de sua distância. No entanto a maravilha de um céu estrelado leva a profundas cogitações, principalmente em vista de seus complexos movimentos, cuja compreensão não apenas leva a conclusões a respeito do que seja o universo, mas também permite uma medida prática do passar do tempo, com previsão do clima, das colheitas, e, portanto, importante para a vida civilizada. Veremos mais a respeito destes complexos problemas quando encararmos o tempo.

1.2.1 Medidas de tempo.

Na verdade, apenas conseguimos medir, diretamente, tempo e espaço. Daí, derivam outros conceitos, mais abstratos. Suponhamos que nossos objetos estejam em movimento. O que é movimento?

Em primeiro lugar, simplifiquemos os nossos conceitos. Ao invés de falarmos de corpo, falemos de um ponto. Um corpo pode ser descrito como um conjunto de pontos no espaço. Se o corpo for rígido, as distâncias relativas, no interior do corpo, são sempre as mesmas. Se não o for, haverá dificuldades adicionais, como por exemplo se estudarmos líquidos, ou pastas.

Com a medida de distância, podemos inferir a posição de um ponto no espaço. Esta afirmação é uma das essências da descrição cinemática de um corpo, e virá a ser de fundamental importância na descrição dinâmica. A cinemática é o estudo do movimento per si, sem que nos preocupemos com sua causa. Corresponde à descrição do movimento.

1.3 O conceito de tempo ...

Desde que o Homem se percebeu como inteligência, ele olhou para os Céus e perguntou-se sobre a origem de todas as coisas, inclusive de si mesmo. Viu-se também compelido a olhar para os Céus como modo de previsão de fenômenos.

Os Céus nos dão razões de sobra para que o examinemos. Há uma vertente prática no quotidiano do Homem, qual seja, a da marcação do tempo, previsão das colheitas, antecipação meteorológica. O ciclo de verões e de invernos era de vital importância para o Homem antigo e uma eventual perda de tal antecipação pode levar à morte de uma sociedade pela fome.

Há, no entanto, uma segunda vertente, independente e aparentemente longínqua da primeira, mas, ainda assim, indissociável dela, posto que será o outro lado da inquirição científica. Refere-se esta à Mitologia e à pergunta sobre a origem do Universo e do Homem. Esta vertente mística seria a origem da pergunta científica sobre a origem do Cosmos, sobre a compreensão do início do Mundo e fazia parte, na época, da Religiosidade e da Mitologia. Os Mitos de Criação falam do tempo de uma forma bastante direta e têm uma imagem direta nas diversas interpretações de tempo da Física. Assim, Caos e Noite geraram Érebo (escuridão). Depois vieram Éter (luz) e Hemera (dia). Hemera e Eros criaram Pontus (Mar) e Gaia (Terra) que gerou o Céu (Urano). Esta é a fase análoga ao tempo caótico, sem início ou fim, sem interpretação direta. Gaia e Urano geraram os doze Titãs, entre eles Cronos e Rhea, três ciclopes e três gigantes. Farta do apetite sexual de Urano, Gaia pediu ajuda aos filhos. Cronos decidiu-se a ajudá-la. Esperou Urano com uma foice, com a qual o castrou, jogando os testículos ao mar, de onde nasce Afrodite. Do sangue, nasceram as Erínias, entidades que se encarregam das vinganças. Urano amaldiçoou o filho, vaticinando que os filhos de Cronos o trairiam. Cronos casou-se com Rhea. Comia seus filhos por temor de que eles cumprissem a maldição de Cronos. Cronos personifica o tempo, aquele que cria para posteriormente destruir. Representará o tempo da Relatividade Geral, assim como o tempo das religiões monoteístas, com um início, com uma criação a partir de algo desconhecido, caótico. De seus filhos, Rhea salvou Zeus dando a Cronos uma pedra embrulhada como se fora o novo filho. Cronos comeu a pedra pensando ser a criança. Zeus foi criado às escondidas, no Monte Ida, em Creta. Zeus retorna, exila Cronos e os Titãs no Tártaro, casa-se com Hera. Zeus gerou filhos e filhas, deuses e mortais, abrindo a época dos deuses Olímpicos. É a era do tempo clássico, o tempo sem início ou fim, como o tempo de Newton, absoluto. As Religiões monoteístas tiveram, também, suas sugestões quanto à criação do Universo e do Homem, espelhadas, por exemplo, na arte renascentista. Esta visão de tempo, advinda dos gregos, é bastante ilustrativa e muito característica do pensamento filosófico grego, onde o psíquico e o científico se juntam de modo profundo. O tempo é, de fato, simultaneamente, substância psicológica intrínseca ao homem, que pensa dentro do tempo, e algo científico, aparentemente independente do observador humano, presente em qualquer experiência física realista.

Será interessante observarmos, ao final, que, depois de uma separação entre o tempo psicológico, desprezado pela ciência por séculos, e o tempo físico, realista, presente objetivamente, chegaremos a uma situação onde a própria existência objetiva do tempo fica colocada em questão. Vejamos como isto ocorre.

A metafísica do tempo já foi estudada em profundidade por grandes mentes. Entre os Pitagóricos, e para Platão, há uma imagem divina para a origem do tempo. Nesta medida, teria havido a criação do tempo em moldes parecidos com a idéia bíblica. Conforme o dito pitagórico, ...Ele resolveu ter uma imagem móvel da realidade, então colocou ordem nos céus, fez desta uma imagem eterna mas não móvel, de acordo com os números, enquanto a eternidade restava em sua unidade, é a esta imagem que damos o nome de tempo. Para Aristóteles, tempo é movimento que admite enumeração.

Em uma interessantíssima série de diálogos públicos na década de 80 entre o físico David Bohm e o pensador indiano Jiddu Krishnamurti, a questão do tempo foi discutida de modo bastante particular, qual seja, no que tange ao tempo psicológico. Na opinião do pensador, o Homem deve, de alguma forma, deixar o tempo para sair de seus conflitos e ter um novo começo. Algumas correntes psicológicas falam de um inconsciente irracional fora do tempo, atemporal. As duas opiniões, de origens diferentes, parecem convergir no que diz respeito ao tempo psicológico que poderia correr de modo diferente para cada ser diferente. Perguntaríamos então se o tempo poderia ser algo tão sutil, abstrato, a ponto de fugir de nossa interpretação e de ser diverso daquele tempo clássico, medido por um relógio independente do observador.

Dividamos nossa discussão em partes, analisando em primeiro lugar como a Ciência viu a evolução do conceito de tempo até seus últimos desenvolvimentos.

Os primeiros conhecimentos científicos, no que tange ao Cosmo, vieram dos filósofos gregos. Na Antigüidade, a Terra era tida como plana, como entre os babilônios, ou mesmo entre os primeiros gregos que pensavam que Apolo levava o Sol diariamente em sua carruagem, de leste para oeste. Há indícios, entre os gregos, já na época de Homero, do conhecimento de dias extremamente longos, o que dá uma indicação da esfericidade da Terra. Posteriormente, segundo Heródoto, os fenícios, ao circunavegarem a África, viram o Sol à sua direita ao caminharem em direção ao poente, o que indica, conforme a interpretação de Terra esférica, que eles estavam abaixo da linha do equador. As primeiras interpretações mais diretas e incisivas sobre a esfericidade da Terra deram-se com os pitagóricos. Ainda entre os gregos, formou-se a idéia de que a Terra, redonda, seria o centro do Universo, as estrelas se moveriam em uma esfera exterior, a esfera celeste, com período fixo . Os movimentos foram conhecidos através da sombra de uma vara vertical fixa ao solo, vara esta denominada gnomon. O movimento da sombra indica não apenas o horário durante o dia, mas o movimento do sol durante o ano.

O conhecimento mais detalhado e científico do Cosmos evoluiu bastante. As medidas de tempo através da observação da sombra do gnomon e o conhecimento das estações do ano permitiram as primeiras medidas de tempo. Os babilônios introduziram um ano de 360 dias, corrigidos para 365 pelos egípcios. O calendário Juliano foi introduzido por Júlio César com a ajuda de astrônomos egípcios e apresentava a novidade do ano bissexto, onde havia um ano de 366 dias a cada quatro anos. Tal calendário durou cerca de 1500 anos.

O calendário foi de grande importância histórica em nossa compreensão da física e da medida do tempo. Não o foi de modo intrínseco, mas sua compreensão levou a descobertas muito importantes. Por volta do século XVI, a data da Páscoa havia se adiantado no calendário Juliano. Esta data é definida através de uma combinação dos calendários lunar e solar. O calendário solar é melhor para as colheitas, pois segue o curso natural das estações do ano, mas o calendário lunar é de mais fácil apreciação pelo homem. O domingo de Páscoa é definido como o primeiro domingo depois da primeira lua cheia após o equinócio de primavera do hemisfério norte. Portanto, depende de fenômenos solares e lunares. É claro que o período solar não é necessariamente comensurável com o período de 365 dias e um quarto definido pelo calendário Juliano; uma revisão era necessária. Nicolau Copérnico, astrônomo polonês nascido em 1473 e falecido em 1643, fez esta revisão. Apesar de anteriormente a ele sábios gregos, indianos e árabes terem proposto um sistema heliocêntrico, tal hipótese ganhou força com o calendário proposto por Copérnico. Copérnico usou o heliocentrismo apenas como método de trabalho, mas posteriormente esta hipótese foi vista como realidade física.

O calendário de Copérnico foi instituído pelo papa Gregório XIII em 1582, tendo sido então chamado de calendário Gregoriano . A grande vantagem desta nova era, no que tange à marcação de tempo, não foi o calendário em si, mas o fato de que o sistema heliocêntrico, com observações posteriores do dinamarquês Tycho Brahe, foram utilizadas por Johannes Kepler para formular as três Leis de Kepler do movimento planetário. Subseqüentemente, Descartes e Galileo formularam o método científico, utilizado por Galileo e por Newton para descrever a Mecânica. Dentro da Mecânica temos o conceito clássico de Tempo.

O Tempo clássico é o tempo absoluto, um fluir perpétuo de algo que não sabemos definir, mas que bem podemos intuir. O Tempo Newtoniano clássico é o tempo de Zeus, um perpétuo movimento observado pelos deuses de seu assento olímpico. É a passagem inexorável associada ao movimento eterno das coisas. Foi também a definição do determinismo clássico, com a previsão de todos os fenômenos, desde que saibamos a configuração atual do mundo. Conforme Laplace, se um ser for capaz de saber todos os detalhes do Universo hoje, assim como as leis da Mecânica, todo o futuro estará, para aquele ser, determinado.

No entanto, a visão determinista da física sofre um impacto brutal vindo de uma outra teoria física bem conhecida, o eletromagnetismo. Conhecidos desde a Antigüidade, os fenômenos elétricos e magnéticos foram, no século XIX, reunidos em uma só teoria por James Clerk Maxwell, corroborada pela experiência e que trazia em seu bojo algo preocupante, do ponto de vista clássico: a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores, ou seja, se eu correr atrás da luz jamais a alcançarei, e se for em direção a ela, não a encontrarei mais rápido. Albert Einstein teve a grande idéia de interpretar o resultado dizendo que o tempo e o espaço estão reunidos de forma inseparável, ou seja, o mundo físico é um contínuo quadri-dimensional espaço-tempo. Era a teoria da Relatividade Especial, formulada no *anus mirabilis* de 1905, quando Einstein escreveu três trabalhos que revolucionaram a física.

Com o conhecimento das leis do eletromagnetismo vieram os primeiros abalos da física clássica: o eletromagnetismo parecia incompatível com o conceito de tempo absoluto, especialmente com as conclusões tiradas da experiência de Michelson e Morley e com a confirmação das equações de Maxwell através das ondas Hertzianas (as ondas eletromagnéticas). De fato, concluiu-se então que as verdadeiras leis de transformação são as de Lorentz, que se tornaram uma das pedras angulares da nova física por se iniciar. O significado físico era grande. Em primeiro lugar, o tempo já não era absoluto, e observadores em movimento tinham escalas de tempo diferentes, uns com respeito aos outros. Objetos físicos também se comportavam de modo estranho, passando a se comprimir ao se moverem com velocidades muito grandes. Esta é a nova física da Teoria da Relatividade, e de um modo muito simples, uma das mais conhecidas novidades é que o tempo não se move da mesma maneira para os vários observadores .

De modo concomitante, outros problemas, ainda tidos como pequenos, ainda escapavam a uma solução. O que não se sabia é que, no final do século XIX, se começava a avistar a pequena ponta de um enorme iceberg em rota de colisão com a titânica física clássica. Se nos for permitido um desvio de assunto, podemos dizer que se via uma falsa calma da passagem do século, calmaria esta representada pela era Vitoriana, mas que continha uma monumental tempestade que varreria toda a face da terra, mudando de modo completo e sem volta os contornos planetários, com uma mudança fundamental na visão de mundo e na interpretação filosófica.

Mas, no que diz respeito ao tempo, uma revolução maior ainda estava por acontecer. Durante alguns anos, Einstein estudou como estender os resultados obtidos para o caso de haver forças gravitacionais, o que conseguiu ao formular a Teoria da Relatividade Geral que foi bem estabelecida do ponto de vista observacional pelas suas previsões sobre a órbita do planeta Mercúrio e principalmente pelo desvio de luz das estrelas pelo Sol, observado em um eclipse solar na cidade de Sobral, no Ceará, em 1919.

O resultado positivo da Relatividade Geral para o movimento planetário permitiu que se pudesse aplicar a teoria para se descrever o Cosmo. Procurou-se então uma chamada solução cosmológica da Teoria. O que se procurava, na Relatividade Geral, seria uma chamada métrica, ou seja, uma régua e um relógio específicos para a descrição do Cosmos. Tal problema foi resolvido supondo-se um chamado princípio cosmológico, que diz que não há lugares privilegiados no Universo. A solução para a métrica é aquela de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, e descreve um espaço em evolução, com uma régua que se alonga com o tempo. Ou seja, o Universo expande-se continuamente!

Einstein não se satisfez com a solução, pois esperava um Universo estático. Tentou modificar suas equações introduzindo a chamada constante cosmológica, que posteriormente qualificou como o maior erro de sua vida . A solução cosmológica acima foi confirmada pelas observações do astrônomo Edwin Hubble cerca de 80 anos atrás.

Como o Universo encontrava-se em expansão, olhando-se para trás podemos antever um instante em que todo o Universo estaria concentrado em um só ponto: seria o instante inicial do Universo, a criação do próprio espaço-tempo, o instante da criação do Universo! É a própria criação do tempo, o tempo de Cronos, o tempo de Agostinho, o instante anterior ao qual não havia tempo! É interessante a argumentação de Santo Agostinho. Argumentava-se na época, que a criação, sendo perfeita, deveria ter ocorrido antes, e Deus não poderia ter simplesmente esperado. A resposta do Santo é que o tempo não existia antes da criação. Sendo eterna, a divindade transcende o próprio tempo, e para Ele tudo é presente, não existindo ordem temporal. Assim, no século IV, Agostinho usou conceitos que amadureceram apenas com o advento da Teoria da Relatividade no século XX.

Assim, após o tempo de Zeus, o tempo clássico, Olímpico, compreendemos o tempo criado, o tempo de Cronos. O tempo da Relatividade Geral aproxima-se da noção de criação, da idéia de ciclo, tal como espelhada na Arte Católica da Capela Sistina. Contrapõe-se ao tempo de Zeus, que, sem início ou fim, concorda melhor com as idéias clássicas de determinismo.

No entanto, outra revolução científica se dá no início do século XX, que fará mudar nossas concepções de espaço-tempo. Trata-se da Mecânica Quântica. A Mecânica Quântica nasceu com a tentativa de explicar os fenômenos associados ao muito pequeno, às partículas elementares, âmbito no qual a Teoria Clássica, abarcando a Mecânica Clássica e o Eletromagnetismo, tem dificuldades intrínsecas insuperáveis. A Teoria Quântica evoluiu, para explicar todos os tipos de fenômenos associados ao muito pequeno, para uma concepção totalmente nova na explicação dos fenômenos físicos, com a inclusão do observador que passa a ser parte do fenômeno a ser estudado. Tal concepção é totalmente estranha à Física Clássica, onde o observador é completamente externo e estranho ao fenômeno estudado, devendo assim permanecer de modo a não borrar os resultados experimentais. Na Mecânica

Quântica isto é impossível! Os fenômenos, na ausência de observador, são probabilísticos, e uma das possibilidades só ocorre na presença do observador, ou, melhor ainda, no caso de uma observação.

A Mecânica Quântica tem um formalismo muito rico e pode ser descrita de diversas maneiras diferentes. Em particular, há uma maneira elegante e instrutiva de se definir a Mecânica Quântica. Como tudo são probabilidades em Mecânica Quântica , a trajetória de um ponto pode ser qualquer uma, e a trajetória real será uma média ponderada, sendo a ponderação definida através de uma constante fundamental introduzida por Max Planck quando do primeiro trabalho histórico que trouxe a Teoria Quântica para a Física.

A Mecânica Quântica entra na história do Universo em dois pontos importantes. O primeiro diz respeito à evolução cósmica dentro do âmbito da Relatividade Geral através da Teoria das Partículas Elementares. Isto decorre do fato de que quanto mais próximas as partículas (o que ocorre no Universo primordial devido à contração do espaço) mais quente o Universo e a descrição das partículas será eminentemente quântica.

Mostra-se que a história cósmica tem fases e pode, de modo simplificado, ser descrita em termos de três épocas fundamentais. A primeira, chamada de fase de radiação, contém uma sopa quentíssima de partículas a uma temperatura tão alta que as diferentes interações elementares se confundem. No final desta fase, certas marcas foram deixadas nos céus e somos capazes de corroborar certas facetas das teorias das partículas elementares. Posteriormente, temos a fase da matéria, mais fria, onde as estruturas cosmológicas (aglomerados de galáxias, galáxias, estrelas) foram formadas. Finalmente, temos a fase moderna, de expansão acelerada através da energia escura.

A Mecânica Quântica foi essencial para esta descrição e para as previsões que levaram os físicos a afiançar a teoria padrão do início do Universo. A esta descrição chamaremos de descrição de Cronos, sendo a mesma da Relatividade Geral vista anteriormente, mas muito mais sofisticada.

No entanto, há outra faceta da descrição do Universo que será ainda mais elaborada e chega a ser quase mitológica, na medida em que não há, dentro da tecnologia atual, possibilidade de corroborar os detalhes desta teoria. O fato é que a Teoria da Relatividade e a Mecânica Quântica pareciam, até um quarto de século atrás, misteriosamente imiscíveis. A descoberta da Teoria das Cordas, imicialmente em um contexto de física das interações fortes (força nuclear) foi singularmente interessante. A teoria foi reinterpretada em termos da Relatividade Geral e se descobriu que ela descrevia a Teoria Quântica da Gravitação, ou seja, a Relatividade Geral Quântica, pela primeira vez depois de três quartos de século!

A Teoria das Cordas (de fato, Teoria das Supercordas) tem características peculiares. Em particular, ela está definida em um espaço-tempo com várias dimensões: a Teoria das supercordas está definida em 9 dimensões de espaço e um tempo. Assim sendo, como na Arte e na ficção, temos um Universo multidimensional! Em particular, como na Mecânica Quântica temos criação de partículas e antipartículas e várias trajetórias multiprováveis, podemos ter vários Universos com tempos independentes e não relacionados.

Assim, temos não somente um Universo multidimensional, mas uma infinidade de Universos com tempos e espaços diferentes e independentes. Nosso conceito de tempo se esvai e relativiza-se, pois diferentes observadores em diferentes Universos não podem se comunicar visto que seus tempos são incompatíveis. Temos, então, um tempo caótico, antes de Cronos! O tempo de Cronos não passa de uma pálida faceta de tempo, entre tantos e tantos tempos que populam o Multiverso, agora bem mais maiúsculo. O Multiverso contém uma infinitude de diferentes Universos alguns chamamos de pântanos ou brejos, onde a vida não é possível, e outros que chamamos de paisagens, onde a vida é possível.

Caso esta teoria seja realmente correta em seus detalhes, talvez tenham razão Edward Witten e David Gross que afirmam: *Maybe space-time is doomed*, ou seja, talvez os conceitos de espaço e de tempo estejam fadados à ruína.

Discussões envolvendo a Mecânica Quântica são extremamente complexas e de difícil interpretação. Na Teoria Quântica da Gravitação tal como proposta pela Teoria das Cordas, o tempo é uma das variáveis físicas e, da maneira como o conhecemos, só existe como um epifenômeno. Desta maneira, retornamos às dúvidas dos filósofos do século XVIII, como David Hume que colocava em dúvida a própria causalidade. Esta interpretação empírica da realidade deve ser comparada seriamente com a teoria quântica: embora a mecânica quântica seja descrita por equações diferenciais bem definidas, com previsões exatas, estas previsões referem-se a uma densidade de probabilidade, e apenas depois da feita uma medida podemos dizer o resultado do experimento. Assim, uma realidade física fica por debaixo de um véu, e não temos uma idéia precisa de seu significado. Conforme dizia Niels Bohr quando falando sobre a realidade do mundo quântico, não há um mundo quântico. Há apenas uma descrição abstrata da mecânica quântica. É errado pensar que a meta da física seja descobrir como é a Natureza. Física concerne ao que sabemos dizer sobre a Natureza.

Assim, especialmente quando chegamos ao âmago do espaço-tempo, podemos afirmar que de fato não sabemos, ao certo, o que é o tempo. Esta é uma das mais fascinantes questões da física, e talvez jamais possamos, dentro desta geração, ter uma resposta definitiva e final. No entanto, poderíamos dizer que estes conceitos estão em um domínio meta-científico, tal como a questão da efetividade da matemática como descrição da natureza. São questões que talvez não possam ser respondidas dentro da Ciência, podemos apenas intuir sobre sua veracidade e corroborar sua acurácia na descrição dos fenômenos naturais. Certamente outras questões se colocam com tão grande veemência, como a possibilidade de se viajar no tempo, ou, no caso de outros espaços-tempos termos que interpretar o significado destes diferentes espaços e tempos para os diferentes mundos.

É claro que estas questões são, no momento, mais da metafísica que propriamente da física. Voltamos a ter opiniões, e não só provas e demonstrações, quanto ao que concerne a assuntos de tamanho vulto. A questão nem mesmo é quando conseguiremos compreender estes mistérios, mas até mesmo se a civilização humana é capaz de resolvê-los através da capacidade intelectual do Homem Moderno, ou se outra civilização intrinsecamente mais adiantada seria necessária para fazê-lo.

Medidas práticas

Na prática, a medida do tempo também evoluiu, e muito. Conforme vimos, na Antiguidade media-se o tempo com o viajar dos astros nos céus. Mais atual é o uso de relógios. Os relógios baseados em água, onde o passar do tempo é associado ao fluir da água, também é bastante antigo, os primeiros tendo sido utilizados provavelmente ao redor do século XVI antes de Cristo. Tais relógios d'água foram descobertos em várias regiões do planeta, independentemente. Isto significa que a medida de tempo já era intuída vários séculos atraz. É claro que o envelhecimento, o passar das estações o crescimento das plantas, dos animais e dos seres humanos já nos dão uma idéia do que seja a passagem do tempo. No entanto, sua medida é algo que vai além da intuição. Assim, foram marcados os dias, fazendo-se marcação em ossos, o que configura um calendário rudimentar. A medida de tempos menores foi feita com varas para medição da posição do Sol e com relógios de água.

Os relógios d'água baseiam-se no simples fato de que um líquido demora algum tempo para vazar em uma panela com um buraco no fundo, ou seja, o líquido é viscoso. Os relógios d'água foram conhecidos mundialmente em várias épocas diferentes, tendo sido descobertos, em diferentes civilizações, como os babilôneos, 2 milênios antes de Cristo, os egípcios, 1500 anos antes de Cristo, ou os persas, 5 séculos antes de Cristo. Usavam-se relógios d'água para se medir com preciäo o comprimento do dia, o que dava uma melhor idéia da proximidade de solstícios e equinócios, sendo uma maneira de se saber a época do ano através do comprimento do dia.

Mas o melhor modo de se medir o tempo, é através de eventos que sejam realmente cíclicos, ou ainda, que se passem em intervalos de tempo iguais. Um exemplo típico é um pêndulo. Supomos que cada oscilação do pêndulo corresponda a uma unidade de tempo. No entanto, devemos estar certos de que cada oscilação se dê em um mesmo tempo. Isto não é sempre verdadeiro. Se o comprimento do pêndulo mudar, muda também a unidade de tempo. No caso do relógio d'água, pode-se perguntar se uma quantidade de água que sai no início o fará em um intervalo de tempo igual a uma quantidade que saia no final. Estas questões são altamente não triviais, e dependem de termos uma solução completa para o problema. Vemos neste caso que também aqui se aplica o método ientífico: supõe-se que se possa assim fazer uma certa medida, depois, com os intervalos de tempo assim medidos, verifica-se se o resultado é compatível com as hipóteses envolvidas.

Os relógios antigos, que começaram a ser construídos no século XV, baseavam-se em uma mola que se enrolava para mover o cursor. Este tipo de relógio é posterior ao relógio de pêndulo, baseado em um peso, portanto diretamente à gravidade.

Mais atualmente, os relógios se sofisticaram muito. Os relógios do século XX passaram a utilizar melhores materiais. O relógio de pulso tem pouco mais de 100 anos, graças a Santos Dumont, que queria ter as mãos livres ao consultar o tempo.

A partir da década de 50 passou a haver relógios elétricos, posteriormente os digitais. Relógios atômicos, baseados em frequências atômicas, com enorme precisão, são responsáveis por controlar a passagem do tempo.

Mais

1.4 O Espaço

Outro conceito de vital importância para a física é o espaço.

Como descrevemos um movimento é uma questão primordial. Saber o movimento de um objeto significa saber onde um determinado ponto está a cada instante. Isto significa achar a equação horária do movimento.

Não é completamente simples efetuar este procedimento em palavras. Podemos dizer, quando um carro está em uma estrada, qual sua posição a cada instante. Teremos então uma tabela de distância com a hora do dia. Isto é feito em uma tabela de horário de ônibus, por exemplo. Ou ainda, em uma estação de trens. O que fazer em um caso genérico. Por exemplo, se quisermos saber como anda uma bala de canhão, ou um avião, ou ainda, um planeta em torno de uma estrela.

Casos mais complexos necessitam de uma matemática um pouco mais sofisticada. É o momento em que se introduz o conceito de sistema de coordenadas. Assim, mede-se a posição de um ponto através da construção de um chamado sistema de eixos. Usualmente tomam-se três eixos triortogonais, que se encontram em um ponto arbitrário. A posição de um dado ponto é definida pela projeção da posição de sua posição sobre cada um dos eixos. Assim, a posição do ponto é dada pela trinca de números (x, y, z), ou ainda (x_1, x_2, x_3). Na verdade, esta trinca de números forma um elemento matemático bem definido, um vetor.

Supomos, na física clássica, que o espaço seja definido por sua geometria, a parte da matemática estudada por Euclides, cerca de 300 anos antes de Cristo. Podemos nos perguntar se a geometria euclidiana define univocamente nosso espaço. A resposta é de fato negativa. É uma hipótese o fato do espaço ser euclidiano, e esta hipótese deve ser testada por experiências. A física clássica repousa sobre a hipótese de que a geometria subjacente seja a geometria euclidiana, e nosso espaço é regida pela mesma. No entanto, hoje sabemos que a teoria da relatividade não tem a mesma hipótese. Isto significa que a natureza emerge, em condições especiais, sendo descrita por hipóteses diferentes, de modo que temos que testar nossas condições. Fenômenos da vida diária, com pequenas velocidades, de nosso mundo macroscópico, são bem descritos pela física clássica, e pela geometria euclidiana. Isto significa que, no momento, suporemos que o espaço seja univocamente descrito pela geometria euclidiana.

O que geralmente procuramos na física é a equação horária: uma função da posição do corpo em termos do tempo. Como a posição é um vetor, podemos afirmar que a equação horária é um vetor, função do tempo, $\vec{x}(t)$.

A velocidade é a variação da posição com a mudança do tempo. Conforme definiremos mais tarde, a velocidade é a derivada da posição, $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}(t)$. A aceleração também é definida de modo geométrico através da variação da velocidade no tempo, ou seja, $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t)$.

A massa de um corpo será definida através das leis de Newton.

1.4.1 Relações entre grandezas físicas.

Há relações simples entre grandezas físicas, como, por exemplo, entre a velocidade e a aceleração de um corpo. São relações que decorrem da cinemática definidora das grandezas. No entanto, pode haver relações mais profundas, que nos levarão às Leis da Natureza. Uma Lei da Natureza é uma relação que só podemos explicar através da própria natureza, que a tem como correta desde que explique os fenômenos naturais. É neste ponto que entra o método científico.

1.5 O Nascimento da Ciência Moderna

A ciência não pode se desenvolver até o início da Idade Moderna da maneira como vemos nos dias de hoje pela falta de um ingrediente essencial: o método científico.

Os gregos foram bons observadores. Vimos que descobriram fatos complexos, inventaram a matemática e a lógica. No âmbito específico da Física, jamais passaram de fatos elementares. A causa de tudo isto não é mais nem menos que a ausência do método de avanço da ciência. Foi muito parecido com o que aconteceu no Oriente, mesmo em tempos mais modernos.

A matemática avançou muito entre árabes e indianos. Toda a álgebra (cujo nome vem do árabe) floresceu no Oriente Médio. Várias invenções vieram da China, onde o conhecimento avançou também na direção do homem, na filosofia, nas plantas, nas técnicas. Conforme nos conta Abdus Salam em sua aula quando ganhou o prêmio Nobel, Michael, o escocês, foi buscar conhecimento em Toledo, na Espanha, entre os árabes, em 1217. Na época, eram também famosos os médicos islâmicos Al-Razi e Avicenna, e Aristóteles fora re-introduzido na Europa através de traduções do árabe.

Foi o método científico que propiciou o grande avanço material do Ocidente moderno. Quando se estuda um fenômeno qualquer, ao se tentar compreendê-lo, devemos começar por algo inteligível, cognoscível de modo simples ao nosso intelecto. Isto é um procedimento que quase nunca é simples. Suponhamos que vamos descrever um movimento. Se começarmos pelo movimento de uma carroça, ou de uma pedra ao ser jogada no chão, rolando subseqüentemente, veremos que o problema é extremamente complexo. Se for o movimento de um pião, teremos grande dificuldade até mesmo para saber que movimento descrevemos, pois há, de fato, vários. Afinal, um pião não cai enquanto gira e muitas vezes tem um movimento dito de precessão em torno de seu eixo, um bamboleio, e, ao diminuir sua rotação, cai de modo quase misterioso. Da mesma maneira, uma pedra rola de modo diferente cada vez que a jogamos no chão, dependendo de detalhes de como ela foi jogada.

É quase impossível aprender algo sobre movimento dentro de condições tão complexas. No entanto era assim no início. A física, desde os gregos, era bastante holística. A essência de cada fenômeno não era separada, e questões envolvendo várias componentes tornam-se complexas demais para uma compreensão total ao mesmo tempo. E assim continuou a ser a ciência nas várias regiões do mundo.

Um dos primeiros usos modernos do método foi feito por Kepler, no que podemos chamar de antecedente ao método. Kepler tomou os dados puros de Tycho Brahe e procurou formular leis simples que os descrevessem. É o que chamaríamos hoje de fenomenologia. Não era ainda, todavia, o método científico de Bacon, Galileo e Descartes. Este nasceria do uso sistemático de modelos simplificados. A experiência da queda dos corpos é um exemplo. Compara-se a queda de duas pedras, por exemplo, e não uma pedra e uma folha, que cairiam de modo diferente, tendo em vista que suas estruturas são enormemente diferentes. Assim, de modo simples, podemos dizer que os corpos caem, na terra, com a mesma aceleração, desde que abandonemos a resistência do ar, importante na queda de uma folha. Este procedimento nos dá uma explicação da essência da queda dos corpos. É o método científico em ação.

O Método Científico

Consideraremos agora a revolução científica de Galileu e Descartes. O método científico pode ser explicado de maneira simples através do uso sistemático da matemática na ciências e através dos preceitos deixados por Descartes [?], em número de quatro, que são:

1. Jamais aceitar como exata coisa alguma que não se conhecesse à evidência como tal. Assim, a verdade deve ser absolutamente comprovada, evitando-se precipitação e hipóteses falsas, duvidosas ou ambíguas. No método científico não há lugar para preconceitos, mas só verdades incontestes podem ser admitidas como tal.

2. Dividir cada dificuldade a ser examinada em tantas partes quanto possível e necessário para resolvê-las. Isto significa que estudamos cada faceta de um problema em separado, até compreendermos totalmente como aquela particular faceta faz parte da totalidade. Este foi um passo essencial, pois permitiu deduzir as leis da Mecânica aperfeiçoando-as aos poucos, até que se fizessem perfeitas aos problemas práticos. Este passo jamais foi dado pelos gregos.

3. Por em ordem os pensamentos, começando pelos assuntos mais simples de serem conhecidos, para atingir, paulatinamente, gradativamente, o conhecimento dos mais complexos, e supondo ainda uma ordem entre os que não se precedem normalmente uns aos outros. Esta regra completa a anterior.

4. Fazer, para cada caso, enumerações tão exatas e revisões tão gerais que se esteja certo de nada haver esquecido.

Com o método científico em mãos, levando em conta as observações detalhadas anteriores ao século XVII, foi possível a Isaac Newton realizar a grande revolução científica dentro da ciência. O trabalho de Newton tornou-se a base sólida da física clássica. Com as leis de Newton, puderam-se confirmar as leis de Kepler de modo dedutivo. Este foi o grande sucesso de Newton.

As idéias de Bacon, Galileo e Descartes evoluíram bastante desde o século XVII. Numa linguagem moderna, o método científico consiste em sete etapas:

1. Considere uma questão sobre a Natureza

2. Recolha as evidências experimentais pertinentes

3. Formule hipóteses explicativas.

4. Deduza suas implicações.

5. Teste experimentalmente as implicações.

6. Aceite, rejeite ou modifique as hipóteses com base nos resultados experimentais.

7. Defina as situações de aplicabilidade das hipóteses.

A conclusão destas etapas pode ser rápida, alguns dias, ou muito lentas, um século. Atualmente, exige-se também que estas etapas sejam reproduzidas por pesquisadores e laboratórios independentes.

O método científico é em geral aplicado conjuntamente com o chamado princípio da Navalha de Occam, que estabelece a "parcimônia de postulados", também chamado de "princípio da simplicidade". Segundo o princípio da Navalha de Occam, se houver duas explicações possíveis para um mesmo fato, deve-se preferir a *mais simples.* É um princípio heurístico, usado como guia na formulação de teorias, e não um princípio científico fundamental. Newton tinha sua própria versão da Navalha de Occam, segundo a qual não se deve admitir nenhuma outra causa dos fenômenos naturais além daquelas suficientes para explicá-los.

A importância do método é tanto maior quanto maior seu sucesso. As aplicações técnicas da ciência foram de enorme sucesso, já que as explicações simples permitiram a construção de aparelhos simples que usavam as leis mais importantes. As forças e suas ações permitiram uma compreensão maior das construções empreendidas. Possibilitou-se posteriormente a construção de novas máquinas, havendo um enriquecimento da sociedade. Bem mais tarde, com a compreensão maior de fenômenos elétricos e magnéticos, chegou-se à formulação do eletromagnetismo, cuja tecnologia decorrente modifica a vida até os dias de hoje.

Com o método científico passamos, portanto, à descrição da física como ciência moderna, e partimos em direção a um grande progresso. O iluminismo ganha forças e a ciência tem um progresso jamais visto antes na história da humanidade, e a partir deste ponto, até hoje, o desenvolvimento técnico e científico é, a cada dia, maior e mais presente.

1.6 Leis da Natureza.

Leis da natureza são princípios teóricos que devem ser verdadeiros para uma série de observações que concernem à Natureza. De modo geral, dentro da física, uma Lei da Natureza é o que acreditamos descrever a Natureza através de leis matemáticas. Temos confiança, hoje, no fato de que a Natureza comporta-se de modo condizente com leis matemáticas. A descrição dos antigos gregos continha muito pouco de matemático. Era uma descrição holística, com princípios gerais do tipo *a posição natural de um corpo é no centro da Terra* e que hoje não faz sentido se não houver uma razão matematicamente bem definida para tanto.

Nossa confiança na descrição matemática vem da experiência, que tem sempre corroborado o método científico e os resultados advindos da descrição matemática da Natureza. Daí decorre o que chamamos Leis da Natureza, ou no caso dos objetos físicos, temos as Leis da Física.

Vimos que, no início, tinha-se uma compreensão mitológica do mundo. A criação era divina, os fenômenos eram ligados diretamente à vontade de alguém, seja de um criador incriado, no caso das religiões monoteístas, seja de deuses no politeísmo, ou mesmo de outros seres, supra humanos ou heróis, dotados de vontade. O Universo era divinizado, movido por vontades com moldes humanos. Os mito continham a descrição geral da Natureza.

Neste processo, no entanto, o Homem teve um papel central como figura mestre dos moldes da psique, cujo padrão foi central na descrição dos mitos. Para os gregos, Prometeu trouxe o fogo, trazendo a idéia dos promórdios da civilização, sendo o fogo o marco civilizatório. As religiões monoteístas descrevem a criação do Homem de modo que o criado já tinha uma visão de mundo, um papel cultural.

As Leis da Natureza, para os físicos, devem ser leis gerais, que podem ser testadas por experimentos em que se fazem previsões através destas leis, e se verifica se as previsões são, de fato, corroboradas no experimento. No caso de o serem, dizemos que a lei é válida naquele domínio, senão, ela não o é. Em princípio jamais sabemos se uma lei pode ser universalmente válida, afinal, não se pode prever que uma lei deve valer sob quaisquer condições. Podemos apenas e tão somente testar as leis, de modo a termos cada vez mais confiança na referida lei. Prever sua validade geral seria equivalente a termos leis que transcendem a nossa experiência. Hoje este assunto tange à metafísica, já que nosso conhecimento por vezes chega a questões que concernem ao Universo como um todo e até mesmo fora dele, o que jamais poderemos testar. Nestes casos, a rigor, não podemos fazer previsões científicas.

1.7 A Ciência Grega

A ciência, no tempo dos gregos, era, de fato, parte da filosofia. Os gregos eram profundos conhecedores de filosofia e grandes pensadores. Platão fundou sua Academia, onde a discussão era a regra fundamental. A liberdade de pensamento e de expressão contrastou com a escola pitagórica, onde havia muito conhecimento, mas as regras eram tais que não podia haver discordâncias em relação às doutrinas vigentes na própria escola. Platão não era na verdade um homem dedicado às ciências naturais. Discutiu o espírito e as idéias. Sua filosofia sobreviveu e passou por transformações muito mais tarde, que levaram, em particular, ao neoplatonismo. Destaca-se o nome de Plotinus, e a influência sobre a filosofia católica, como em Santo Agostinho ou na cultura islâmica e na vertente sufista. Aristóteles foi discípulo de Platão. Homem genial, chegou a estudar, ou opinar, sobre todo o conhecimento da época. Sua lógica sobrevive até hoje, sendo, de fato, eterna. Sua física, em termos modernos, não é correta. Como isto aconteceu?

Aristóteles em particular, mas os gregos em geral, não conheciam o método científico. Sua pesquisa, apesar de elementos de observação, não era escrutinada pela experiência. Mas há outro ponto também. Com a decadência geral de épocas posteriores, a ciência não evoluiu, e os chamados peripatéticos, seguidores de Aristóteles, simplesmente estudaram suas obras, sem uma visão crítica, nem uma tentativa de progresso. Suas idéias passaram a ser religiosas, e qualquer argumento se baseava na autoridade, e não na lógica, na razão, ou no fator observacional. Portanto a filosofia de Aristóteles, infelizmente, ficou sendo algo estanque, fixo, e os erros se mantiveram como de início. Aristóteles quase chegou à lei de inércia. No capítulo 8 de seu livro IV de Física, ele argumenta:

The second reason is this: all movement is either compulsory or according to nature, and if there is compulsory movement there must also be natural (for compulsory movement is contrary to nature, and movement contrary to nature is posterior to that according to nature, so that if each of the natural bodies has not a natural movement, none of the other movements can exist);

but how can there be natural movement if there is no difference throughout the void or the infinite? For in so far as it is infinite, there will be no up or down or middle, and in so far as it is a void, up differs no whit from down; for as there is no difference in what is nothing, there is none in the void (for the void seems to be a non-existent and a privation of being), but natural locomotion seems to be differentiated, so that the things that exist by nature must be differentiated. Either, then, nothing has a natural locomotion, or else there is no void.

Hoje podemos argumentar da mesma maneira e chegar à Lei da inércia, no entanto Aristóteles chega à conclusão de que o vácuo não existe. Foi um erro? De fato, o que há na ciência hoje é que um erro será corrigido por um pesquisador subseqüente. No entanto, como durante toda a Idade Média os argumentos se baseavam na autoridade, nenhum erro poderia ser corrigido (Tomás de Aquino fala de Aristóteles como o Filósofo).

Galileu baseou-se em fatos observacionais. Em primeiro lugar, fez a hipótese simples de que não há diferença entre o que acontece no céu e o que acontece na Terra: a física é uma ciência ubíqua, universal, sempre válida, descrevendo todos os processos naturais. Assim, os céus não têm um contexto especial. O movimento dos planetas, igualmente, deve ser regido pelas leis da física. Então como pode um planeta girar eternamente em torno de outro astro? O movimento eterno deve ter uma origem bem definida, a lei da inércia, dizendo que um movimento, uma vez originado, sem qualquer agente externo que o influencie, continua para sempre. O movimento no vácuo é um destes: como argumentou Aristóteles, não havendo qualquer obstáculo pela frente o movimento deve continuar eternamente. Como ele não acreditava na conclusão, negou a existência do vácuo. Podemos acreditar no vácuo, até mesmo por não haver prova em contrário, portanto explicamos o movimento planetário e chegamos a uma nova lei da natureza, a Lei da Inércia. Em termos de nossa formulação de um ponto em movimento, temos que, no vácuo, o movimento é tal que a velocidade é constante.

Na maior generalidade, a idéia de mundo na visão aristotélica estava de acordo com a visão católica: a Terra era o centro do Universo, o homem superior à mulher, os céus, morada de Deus, era perfeito. No esteio destas idéias, a descrição do movimento viria como a busca do lugar natural das coisas: os objetos caem porque visam estar no centro do mundo. A descrição astronômica de Ptolomeu corroborava estas teorias. De fato, como a visão do observador astronômico era de uma pessoa centrada na Terra, fazia sentido supor que este observador via o mundo a seu redor. Era, portanto, difícil mudar estas teorias. Isto aconteceu através de uma questão aparentemente trivial, centrada em preocupações da própria igreja católica da época: a data da páscoa.

Por outro lado, já no início da Idade Moderna muito estava mudando. Tycho Brahe, além de suas observações sobre os planetas, também observou a explosão de uma supernova. Segundo a opinião vigente na época, o céu deveria ser imutável, e a explosão deveria ser próxima. Mas Tycho observou que a paralaxe não era suficiente, e a explosão de fato ocorrera muito longe, ou seja, na região das chamadas estrelas fixas. Foi mais um ponto em que as idéias tinham que mudar.

O papel da experiência na compreensão da Natureza

A observação é inerente à relação do Homem com a Natureza. Compreender a Natureza significa dar uma forma aos fenômenos de modo que eles sejam compreensíveis ao pensamento humano. Para isto, qualquer teoria tem que se relacionar diretamente com a experiência.

As primeiras experiências que nos levam a reflexões profundas foram provavelmente ligadas às observações dos céus. Desde que o Homem se conhece, ele provavelmente se pergunta sobre o Universo, e a observação dos céus pode dar uma centelha de luz sobre o problema. Os céus nos dão indicações formidáveis sobre a regularidade do Universo. O movimento do Sol pode ser bem apreciado quando colocamos uma longa vara verticalmente no chão e observamos o movimento da sua sombra. Precebemos, primeiramente, que o Sol não apenas segue de leste para oeste no movimento diário, mas também muda sua inclinação de modo previsível ao longo do ano. Ele se movimenta maximamente para o Sul, no hemisfério Norte e para o Norte no hemisfério Sul nos respectivos meses de outono e inverno (é claro que o homem primitivo, do hemisfério norte, seguia apenas um destes casos!). Assim, foi conhecido o movimento anual do Sol. Mais ainda, o movimento das estrelas foi visto com detalhe, e a duração do dia estelar é mais precisa que a do dia solar.

Estes fatos levaram a uma idealização da estrutura do Universo de modo a termos uma teoria sobre sua estrutura, teoria esta que se desenvolveu bem mais tarde, com outros problemas que foram sucessivamente sendo estudados e resolvidos. O fato da Terra ser redonda não foi um fato trivialmente aceito. Há indícios do conhecimento de dias mais longos em altas latitudes (talvez mesmo em Homero). Segundo Heródoto, os fenícios circumnavegaram a África vendo o Sol à direita ao irem para Oeste, o que não era fato no hemisfério Norte, indicando estarem em um ponto de observação diferente, provavelmente em um local com esfericidade. A idéia de Terra redonda provavelmente nasceu no século quinto A.C. com os Pitagóricos. Os Pitagóricos foram os que primeiro trouxeram a matemática para o mundo do pensamento.

A medida do raio da Terra foi feita por por Eratóstenes. Com o Sol a pino em Siena (atual Aswan, no Egito) ele mediu a sombra em Alexandria (a 5000 estádios) verificando que havia uma diferença angular de cerca de 7 graus. Eratóstenes achou 250.000 estádios Resultado correto em 5%, dependendo de que medida exata corresponde o estádio (excelente!).

Observações simples levaram às várias mudanças de calendário, e daí a questões importantes para o desenvolvimento da mecânica. De fato, a hipótese heliocêntrica de Copérnico nasceu da necessidade de se explicar o movimento dos planetas para se chegar ao novo calendário.

Outras observações de vulto foram necessárias para que a física evoluisse. O nobre dinamarquês Tycho Brahe recebeu uma ilha para fazer observações astronômicas. Suas observações referentes ao planeta Marte foram tão precisas que levaram Johannes Kepler a formular, em particular, a lei das áreas, e, de modo geral, as chamadas Leis de Kepler do movimento planetário.

O maior físico experimental da história foi Michael Faraday (1791-1867). Quase não teve educação formal. Aprendeu muito lendo em seu trabalho, como ajudante de livreiro. Ainda jovem, assistiu às aulas públicas do famoso químico Humpry Davy. Depois disto, trabalhou como assistente de Davy no laboratório. Fez grandes descoberts na química e na física e idealizou as linhas de força, um conceito que leva à idéia de campo.

O papel da matemática na compreensão da Natureza

A geometria foi essencial nas primeiras medidas do Universo. Quando Eratóstenes mediu o raio da Terra utilizou trigonometria e quando Aristarco fez as medidas da distância da Terra à Lua, ou da Terra ao Sol, usou também a geometria exaustivamente.

Usando os dados obtidos por Tycho Brahe e idéias de beleza, Johannes Kepler (*1571 +1630) formulou as 3 leis que levam seu nome:

1. As órbitas são elípticas. Kepler usou principalmente os dados de Tycho Brahe relativos ao movimento de Marte. Verificou que uma órbita circular não poderia descrever os dados obtidos por Brahe. Como Kepler sempre procurou uma lei matematicamente bem definida, que pudesse descrever a física através de uma linguagem matemática, o elemento mais simples que Kepler pensou em utilizar foi a elipse. Para Kepler, a geometria é o arquétipo da beleza do mundo.

2. As áreas em relação ao sol são varridas de modo constante. Kepler utilizou novamente os dados de Brahe.

3. O quadrado do período é proporcional ao cubo do raio de revolução.

Wolfgang Pauli estudou o procedimento que levou Johannes Kepler a formular estas leis desta maneira. Sua conclusão era que basicamente Kepler agiu por um instinto, qual seja, de que a matemática era algo vital para a formulação das leis. A conclusão era que pura lógica não pode levar do empírico às leis naturais. Uma relação entre as imagens existentes no interior da psique humana com objetos externos e sua existência deve ser a base da compreensão da natureza. Tais imagens primárias são o que o próprio Kepler denominou *archetipalis* (arquetípicas).

Como operadores de ordenamento e formadores de imagens, arquétipos trabalham como uma ponte entre idéias e são um pressuposto para as teorias científicas da natureza. Na Idade Média tínhamos uma Era pré-científica, com uma descrição mágica e simbólica da Natureza, como o foi a alquemia.

Kepler teria representado uma transição da conceituação mágica para as teorias realmente científicas da Natureza.

Kepler era fascinado pela idéia pitagórica de música das esferas. Ele dizia: *Geometria est archetypus pulchritudinis Mundi*, ou seja, a geometria é o arquétipo da beleza do Mundo.

Johannes Kepler dizia sobre a interpretação:

A geometria é coeterna com a mente divina antes da criação. É o próprio Deus (o que está em Deus senão o próprio Deus?) e deu a Deus os modelos da criação do Mundo ... O Sol em meio às estrelas moventes, ele próprio imóvel, mas fonte de movimento, tem a imagem do Pai, do Criador.

Esta última interpretação levou Kepler a procurar uma lei que reunisse em algo único um fato geral a todos os planetas, mas que envolvesse o próprio Sol. Assim nasceu a terceira lei, a mesma para todos os planetas em torno do Sol.

A despeito das interpretações bastante religiosas de Kepler, ele foi um dos primeiros a utilizar de modo magistral o método científico. Usou os dados de Kepler relativos a Marte com a hipótese de figuras geométricas simples para chegar às órbitas elípticas. Fez o mesmo com a lei das áreas. Baseado no divino usou os dados para formular a terceira lei.

De acordo com Kepler, a alma individual, que ele chama de *vis formatrix* ou *matrix formativa* tem a habilidade fundamental de reagir, com a ajuda do *instinctus* a certas proporções harmoniosas que correspondem às divisões racionais do círculo. Em música, isto corresponderia à eufonia.

René Descartes foi um filósofo francês, nascido em 1596, tendo vivido a maior parte de sua vida na Holanda, faleceu em 1650. Além da filosofia, estudou geometria e, com Fermat, mesclou-a com uma descrição numérica, o que ficou conhecido como geometria cartesiana. A Geometria fica deste modo compreendida em termos de equações algébricas. Posteriormente, tais conceitos foram utilizados para a dinâmica de pontos submetidos a uma força externa. Utilizaremos a geometria cartesiana ao detalhe na descrição do movimento dos corpos.

Galileo Galilei (*1564 +1642) foi um físico italiano, o maior nome científico de sua época, tendo melhorado o telescópio e, com sua ajuda, desvendado vários mistérios acerca do céu. Teve o maior papel na revolução científica, defendeu o heliocentrismo e combateu doutrinas científicas enraizadas na tradição, sem vínculos com a realidade científica.

Começou a formular a mecânica: são leis com forma matemática bem definida. Formulou a Lei da inércia, que diz que corpos livres de forças movem-se com velocidade constante. Deve- se notar bem que este conceito (força) não era definido na época, esta formulação é, de fato, uma formulação em linguagem moderna, com conceitos modernos e mais precisos. Também nos referimos a Galileo quando falamos da Lei de transformação entre observadores diferentes,

$$x' = x - vt \ , \quad t' = t \tag{1.1}$$

onde um observador $\mathcal{O}'$ move-se com velocidade v em relação a um observador $\mathcal{O}$, e os observadores medem, respectivamente, posições e tempos x', t' e x, t.

Além disto, Galileo verificou que a aceleração da gravidade é a mesma para todos os corpos. Isto será de fundamental importância no contexto da teoria Geral da Relatividade, além de ser um conceito útil na formulação das equações do movimento planetário.

Foi Isaac Newton (*1642 +1727) quem deu o maior impulso às teorias físicas. Foi ele, de fato, quem introduziu os conceitos de força e de massa. Escreveu a renomada equação de força, $F = ma$. Mas o mais incrível é que nenhum dos termos que comparecem nesta equação era conhecido na época. A massa poderia ser intuída. A aceleração é um conceito que necessita do cálculo integral, pois corresponde à taxa de variação da velocidade com o tempo. Newton (mas também Leibnitz) desenvolveram o próprio cálculo integral e diferencial. Finalmente, precisou definir a força. Caracterizou a força através da lei de ação e reação, que se faz de acordo com a Lei da inércia. Postulou a Lei da Gravitação universal para dizer qual o princcípio dinâmico. Em outros casos físicos, devemos introduzir, caso a caso, quem é a força.

No caso da gravitação, conseguiu deduzir as Leis de Kepler a partir de suas equações.

Os Conceitos de tempo absoluto e posição levam às trajetórias, já que a posição de um objeto qualquer está submetida a equações que a definem em um tempo qualquer. Estas equações diferenciais descrevem o movimento dos chamados pontos materiais. Com o uso da geometria cartesiana podemos escrever equações diferenciais cuja solução descreve o movimento do ponto material. Somos então levados ao determinismo, isto é dadas as condições iniciais podemos prever a evolução de qualquer objeto.

Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749- 1827) foi um grande matemático e astrônomo francês. Trabalhou em problemas importantes da física matemática, e importante equação diferencial leva seu nome, a equação de Laplace. Estudou também probabilidades, tendo introduzido conceitos hoje utilizados na moderna teoria bayesiana de probabilidades. Foi o primeiro a falar de um corpo que atrai gravitacionalmente a luz, tendo-o descrito através de sua massa e seu raio. Hoje, este objeto é conhecido na teoria geral da relatividade como Buraco Negro, sendo possível sua descrição completa apenas nesta teoria.

Foi materialista ferrenho, trabalhando no determinismo, ou seja, que as equações diferenciais determinam completamente o futuro. Dizia Laplace: *Podemos considerar o estado atual do Universo como efeito de seu passado e causa de seu futuro. Uma inteligência que, em um instante determinado pudesse conhecer todas as forças que colocam a natureza em movimento, assim como todas as posições de todos os objetos que compõem a natureza, e se esta inteligência fosse suficientemente ampla para submeter os dados a análise, tal inteligência compreenderia em uma única fórmula os movimentos de todos os corpos do Universo, dos maiores, até os menores átomos; para tal inteligência, nada seria incerto e o futuro, assim como o passado, seriam evidentes aos seus olhos.*[3]

Laplace estudou a estabilidade de Órbitas planetárias, os harmônicos esféricos, a transformada de Laplace. A interpretação Bayesiana da probabilidade tem seu uso em observações modernas e fixação de parâmetros das teorias.

No segundo volume estudaremos o Eletromagnetismo, cujos rudimentos remontam à Lei de Coulomb e ao Magnetismo dos materiais (ímãs). Faraday introduziu uma ligação direta entre os campos elétrico e magnético (de fato, o conceito de campo estava ainda em gestação). Mais tarde, isto

[3] Nous pouvons considérer l'état actuel de l'univers comme l'effet de son passé et la cause de son futur. Une intelligence qui à un instant déterminé devrait connaitre toutes les forces qui mettent en mouvement la nature, et toutes les positions de tous les objets dont la nature est composée, si cette intelligence fut en outre suffisamment ample pour soumettre ces données à analyse, celle-ci renfermerait dans une unique formule les mouvements des corps plus grands de l'univers et des atomes les plus petits ; pour une telle intelligence nul serait incertain et le propre futur comme le passé serait évident à ses yeux.

levous às Equações de Maxwell, que por sua vez trouxeram, em seu bojo, as Transformações de Lorentz. Estas contém uma incompatibilidade entre o Eletromagnetismo e a Mecânica Clássica, levando à teoria da relatividade de Albert Einstein *1879 +1954.

O papel dos experimentos foi portanto fundamental, primeiro com as observações de Tycho e as leis fenomenológicas de Kepler que embasaram a física de Newtons. Também a matemática e o método científico em Descartes e Galileu com os modelos da realidade formaram a base da ciência moderna. Era o método científico nascendo. A existência de Leis matematicamente bem definidas foi fundamental para a ciência moderna.

Gênese da Mecânica. Galileu e a equivalência entre repouso e movimento retilíneo uniforme, independência dos movimentos em direções diferentes.

Relatividade das variáveis cinemáticas e sistemas de referência inerciais.

Newton. Força e interação. Ação e Reação: simultaneidade e igualdade de seus módulos e direções. Ação de contato e ação à distância. Relação entre força e aceleração; localização, composição e resultante de forças. Queda livre e movimento num campo de força constante. Condições de equilíbrio e aplicações. Força de atrito estático, cinético e aplicações. Dinâmica do movimento circular e aplicações.

Bibliografia

[1] Livro que trata da descrição do mundo segundo Aristóteles.

[2] Referência pela geometria estudada por Euclides a 2.000 anos atrás.

[3] Geraldo Severo de Souza Ávila," *Várias Faces da Matemática", cap. 3,* 2ª *ed., São Paulo: Blucher, 2010.*

[4]

[5]

[6]

Capítulo 2

Mecânica

2.0.1 Reflexões sobre o movimento

A expansão acelerada do Universo, a rotação dos planetas em torno do Sol, as ondas no mar, o voo surpreendente de um beija-flor, as oscilações de um pêndulo, a emissão de uma partícula alfa de um núcleo atômico são apenas alguns exemplos da variedade de movimentos que conhecemos e observamos. Não é de hoje que o Homem se ocupa em tentar compreender o movimento e formular explicações para sua origem. Desde as explicações filosóficas dos gregos passando pelas formulações científicas de Newton e Einstein, o movimento dos corpos e suas implicações tem sido alvo de intensa investigação e interesse. Podemos então nos perguntar de que nos serve uma formulação e uma descrição mais precisas do movimento?

Bem, se soubermos descrever um movimento de maneira precisa, compreendendo suas causas e como alterações nestas causas afetam o movimento seremos capazes, pelo menos em princípio, de controlar e até mesmo prever seus efeitos. Além disto, se sua formulação for escrita em uma linguagem universal, a matemática, ela será passível de teste e repetição em qualquer lugar e quantas vezes se desejar, uma vez que se conhecem as condições necessárias para produzir tal movimento.

Baseados nesse entendimento acima apresentado é que se estruturou todo um ramo da Física conhecido como *Mecânica.* Na Mecânica a análise do movimento pode ser desenvolvida através de duas abordagens distintas: *Cinemática e Dinâmica.* Enquanto a *Cinemática* se preocupa apenas com a descrição do movimento através de quantidades que o caracterizam, tais como, velocidade, distância percorrida, tempo gasto e aceleração, a *Dinâmica* tem por objeto de análise, quais fatores são responsáveis por aquele tipo de movimento, tais como, os tipos de forças que o produziram e a troca de energia e momento linear envolvidos no movimento.

Para ilustrar a diferença entre essas duas abordagens apresentamos a seguinte situação cotidiana:

> *Um rapaz queria fazer uma viagem de carro partindo de São Paulo com destino ao Rio de Janeiro. Como não sabia quanto tempo levaria a viagem ele resolver perguntar aos seus colegas físicos, César e Jayme, que trabalhavam no Instituto de Física. Já que a distância entre São Paulo e o Rio de Janeiro é de aproximadamente 429 km acredito que, de carro, você gaste aproximadamente 4,3 horas viajando a uma velocidade média de 100 km/h - disse César. Jayme pensou um pouco e concluiu. Certo, concordo que ele leve 4,3 horas, mas somente se o motor do carro funcionar corretamente, se o atrito causado pelo vento for desprezado, se o motorista não fizer nenhuma parada,... - e continuou listando mais alguns fatores que influenciavam o movimento do carro e poderiam alterar o tempo de viagem. Diante das opiniões dos colegas, o rapaz concluiu: Acho que vou mesmo é de avião.*

Como podemos observar, enquanto César faz uma descrição cinemática da viagem, concentrando-se apenas na distância percorrida, na velocidade média e no tempo gasto, Jayme faz uma descrição dinâmica, preocupando-se em identificar as condições necessárias para o movimento do carro e os possíveis impedimentos que poderiam alterar o tempo de percurso da viagem. Ao logo do livro veremos várias outras situações que também ilustrarão essa diferença entre as duas abordagens. Nesses primeiros capítulos focaremos nossa atenção apenas na descrição cinemática do movimento e suas aplicações. Em seguida, exploraremos a descrição dinâmica do movimento e por fim estudaremos algumas leis de conservação de propriedades do movimento.

2.0.2 Cinemática

Antes de iniciarmos nosso estudo do movimento propriamente dito, precisamos aprender como descrevê-lo de maneira adequada e clara.

Toda vez que nos propomos a descrever uma situação física ou um movimento arbitrário precisamos definir um referencial no qual estamos baseando nossas medidas e conclusões.

Esta idéia pode ser ilustrada de maneira bem simples.

Se perguntarmos se você que lê este livro está parado ou em movimento a sua resposta provavelmente deve ser que está parado. Muito bem, isso só será verdade se adotarmos como referência para essa resposta o seu próprio corpo. Por outro lado, se perguntarmos para um astronauta localizado fora da Terra ele dirá que você se movimenta a uma velocidade vertiginosa, mais especificamente à 1668 Km/h. Neste caso o astronauta usou como referência para sua resposta seu próprio corpo. Portanto, para a descrição precisa de um movimento é fundamental que, antes de qualquer coisa, indique-se qual será a referência que a ser adotada, ou seja, em relação a qual ponto do espaço se está descrevendo o movimento e consequentemente chegando as tais conclusões.

Mas afinal, qual descrição desse movimento está correta? A do leitor, que diz estar parado ou a do astronauta que lhe observa o movimento de longe?

A resposta para esta pergunta se mostra um tanto diplomática. De fato, ambas estão corretas. A razão da aparente diferença nas conclusões dos observadores é devida à escolha de diferentes *referenciais* para descrever o movimento em questão. Contudo, esta confusão nas conclusões pode ser corrigida se conhecermos de que modo o referencial do astronauta se relaciona com o referencial do leitor. Assim, além de indicarmos antecipadamente qual será o referencial que adotaremos para descrever um movimento precisamos saber também como ele se relaciona com outros possíveis referenciais. Em outras palavras, precisamos conhecer as regras de transformação entre diferentes referenciais.

Até agora temos falado apenas de como a descrição de um movimento está intimamente ligada à noção de referencial e das relações de transformação entre eles. Precisamos, portanto, refinar essa descrição fazendo uso de uma linguagem que permite a qualquer observador descrever um movimento de maneira universal. Por isso usaremos a matemática e seus conceitos para mapear o espaço e o tempo e através desta ferramenta obter regras de transformação entre referenciais, além de quantificar e qualificar o movimento estabelecendo relações numéricas entre conceitos físicos.

O mapeamento do espaço e do tempo pode ser realizado através da escolha um *sistema de coordenadas* que associará, a cada ponto do espaço e instante no tempo, um conjunto de números. Deste modo, três das coordenadas irão descrever as dimensões espaciais enquanto uma quarta coordenada descreverá o tempo. No caso do tempo podemos representar nosso "relógio universal"através de uma reta orientada que associará a cada medida um instante bem definido do que chamamos tempo.

Para ilustrar esse conceito vejamos na figura a seguir o voo de uma abelha na sala de estar de sua casa.

Para especificarmos qual é a posição da abelha em relação às paredes da casa precisaremos indicar três coordenadas espaciais (x, y, z). Essas três coordenadas mapearão numericamente qual é a largura, altura e profundidade que abelha se encontra na sala de estar.

Deste modo, um referencial S será representado por um sistema de coordenadas (x, y, z, t) onde cada dimensão espacial é mapeada em uma reta orientada. O tempo também será mapeado em uma reta orientada que será indicada à parte [1]. Como pode ser visto na Figura 1 a origem O do sistema de coordenadas do referencial S é o ponto de intersecção de todas as retas que mapeiam as dimensões espaciais. A reta que mapeia o tempo pode ser vista à esquerda do referencial S.

Se quisermos descrever a posição do ponto P em relação ao referencial S devemos fornecer os valores de (x_p, y_p, z_p, t_p) medidos a partir da origem deste referencial. Neste caso os valores serão: $P = (1, 2, 3, 0)$. Por outro lado, se adotarmos um novo referencial S' esses valores poderão mudar. Usando o referencial S' mediremos os seguintes valores para a posição do ponto $P = (-3, 2, 3, 0)$. Como o tempo evolui de maneira semelhante para ambos os referenciais, isto é, ele é uma quantidade absoluta, então $(t' = t)$ e nenhuma diferença será observada nas medidas de tempo realizadas em cada

[1] nota de rodapé sobre relatividade

um dos referenciais [2]. O mesmo não acontece com a direção mapeada pelas coordenadas x, x'.

A diferença nos valores entre as coordenadas x, x' se deve ao fato da origem do referencial S' estar deslocada da origem do referencial S.

Neste exemplo simples não é difícil estabelecermos a relação de transformação de coordenadas entre os dois referenciais.

As direções mapeadas pelas coordenadas y, y', z', z são as mesmas nos dois referenciais de modo que a relação entre elas será:

$$z' = z \tag{2.1}$$

$$y' = y \tag{2.2}$$

Isso significa que as distâncias medidas no referencial S tem o mesmo valor no referencial S' nestas duas direções. Já no caso da direção mapeada pelas coordenadas x, x' as medidas são diferentes. Contudo, podemos estabelecer a seguinte relação entre elas:

$$x' = x - 4 \tag{2.3}$$

Esta relação entre as coordenadas significa que, se soubermos a distância do ponto P em relação ao referencial S, podemos usar a equação acima para calcular a distância do ponto P em relação ao referencial S'.

Agora que aprendemos a usar referenciais e sistemas de coordenadas para localizar a posição de um objeto no espaço e marcar o instante de tempo em que ele se encontrava em tal posição, podemos dar o próximo passo na

[2]Os relógios foram previamente acertados. Além disto, pode-se sempre supor que a unidade de tempo seja a mesma para todos. O fato disto ser possível é uma característica da mecânica. Em princípio poderíamos ter t' como uma função de t. No entanto, poderia apenas ser uma função linear, ligada a uma redefinição da unidade de tempo, $t' = at + b$. No entanto, utilizando-se as mesmas unidades, $a = 1$.

descrição do movimento e estudar como se dá a variação desta posição em função do tempo.

Iniciaremos nossos estudos partindo do caso mais simples, o movimento unidimensional, e aumentando pouco a pouco a complexidade veremos o movimento em mais dimensões.

Movimento unidimensional

Para ilustrar os conceitos fundamentais utilizados na descrição do movimento em uma dimensão vamos analisar o movimento de um maratonista correndo um longo trecho em linha reta de uma maratona.

Neste caso, para a descrição do movimento, é bastante conveniente usarmos como referencial uma reta orientada x que se estende ao longo da estrada e está dividida em intervalos de 10 metros. Desta forma, o maratonista que corre está em movimento em relação ao referencial adotado. Observando a Figura **??** podemos dizer que o referencial escolhido representa as medidas realizadas por um espectador que está posicionado na platéia e registra a evolução temporal através do cronômetro da corrida. Deste modo, a cada ponto da reta ele associará a posição do maratonista em um determinado instante de tempo t medido pelo cronômetro. Através desta associação o espectador pode construir a seguinte tabela horária do movimento do maratonista,

t (s)	0	5	12	20	26	32	41	...
x (m)	0	10	20	30	40	50	60	...

o que lhe permitiria até escrever uma função $x(t)$ do deslocamento do maratonista.

Se o espectador continuar essa marcação até o final da maratona ele conhecerá muitos detalhes do movimento realizado pelo maratonista.

O primeiro detalhe que nos interessa é conhecer com que taxa o deslocamento Δx varia em um intervalo de tempo Δt gasto pelo maratonista em determinado trecho da prova. No primeiro trecho da prova essa razão é calculada fazendo-se

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} \quad , \tag{2.4}$$

o que define a *velocidade* com que o maratonista percorreu tal trecho. Em outras palavras, a velocidade nos indica "quão rápido"o maratonista percorreu aquele trecho da maratona.

No Sistema Internacional (SI) a velocidade de um objeto é medida em metros/segundos (m/s) mas as unidades (km/h) e (mph) também são bastante usadas, especialmente para descrever a velocidade de automóveis, aviões, etc.

Assim, a velocidade desenvolvida pelo maratonista no primeiro trecho pode ser calculada usando a Eq.(2.4), o que resulta em

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{5\ m - 0\ m}{10\ s - 0\ s}$$

$$v_1 = \frac{1}{2}\ m/s, \quad \text{ou} \quad v_1 = 0,5\ m/s. \tag{2.5}$$

Isto significa que o maratonista se desloca metade de 1 metro no intervalo de tempo de 1 segundo. A velocidade do maratonista em cada trecho pode ser calculada seguindo o mesmo procedimento e será dada por

$$v_2 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 0,7\ m/s$$

$$v_3 = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = 0,8\ m/s$$

Se o número de medições realizadas for muito grande então, uma representação gráfica, ou seja, um gráfico do pontos obtidos será mais conveniente para realizarmos a análise do movimento do atleta. Na Fig.(**??**) representamos o deslocamento do maratonista em função do tempo. Neste caso, o cálculo da velocidade entre dois pontos quaisquer se faz através do coeficiente da reta que liga os dois pontos. Tomemos dois exemplos:

A reta que passa pelos pontos A e B pode ser calculada como

$$x_B(t) = x_A + \alpha(t_B - t_A) \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} \tag{2.6}$$

Mas, da definição de velocidade que apresentamos na Eq.(2.4), podemos identificar α com a velocidade v, ou seja, ela é representada pela inclinação da reta AB. Neste caso,

$$\alpha = \frac{(30 - 20)\ m}{(20 - 12)\ s} = \frac{10\ m}{8\ s} = 1.25\ \text{m/s} \rightarrow \boxed{v = 1.25\ \text{m/s}}$$

isto significa que o maratonista percorreu esse trecho desenvolvendo uma velocidade $v_{AB} = 1.25$ m/s.

De modo semelhante podemos calcular a inclinação da reta que liga os pontos B e C

$$\alpha = \frac{(40 - 30)\ m}{(26 - 20)\ s} = \frac{10\ m}{6\ s} \sim 1.67\ \text{m/s} \rightarrow \boxed{v = 1.67\ \text{m/s}}$$

Neste caso a velocidade do maratonista neste outro trecho da maratona foi $v_{BC} = 1.67$ m/s. Comparando as velocidades nos dois trechos vemos que elas foram diferentes, de modo que no segundo trecho o maratonista desenvolveu uma velocidade maior que no primeiro. Agora podemos nos perguntar qual é a velocidade desenvolvida pelo maratonista no trecho entre A e C. Rapidamente responderíamos ser a média entre as duas velocidades. Isso resultaria em uma velocidade $v = \frac{v_{AB}+v_{BC}}{2} = 1.46$ m/s. Contudo, se calcularmos a velocidade desenvolvida o resultado será

$$v_{AC} = \frac{(40 - 20)\ m}{(26 - 12)\ s} = \frac{20\ m}{14\ s} = 1.43\ \text{m/s} \rightarrow \boxed{v_{AC} = 1.43\ \text{m/s}}$$

Bem, por que obtivemos um resultado diferente? A resposta pode ser obtida com a definição do conceito de *velocidade média*. Como a velocidade não é uniforme, ou seja, não é a mesma durante o intervalo de tempo Δt, a média das velocidades desenvolvidas no trecho é diferente da velocidade média desenvolvida no mesmo trecho. Definiremos portanto, *velocidade média*, como a velocidade que se desenvolve quando se percorre um espaço Δx em um intervalo de tempo Δt de modo uniforme,

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \implies \boxed{\bar{v} = \tfrac{\Delta x}{\Delta t}} \tag{2.7}$$

Isto significa que um objeto se deslocando de um ponto $x_1(t_1)$ até um ponto $x_2(t_2)$ sem alterar sua velocidade durante o percurso desenvolve uma velocidade média constante $\bar{v}$. De fato, mesmo no caso analisado acima do maratonista onde houve uma variação da velocidade podemos calcular a velocidade média desenvolvida por ele no trecho em questão. A velocidade média nos fornece a informação de quanto tempo ele levaria para percorrer o trecho entre A e C se mantivesse uma velocidade constante.

Se o movimento de um objeto for simples o bastante podemos encontrar uma função que associará a cada ponto do espaço a um valor específico tempo. A essa função chamaremos equação horário do movimento. Para um movimento uniforme, ou seja, cuja velocidade é constante, a equação horária é facilmente obtida utilizando nossa definição de velocidade apresentada na equação (2.4). Assim se escolhermos t_2 igual a um t qualquer e t_1 como o instante inicial t_0 do movimento então

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0), \tag{2.8}$$

é a equação horária do movimento retilíneo uniforme, onde x_0 indica a posição inicial do objeto. Com essa equação podemos dizer em que posição no eixo

x um objeto se movendo com velocidade v se encontra qualquer que seja o instante de tempo t. Confirmando nossa declaração anterior, a equação (2.8) corresponde à equação de uma reta cuja inclinação é dada por v.

Até agora temos visto a utilidade da definição de conceitos tais como velocidade e velocidade média. A próxima pergunta que podemos fazer é como calcular o valor da velocidade desenvolvida por um objeto em movimento a cada instante de tempo.

Velocidade Instantânea

A velocidade é definida a cada instante. Afinal, a velocidade de um corpo é uma função do tempo, portanto sempre definida com um valor calculavel. Em um dado instante de tempo, a velocidade é dada pelo espaço percorrido dividido pelo tempo para percorrê-lo. Em um instante isto significa que temos que medir os pequenos intervalos em instantes muito pequenos. Isto corresponde à idéia de limite. Ou seja, em um instante t, a posição varia de $x(t)$ a $x(t + \delta t)$, onde δt é um valor muito pequeno. A distância percorrida neste pequeno intervalo de tempo é a diferença das posições, $x(t+\delta t)-x(t)$. É claro que a velocidade será

$$v(t, \delta t) = \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} \tag{2.9}$$

Para que a expressão não dependa do pequeno intervalo δt fazemo-lo muito, muito pequeno. Este processo é chamado, dentro da matemática, de limite, e escrevemos

$$v(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} \tag{2.10}$$

A aceleração é tratada exatamente da mesma maneira, como sendo a variação da velocidade com respeito à variação temporal, ou seja,

$$a(t, \delta t) = \frac{v(t + \delta t) - v(t)}{\delta t} \tag{2.11}$$

Para que a expressão não dependa do pequeno intervalo δt fazemo-lo novamente muito, muito pequeno. Novamente o processo de limite, e temos

$$a(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{v(t + \delta t) - v(t)}{\delta t} \tag{2.12}$$

(colisão frontal, movimento sobre uma linha e rotação com raio constante, oscilador harmônico de mola,)

Cinemática em uma dimensão e o cálculo diferencial e integral

10 de Setembro de 2012

Introdução.

Como foi visto no capítulo anterior, a Física caracterizou-se pela linguagem matemática e pelo teste experimental das hipóteses. Neste capítulo serão analisadas as ferramentas matemáticas usadas para descrever o movimento dos corpos.

O ramo da Física relacionado ao movimento é a Mecânica. Como movimento é um tema muito vasto, a própria Mecânica engloba quase toda a Física. Os físicos falam de várias Mecânicas. Neste capítulo será abordada especificamente a Mecânica Clássica.

O termo Mecânica Clássica é usado para a Mecânica construída ao longo dos séculos XVI e XVII. A construção matemática da Mecânica Clássica pressupõe duas coisas aparentemente óbvias:

- os corpos ocupam uma região específica do espaço
- o tempo flui da mesma forma por todo o Universo. Este é o conceito de tempo absoluto.

No séc. XX, duas "mecânicas"contrariaram estas hipóteses tão elementares. A Mecânica Relativística (mais conhecida como Teoria da Relatividade) postulou que o tempo não fluía uniformemente pelo Universo. Já a Mecânica Quântica (também conhecida como Física Quântica) nega a ocupação específica de um corpo no espaço. As teorias quântico-relativísticas combinam as duas mecânicas e negam as duas hipóteses.

A Mecânica Clássica não descreve uma série de situações envolvendo o Universo em pequena e grande escala. Para partículas próximas à velocidade da luz ou regiões onde existe grande aglomerado de matéria (como em buracos negros) é necessário usar a Mecânica Relativística. Já em sistemas onde as distâncias são muito pequenas, é preciso usar a Mecânica Quântica.

Alguns autores falam de superação da Mecânica Clássica. Mas em contextos onde as velocidades não são próximas a da luz, nem há proximidade com os aglomerados de matéria e nem há distâncias muito próximas, a Mecânica Clássica descreve matematicamente muito bem os movimentos observados. Por exemplo, corpos humanos e animais, deslocamentos de seres vivos e automotores, estabilidade de construções arquitetônicas e quase todos os movimentos (e repousos) que se observaram na crosta terrestre e em nosso cotidiano são descritos por modelos da Mecânica Clássica. É fundamental estudar a Mecânica Clássica. Ela não está superada.

Há um ramo da Mecânica Clássica que se ocupa da descrição matemática dos movimentos sem levar em conta o que está se movendo: a Cinemática. Por exemplo, a massa do corpo, sua composição química, sua cor, sua textura e outras propriedades não são objeto de estudo da cinemática. O termo cinemática vem da raíz grega *kine*. Esta mesma raíz está presente na palavra cinema, uma alusão ao movimento da imagem.

Neste capítulo será discutido um movimento bastante simples: o movimento de um corpo pontual restrito a uma reta.

Muitos estudantes têm a impressão que a Física descreve apenas situações idealizadas sem nenhuma relação com o "mundo real". Um corpo pontual em uma reta é um exemplo desta idealização. À primeira vista, pode até parecer paradoxal, mas há uma profunda ligação entre modelos idealizados e descrições realísticas. É o princípio reducionista, que jaz sob o método científico, fazendo parte de sua raiz.

O primeiro passo da Física e das ciências em geral para descrever um fenômeno ou sistema é dividi-lo em partes mais simples. Por exemplo, o movimento de um corpo extenso pode ser dividido no movimento de seus infinitos pontos. Outro exemplo é a descrição sobre algum tipo de átomo partindo-se de seus componentes básicos: prótons, neutrons e elétrons. O processo de divisão de um sistema complexo em partes simples é denominado "análise". O termo análise tem origem grega, onde o prefixo "ana"indica negação ou completo e "lise"significa parte. Assim, a análise consiste em dividir completamente um problema em "partes simples", onde cada "parte simples não tem partes menores. A ana-lise é a "ausência de partes".

A descrição matemática da Física consiste em partir de modelos simples para complexos. Embora não existam corpos pontuais, os corpos reais podem ser descritos como um conjunto de infinitos pontos. Além disso, movimentos não retilíneos podem ser descritos como uma combinação de movimentos retilíneos.

2.1 Números reais.

Para determinar a posição de um número em uma reta ou um instante no tempo, é necessário usar números reais. A massa de um corpo também é um número real. Todas as grandezas da Mecânica são derivadas destas três grandezas (posição, tempo e massa). Embora o leitor já tenha obtido a noção de número real no ensino médio, é interessante revisar alguns conceitos pertinentes de outro ponto de vista.

2.1.1 Números naturais

Há seres na natureza que existem em unidades. Por exemplo, seres humanos são indivíduos. Você pode contar seres humanos: um, dois, três, etc. O mesmo pode ser dito sobre gatos, células, mesas, cadeiras, etc. Em matemática, o conjunto numérico relacionado a estas contagens é o "conjunto dos números naturais".

A ausência de coisas pode ser identificada como o número zero. Por exemplo, se não há pessoas em uma sala, há 0 pessoas. É por isso que o zero é um número natural.

O símbolo do conjunto é **N**. É comum a representação dos naturais como:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

onde as reticências correspondem à progressão infinita.

Uma função fundamental entre números naturais é a "sucessão". Se n é um número natural, $n + 1$ é o sucessor de n. Assim a função sucessor pode ser escrita como:

$$suc(n) = n + 1$$

O sucessor de 0 é 1, o sucessor de 1 é 2, etc. Desta forma, partindo-se do zero e aplicando a operação sucessor repetida e infinitamente, chega-se a todos os números naturais.

- $suc(0) = 1$
- $suc(1) = 2$
- $suc(2) = 3$, etc.

A operação inversa do sucessor é o antecessor. Assim, se $n + 1$ é o sucessor de n, então n é o antecessor de $n + 1$. Matematicamente, o antecessor pode ser representado como:

$$ant(n) = n - 1$$

Abaixo, o exemplo da operação antecessor começando pelo número 3:

- $ant(3) = 2$
- $ant(2) = 1$
- $ant(0) \notin \mathbf{N}$

O menor número de coisas que se pode contar é zero. Se não há pessoas em uma sala, nenhuma pode ser retirada. Assim não existe antecessor do número zero. Em outras palavras, não existe um número natural do qual o zero seja sucessor.

Existe uma resposta matemática para o antecessor de 0: -1. Mas esta resposta não faz sentido no contexto da contagem de coisas. Por exemplo, se há 3 pedras em uma caixa, é impossível retirar 5. Embora a operação $3 - 5 = -2$ tenha sentido em outros contextos, o número -2 não é natural.

Além disso, entre dois números naturais consecutivos não há nenhum número natural. Por exemplo, não há número natural entre 0 e 1, entre 1 e 2, entre 2 e 3, etc. No contexto das contagens, não faz sentido falar de fração. Por exemplo, não existe fração de ser humano. Ao perder um dente de leite, uma criança não deixou de ser humana. Um cachorro que perdeu uma pata não se tornou uma fração de cão. A pata isolada de um cão também não é um pequeno cachorro. Duas metades de cadeira não formam necessariamente uma cadeira completa.

Há grandezas na natureza que não formam unidades. Por exemplo, o comprimento de algo não é uma unidade. Não há sentido na frase “este segmento tem dois comprimentos". Outras grandezas que não formam unidades são: área, volume, tempo, massa, etc. Como o leitor pode perceber, estas grandezas são fundamentais na Física. Grandezas que não formam unidades não são contadas, são medidas. Os números naturais são insuficientes para lidar com medidas físicas. O conjunto numérico que caracteriza as grandezas físicas é o "conjunto dos números reais".

2.1.2 Números reais e sua relação com os naturais.

Números reais são os números que podem ser representados em uma reta. Embora os números reais possam ser representados em qualquer reta, a representação mais usada é a reta horizontal. Neste caso a reta é denominada "reta dos reais".

Em primeiro lugar, há uma arbitrariedade em associar um número específico a um ponto específico da reta. Esta arbitrariedade desaparece ao se associar dois pontos distintos com dois números específicos. Por uma questão de facilidade, os dois pontos serão os números 0 e 1.

Há duas possibilidades ao se colocar os números 0 e 1 em uma reta horizontal: o 0 pode ficar à esquerda ou à direita do 1. Como a escrita latina é feita da esquerda para a direita, a convenção é colocar o 1 à direita do zero.

Como $1 > 0$, há um "sentido"que vai do zero para o um. O número que está à direita é maior do que está à esquerda. Os números maiores do que 1 deverão seguir o mesmo sentido. Por exemplo, o número 2 deverá estar à direita de 1 porque $2 > 1$. Analogamente, $3 > 2$, logo 3 estará à direita de 2. E assim por diante. Os naturais crescerão à direita do zero.

A ordem dos naturais na reta já está bem estabelecida, mas isso não basta. Há infinitos pontos à direita de 1 para colocar o número 2. Fixado o número 2, há infinitos pontos à direita de 2 para fixar o 3. E assim por diante. Esta segunda ambiguidade deve ser removida a fim de associar um único número a um ponto específico. Para remover a ambiguidade, é necessário colocar a distância entre um número e seu sucessor como sendo a mesma distância entre 0 e 1. Desta forma, dos infinitos números à direita de 1, há apenas um único ponto com a mesma distância zero-um. É este ponto específico que será identificado com o número 2. Um procedimento análogo será usado para fixar o 3 e assim por diante.

Todos os números naturais podem assim ser representados na reta. Assim, os números naturais também são reais. Em linguagem matemática, o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números reais:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$$

onde **R** é o símbolo do conjunto dos números reais.

Embora todos os números naturais sejam reais, nem todo número real é natural. Há infinitos pontos na reta que não podem ser identificados com nenhum número natural. Por exemplo, nenhum ponto à esquerda de zero é contemplado com um número natural. Além disso, somente alguns pontos específicos são contemplados à direita de zero. Entre um número natural n e seu sucessor $n+1$, não há nenhum número natural, mas há infinitos pontos entre eles. Por exemplo, há infinitos pontos entre 0 e 1 embora não há nenhum número natural entre eles. O mesmo pode ser dito entre 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4, etc.

Para os pontos à direita de zero, há um recurso que permite uma certa localização limitada. Se o ponto não corresponde exatamente a um número natural, ele está entre um número n e seu sucessor $n+1$. Por exemplo, um ponto que esteja à direita de 3 e à esquerda de 4 está localizado no intervalo $3 < x < 4$. Há infinitos pontos entre 3 e 4, mas é muito mais fácil localizar um ponto neste intervalo do que em toda a reta.

No contexto da localização de pontos na reta, aparece a necessidade de números que não são naturais. Estes outros conjuntos serão abordados a seguir.

2.1.3 Números inteiros.

Usando a contagem de objetos, a função sucessão consiste em acrescentar mais um objeto de uma coleção. Mas usando a reta dos reais, a função sucessão consiste em “pular"para o próximo número natural à direita. Por exemplo, o sucessor de 2 é 3 porque 3 é o próximo número natural à direita de 2.

Inversamente, a função antecessão consiste em retirar um de uma coleção. Na reta dos reais o antecesor é o próximo número que está à esquerda. Por exemplo, 2 é antecessor de 3 porque ele é o número imediatamente à esquerda de 3.

O antecessor de zero não tem sentido caso se esteja lidando com objetos. É impossível retirar um objeto quando não há nenhum. Mas na reta dos reais, o antecessor de zero tem pleno sentido. Há pontos à esquerda de zero. Surge um problema: dos infinitos pontos à esquerda de 0, qual será escolhido como o antecessor ?

Na reta dos reais, operação antecessor consistiu em retroceder a mesma distância entre 0 e 1. Por exemplo, o antecessor de 3 (2) está a mesma distância dos pontos 0 e 1. Então o antecessor de 0, -1, está à esquerda de zero, à mesma distância entre 0 e 1. Analogamente, o antecessor de -1, -2, está à esquerda de -1 com a mesma distância entre 0 e 1. Repetindo a função antecessão infinita e repetidamente, o conjunto extende-se à esquerda. O conjunto dos números naturais unido ao conjunto destes números obtidos a partir dos antecessores de zero é o conjunto dos números inteiros. O símbolo do conjunto dos inteiros é **Z**. É comum a representação dos números inteiros como:

$$\mathbf{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Com a operação sucessor é possível partir do zero e gerar todos os números naturais. Aplicando também a função antecessor no número zero são gerados todos os números inteiros.

A representação dos números inteiros preserva a ordem deles. Os números à direita são maiores do que os números à esquerda. Por exemplo, $-2 > -3$ e -2 está à direita de -3.

Os números maiores do que zero são classificados como positivos e os menores, negativos. Então o conjunto dos inteiros positivos coincide com os números naturais. Todo número natural é inteiro, mas nem todo o número inteiro é natural. Em linguagem matemática, o conjunto dos naturais está contido no conjunto dos inteiros,

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \quad .$$

É apenas no contexto dos números inteiros que faz sentido subtrair um número maior de um menor. É impossível e sem sentido retirar 7 litros de água de um balde onde há apenas 5 litros. Mas é perfeitamente viável que uma “formiga"que está no ponto 5 retroceda 7 posições e pare no ponto -2.

Os números inteiros não são suficeintes para cobrir todos os pontos da reta. Há infinitos pontos entre dois números inteiros. Por exemplo, há infinitos pontos entre -3 e -2. Ainda assim, o recurso de localizar pontos através de intervalos pode ser aplicado agora em toda a reta. Por exemplo, se o ponto está entre os números -3 e -2 ele pode ser “parcialmente"localizado no intervalo $-3 < x < -2$.

Muitos autores colocam o sinal + nos números positivos para ressaltar a dualidade positivo-negativo entre os números inteiros. Por exemplo, o número 2 é representado como +2. Neste livro não será usado o sinal + neste contexto. A ausência de sinal é suficiente para indicar que o número 2 é positivo.

2.1.4 Números racionais.

Apesar dos números inteiros não cobrirem todos os pontos da reta, eles servem de referência para os demais pontos.

Dividindo o segmento que liga os números 0 e 1 por 2 chega-se ao ponto $\frac{1}{2}$. Tomando a distância entre 0 e $\frac{1}{2}$ e formando uma espécie de "nova unidade"chegam-se aos múltiplos de $\frac{1}{2}$: $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$,$\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{2}$, etc. O primeiro ponto à direita de $\frac{1}{2}$ é $\frac{2}{2}$. A distância entre $\frac{2}{2}$ e $\frac{1}{2}$ é a mesma de $\frac{1}{2}$ e 0. O ponto $\frac{2}{2}$ coincide com o ponto 1. Como cada ponto é identificado com um número, os dois números são necessariamente iguais: $\frac{2}{2} = 1$. À direita de $\frac{2}{2}$ está o ponto $\frac{3}{2}$, cuja a distância com $\frac{2}{2}$ é a mesma entre 0 e $\frac{1}{2}$. O processo se repete infinitamente. A distância entre 0 e $\frac{1}{2}$ pode ser usada para encontrar um número à esquerda de 0: $-\frac{1}{2}$. O sinal negativo indica que o número é menor do que zero. Com a mesma distância acha-se à esquerda de $-\frac{1}{2}$ o número $-\frac{2}{2} = -1$. O processo pode repetir-se infinitamente à esquerda. O número de pontos que podem ser localizados aumentou consideravelmente, mas há ainda infinitos pontos sem número. Entre as frações $\frac{n}{2}$ e $\frac{n+1}{2}$ há infinitos números.

O segmento que liga 0 ao 1 pode ser dividido por 3. O primeiro ponto à esquerda de zero será $\frac{1}{3}$ e o segundo ponto $\frac{2}{3}$. A distância entre 1 e $\frac{2}{3}$ é a mesma do que entre 0 e $\frac{1}{3}$. Logo, $\frac{3}{3} = 1$. Com a mesma distância dos pontos

0 e $\frac{1}{3}$ são achados os pontos $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{7}{3}$, etc. À esquerda de zero, a mesma distancia pode ser usada para se encontrar a frações esquerda de 0: $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{3} = -1$, etc.

O mesmo procedimento pode ser feito com denominador 4, 5, 6, etc. O segmento entre 0 e 1 pode ser dividido infinitamente, e as frações podem cobrir cada vez mais pontos na reta dos reais. O conjunto de todas as frações possíveis (tanto positivas quanto negativas) é denominado “conjunto dos números racionais". O símbolo deste conjunto é **Q**.

Antes de prosseguir, é interessante explicar o conceito de razão. Razão é uma relação de números de alguma coisa por outra. Por exemplo, se 3 pessoas comem 2 pães, há uma relação de 3 para 2. Se a relação é mantida, 6 pessoas comeriam 4 pães Esta relação pode ser representada pela fração $\frac{3}{2}$. Como toda razão pode ser representada como fração, os números do conjunto **Q** são denominados números racionais.

É importante comentar dois denominadores especiais: 1 e 0. Dividir o intervalo entre 0 e 1 em uma única parte faz com que o primeiro ponto à direita de 0 seja o próprio número 1. Com a distância entre 0 e 1 chega-se a todos os números inteiros. Como $\frac{n}{1} = n$ (com n inteiro, inclusive $n = 0$), todos os números inteiros podem ser reescritos como fração. Então todo número inteiro é racional. O conjunto dos inteiros é subconjunto dos racionais.

$$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \quad .$$

O outro denominador, zero, não pode ser representado na reta. Toda a fração da forma $\frac{m}{n}$ pode ser multiplicada por n resultando no número m. No caso da fração $\frac{m}{0}$ seria necessário multiplicar por 0 para se chegar a m. Mas todo número multiplicado por 0 é o próprio 0. Se $m \neq 0$, o resultado do produto fica simultaneamente igual e diferente de zero. Reescrevendo em forma matemática:

$$\frac{m}{0} * 0 = m \quad , \quad \frac{m}{0} * 0 = 0 \Rightarrow m \neq 0 \bigwedge m = 0 \quad (absurdo) \quad .$$

Consequentemente as frações da forma $\frac{m}{0}$ com $m \neq 0$ não existem. A fração $\frac{0}{0}$ é diferente de $\frac{m}{0}$ para $m \neq 0$ embora ela também não exista. Reproduzindo o produto acima para $m = 0$:

$$\frac{0}{0} * 0 = 0 \quad . \tag{2.13}$$

Todo número multiplicado por zero é zero, portanto é impossível saber qual o número real que corresponde a $\frac{0}{0}$. Qualquer número real x satisfaz a equação $x * 0 = 0$. É por isso que $\frac{0}{0}$ é denominado “indeterminação". Enquanto $\frac{n}{0}$ não existe porque conduz à $1 = 0$, $\frac{0}{0}$ não conduz ao mesmo absurdo, mas ele pode ser substiuído por qualquer outro número que a relação 2.13 continua válida.

Entre um número inteiro e seu sucessor não existe nenhum número inteiro. Mas entre dois números racionais distintos há sempre infinitos racionais. Por exemplo, entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ há $\frac{5}{12}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{50}{101}$, $\frac{301}{900}$, etc. A representação de $\mathbf{Q}$ não pode ser uma sucessão de números como foi $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Z}$. A representação fica:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \surd m \in \mathbf{Z}; n \in \mathbf{N}^* \right\} \quad ,$$

onde o símbolo $*$ no conjunto $\mathbf{N}$ indica o conjunto dos naturais excluindo o número zero.

Os pontos da reta dos reais que correspondem aos números racionais cobrem toda a reta? Na Grécia Antiga, por volta de séc. V a.C., já se conhecia pelo menos um segmento que não podia ser medido através de frações. A diagonal de um quadrado de lado 1 mede $\sqrt{2}$. Não há nenhuma fração que ao quadrado dê 2. Assim o número $\sqrt{2}$ não é um número racional. No séc. XIX o matemático Cantor (...) concluiu que há infinitos pontos na reta real que não corresponde a nenhuma fração. Na verdade, entre dois pontos quaisquer da reta, há infinitos pontos que não podem ser representados por frações. Todo número racional é real, mas nem todo real é racional. Em linguagem matemática, o conjunto dos racionais está contido no conjunto dos reais.

$$\mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \quad .$$

Um número que corresponde a um ponto da reta que não pode ser representado por frações é denominado “número irracional". O “conjunto dos números irracionais"não costuma ser representado por nenhuma letra em particular. Geralmente ele costuma ser representado apenas por:

$$\mathbf{R} - \mathbf{Q} \quad ,$$

indicando que o conjunto dos irracionais é formado por todos os reais que não são racionais.

É comum que os livros de matemática tragam a relação entre os subconjuntos dos números reais:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \quad .$$

É possível encontrar frações infinitamente próximas a um número irracional. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é irracional. Como $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$ então $1 < \sqrt{2} < 2$. O número $\frac{3}{2}$ também está entre 1 e 2. Como $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$ então $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$, o que restringe o intervalo para encontrar $\sqrt{2}$ para $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$. A soma de 1 com $\frac{1}{3}$ resulta em $\frac{4}{3}$, está no intervalo entre média aritmética entre 1 e $\frac{3}{2}$.

Elevando $\frac{4}{3}$ ao quadrado chega-se a $\frac{16}{9} < 2$ então $\frac{4}{3} < \sqrt{2}$. O intervalo para encontrar $\sqrt{2}$ fica mais restrito: $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$. O processo pode ser repetido para pontos infinitamente próximos, sem que nunca se encontre exatamente o número $\sqrt{2}$.

Os números irracionais também podem ser representados por uma soma infinita de frações. O número $\sqrt{2}$ por exemplo pode ser escrito como

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{3!}\right)\frac{3!!}{2^3} - \left(\frac{1}{4!}\right)\frac{5!!}{2^3} + \left(\frac{1}{5!}\right)\frac{7!!}{2^4} - ...$$

onde os símbolo $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ e $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot n$.

2.1.5 Representação decimal dos números reais.

A representação decimal dos números reais é muito bem conhecida. A representação natural dos inteiros são os próprios inteiros. Os números racionais em geral são reescritos como soma de denominadores da forma 10^n. Os exemplos abaixo ilustram bem isso:

- $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5$
- $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{5}{10} = 1,5$
- $-\frac{5}{4} = -1 - \frac{1}{4} = -1 - \frac{25}{100} = -1 - \frac{20}{100} - \frac{5}{100} = -1 - \frac{2}{10} - \frac{5}{100} = -1,25$
- $\frac{33}{16} = 2 + \frac{1}{16} = 2 + \frac{625}{10.000} = 2 + \frac{600}{10.000} + \frac{20}{10.000} + \frac{5}{10.000} =$

$= 2 + \frac{0}{10} + \frac{6}{100} + \frac{2}{10.00} + \frac{5}{10.000} = 2,0625$

A soma finita das frações com denominador na forma 10^n não abrange todos os números racionais. Um exemplo simples é a fração $\frac{1}{9}$,

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + ... = 0,1111...$$

O algarismo 1 repete-se infinitamente. Outro exemplo é a repetição da sequência de algarismo 2 e 1 na fração $\frac{139}{33}$.

$$\frac{139}{33} = 4,212121...$$

A repetição infinita de um algarismo ou de uma sequência deles em um número decimal é chamada de dízima periódica. A sequência é denominada período. Todo número racional é representado por um número decimal com uma quantidade limitada de algarismos ou então é uma dízima periódica. Inversamente, todo número decimal com número finito de algarismos ou dízima periódica representa um número racional. A prova desta afirmação não será feita neste livro.

Existe uma representação prática para dízimas periódicas. Basta escrever uma barra encima do período. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0,3333... = 0,\overline{3} \quad , \\ \frac{1}{6} &= 0,166666... = 0,1\overline{6} \quad , \\ \frac{199}{99} &= 2,010101... = 1,\overline{01} \quad , \\ \frac{1}{7} &= 0,142857142857... = 0,\overline{142857} \quad . \end{aligned}$$

Com esta nova notação, as dízimas periódicas podem ser representadas com um número finito de algarismos. Então os números racionais, sejam dízimas periódicas ou não, podem ser representados com um número finito de algarismos.

Os números irracionais podem ser representados como uma soma infinita de frações. Então eles podem ser representados como uma soma infinita de frações com denominador múltiplo de 10,

$$\sqrt{2} \;=\; 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{1}{100000} + ...$$

$$\sqrt{2} = 1,41421...$$

Os números irracionais são representados por infinitos de algarismos, mas não há uma sequência que se repete infinitamente. Os números irracionais são dízimas não periódicas.

2.1.6 Reinterpretando o sinal negativo.

Geralmente o estudante do ensino médio interpreta o "sinal negativo"$(-)$ como indicação de que o número é negativo. No caso dos números reais, um número precedido pelo sinal $-$ é negativo. Caso o número não seja precedido pelo sinal $-$, ele é positivo. Mas para incógnitas, o sinal $-$ não garante que o número seja negativo. Por exemplo, se $x = -1$ o número $-x$ é positivo porque $-x = 1$.

O sinal negativo precisa ser reinterpretado. A reinterpretação passa pelas propriedades da soma de números reais. A soma de dois números reais pode ser zero. Em um par de números em que isso acontece, cada número é classificado como inverso aditivo do outro. Por exemplo, se $a + b = 0$, então a é o inverso aditivo de b e b é o inverso aditivo de a.

Para cada número real, há um único inverso aditivo. A prova desta unicidade é fácil, mas será omitida neste livro.

O sinal $-$ na frente de um número indica o inverso aditivo do mesmo. Assim o inverso aditivo de a é simbolizado por $-a$. O número -1 pode ser reinterpretado como o inverso aditivo de 1. Em outras palavras, -1 é o número que somado com 1 é zero: $(-1) + 1 = 0$.

É interessante notar que o inverso aditivo de 0 é o próprio 0 $(0 = -0)$. Isto se deve ao fato de $0+0 = 0$, ou seja, o número que somado com 0 resulta em zero é o próprio 0.

Se $-a$ é o inverso aditivo de a então a é o inverso aditivo de $-a$. Se a é o inverso aditivo de $-a$ ele pode ser simbolizado por $-(-a)$. Então:

$$
\begin{aligned}
-(-a)+(-a) &= 0=a+(-a) \quad , &(2.14)\\
-(-a) &= a \quad . &(2.15)
\end{aligned}
$$

Outra forma de escrever o inverso aditivo de a é multiplicando-o por -1. Para entender o pôrque, basta somar a com $(-1)a$ e verificar se a soma é zero,

$$a+(-1)a=(1+(-1))a=0a=0=a+(-a) \quad .$$

Então,

$$(-1)a=-a \tag{2.16}$$

Embora não se possa garantir que $a>0$ e nem que $-a<0$, é possível concluir com certeza que:

- se $a>0 \Rightarrow -a<0$
- se $a<0 \Rightarrow -a>0$
- se $a=0 \Rightarrow -a=0$

As identidades (2.15) e (2.16) produzem a famosa “regra de sinais"do ensino médio,

$$
\begin{aligned}
(-a)b &= (-1)ab=-ab \quad , &(2.17)\\
a(-b) &= a(-1)b=(-1)ab=-ab \quad , &(2.18)\\
(-a)(-b) &= (-a)(-1)b=(-1)(-a)b=-(-a)b=ab \quad . &(2.19)
\end{aligned}
$$

2.1.7 Módulo de um número real.

O termo distância em Geometria é sempre usado para associar um número real positivo a dois pontos. A distância entre um número qualquer e o número 0 é denominada módulo. O símbolo do módulo do número x é $|x|$.

No caso de um número positivo, o módulo do número é ele mesmo. Assim $|x| = x$ para $x > 0$. Por exemplo $|\frac{3}{2}| = \frac{3}{2}$.

A distância entre 0 e 0 é nula. Assim $|0| = 0$.

Representando um número e seu elemento inverso na reta dos reais, o par de números aparece à mesma distância do número 0. Por exemplo, a distância entre -1 e 0 está a mesma distância de 0 do que 1. Assim $|-1| = |1| = 1$. Analogamente, o número 0 está exatamente no caminho $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$, logo a distância entre $-\frac{3}{2}$ e 0 é a mesma do que entre $\frac{3}{2}$ e 0. Então $|-\frac{3}{2}| = |\frac{3}{2}| = \frac{3}{2}$. Em suma,

$$|x| = |-x| \tag{2.20}$$

Quando o número é negativo, o módulo é o elemento inverso aditivo. Por exemplo, $|-2| = 2 = -(-2)$. Em geral, o módulo é definido como

Assim o módulo sempre será positivo ou nulo: $|x| \geq 0$. A positividade do módulo permite escrever todo número positivo x como $|x|$ e os negativos como $-|x|$. Embora não se possa afirmar que x é positivo e $-x$ é negativo, é certo que $|x|$ é positivo e $-|x|$ é negativo.

Apesar da simplicidade do módulo, ele possui propriedades não triviais. Uma delas é chamada de desigualdade triangular.

Se ambos os números são positivos ou se ambos são negativos, a desigualdade acima torna-se a igualdade ($|a+b| = |a|+|b|$). Caso um dos números seja 0, a desigualdade também torna-se uma igualdade. Mas se um dos números é positivo e outro negativo, o módulo da soma é $|\,(|a| - |b|)\,|$. Caso um dos números seja zero, então as duas expressões se igualam ($|a| + |b| = |\,(|a| - |b|)\,|$). Provar esta relação foge dos objetivos deste livro, mas os exemplos a seguir deixam bem clara estas relações.

- Ambos positivos $|3 + 2| = |5| = 5 = 3 + 2 = |3| + |2|$
- Ambos negativos $|(-3) + (-2)| = |-5| = 5 = 3 + 2 = |3| + |2| = |-3| + |-2|$
- Um positivo e outro negativo $|3 + (-2)| = |1| = 1 = 3 + (-2) = |3| - |2| = |\,(|3| - |2|)\,|$
- Umpositivo e outro negativo$|(-3) + 2| = |-1| = 1 = 3 + (-2) = |3| - |2| = |-3| - |2| = |\,(|-3| - |2|)\,|$
- Um positivo e outro negativo$|3 + (-4)| = |-1| = 1 = |(|3| - |4|)| = |(|3| - |-4|)|$
- Um dos números é zero $|3+0| = |3| = 3 = 3+0 = |3|+|0| = |\,(|3| - |0|)\,|$

A relação (**??**) pode ser compactada na forma

A relação acima podem ser reescritas em função de seu valor máximo, $|a| + |b|$,

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad .$$

O módulo do produto é bem mais simples. Ele é igual o produto dos módulos.

$$|ab| = |a||b| \quad .$$

A prova da propriedade acima é simples, mas os exemplos abaixo são mais ilustrativos.

- $|2 \cdot 3| = |6| = 6 = 2 \cdot 3 = |2||3|$
- $|(-2) \cdot 3| = |-6| = 6 = 2 \cdot 3 = |2||3| = |-2||3|$
- $|(-2) \cdot (-3)| = |6| = 6 = 2 \cdot 3 = |2||3| = |-2||-3|$
- $|2 \cdot 0| = |0| = 0 = 2 \cdot 0 = |2||0|$

2.1.8 Distância entre dois pontos da reta espacial

Até agora falou-se de distância sem nenhuma definição prévia. A idéia intuitiva de distância é a associação de um intervalo na reta com um número positivo. De acordo com os matemáticos, a distância é um conceito mais geral. A distância entre dois elementos de um conjunto a e b (designada por $d(a, b)$) deve obedecer uma métrica. Métrica é o nome dado ao conjunto das 3 propriedades à seguir:

1. A distância entre um elemento e ele mesmo é zero ($d(a, a) = 0$) e a distância entre dois pontos distintos é um número positivo ($d(a, b) > 0$ se $a \neq b$).

2. A distância entre dois elementos não depende da ordem entre eles, ou seja, a distância de A até B é a mesma distância de B até A ($d(a, b) = d(b, a)$).

3. A soma das distâncias entre dois elementos e um terceiro é maior ou igual a distância entre os dois elementos ($d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$). Na linguagem popular, o caminho em linha reta de a até b é mais curto do que aquele que passa por um ponto c fora da reta. Esta relação é denominada "desigualdade triangular". Há razões geométricas para esta denominação que serão discutidas no próximo capítulo.

Como cada ponto da reta real é associado a um número real, é possível usar estes números para definir uma distância entre números reais. A distância entre dois números reais a e b é definida como

$$d_{AB} = |a - b| \quad . \tag{2.21}$$

Por exemplo, a distância entre $a = 5$ e $b = 3$ é 2, $d(5, 3) = |a - b| = |5 - 3| = |2| = 2$.

O conceito de módulo da posição é coerente com esta definição de distância. Módulo foi definido como a distância do ponto ao número 0. De acordo com a definição (2.21), $d(a, 0) = |a - 0| = |a|$.

A distância definida em (2.21) segue as 3 propriedades matemáticas da distância. Em primeiro lugar, a distância entre um número e ele mesmo é zero, $d(a, a) = |a - a| = |0| = 0$. A distância entre os pontos não depende da ordem entre eles, $d(a, b) = |a - b| = |b - a| = d(b, a)$.

Por exemplo, se $a = 5$ e $b = 3$, então $d(5, 3) = 2 = d(3, 5)$.

Entre 3 números números a, b e c, há uma relação interessante.

onde $[a, b]$ é o intervalo $a \leq x \leq b$. A união dos conjuntos (intervalos) é dada pelo símbolo $\cup$.

Assim, se o número c está entre a e b, a soma da distância de a até c mais de c até b é a distância de a até b ($d(a, b) = d(a, c) + d(b, c)$). Mas se c não está entre a e b, então a distância entre a e b é o módulo da diferença das distâncias entre estes pontos e c. Por exemplo, se $c = 4$, $a = 3$ e $b = 6$, o número c está entre a e b ($a \leq c \leq b$). Assim, a distância de a até b é a soma das distâncias entre a e c e entre c e b ($d(a, c) + d(b, c) = 1 + 2 = 3 = d(a, b)$). Invertendo as posições entre c e b ($c = 6$, $a = 3$ e $b = 4$), o número c fica fora do intervalo. Assim a distância entre a e b é o módulo da diferença das distâncias entre estes números e c ($|d(a, c) - d(b, c)| = |3 - 2| = |1| = 1 = d(a, b)$).

Como a distância do número c aos números a e b só pode seguir $d(a,b) = d(a,c) + d(b,c)$ ou $d(a,b) = |d(a,c) - d(b,c)| < |d(a,c) + d(b,c)| = d(a,c) + d(b,c)$. Logo $d(a,b) \leq d(a,c) + d(b,c)$, o que cumpre a desigualdade triangular.

2.1.9 Arredondamento

Usando a representação decimal para números racionais podem ser representados com um número finito de algarismos e os irracionais, não. Mas para armazenar informações sobre números reais na forma decimal seria necessário usar infinitos algarismos. Não se dispõe de nenhuma tecnologia para armazenar infinitas informações.

Uma situação ilustrativa é o problema de representar todos os números entre 0 e 1 (incluindo 0 e 1) com 21 informações disponíveis. Dividindo o intervalo entre 0 e 1 em vinte partes iguais (a informação do número 1 é extra), chegam-se aos pontos: 0, $0,05$, $0,10$, $0,15$, $0,20$, $0,25$, $0,30$, $0,35$, $0,40$, $0,45$, $0,50$,$0,55$, $0,60$, $0,65$, $0,70$, $0,75$, $0,80$, $0,85$, $0,90$, $0,95$ e $1,00$. Os números entre 0 e 1 podem ter um destes 21 valores e ficarem representados de forma exata. Por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ é igual ao número $0,50$. Mas os números entre 0 e 1 que não são exatamente um destes valores ficam em um intervalo entre eles. Por exemplo, a fração $\frac{9}{16} = 0,5625$ não corresponde a nenhum destes valores, mas ele está no intervalo entre $0,55$ e $0,60$. Já $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ está no intervalo entre $0,30$ e $0,35$. O número irracional $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071067811...$ fica entre os números $0,70$ e $0,75$.

Na prática a informação armazenada não é o par que limita o intervalo, mas apenas uma única informação. Neste caso é necessário usar a informação que mais se aproxima do número. Continuando com o exemplo anterior, a diferença entre $\frac{9}{16} = 0,5625$ e $0,55$ é de $0,5625 - 0,55 = 0,0125$. Já a diferença entre $0,5625$ e $0,60$ é de $0,5625 - 0,60 = -0,0375$. O módulo de $-0,0375$ é $0,0375 > 0,0125$, de modo que $\frac{9}{16}$ está mais próximo de $0,55$ do que de $0,60$. Assim a fração $\frac{9}{16}$ fica representada como $0,55$. Este procedimento é conhecido como "arredondamento". Analogamente, $\frac{1}{3}$ é arredondado para $0,35$ porque está mais próximo deste valor do que de $0,3$. Já $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071067811...$ pode ser arredondado para $0,70$.

A situação de ambiguidade ocorre para números que estão exatamente no ponto médio entre duas informações. Continuando com o exemplo anterior, o número $\frac{19}{40} = 0,475$ está no ponto médio entre $0,45$ e $0,50$ porque $0,475 - 0,45 = 0,025$ e $0,475 - 0,50 = -0,025$. Neste caso os dois arredondamentos são equivalentes: $0,45$ ou $0,50$. Há o costume de escolher o menor número. Neste caso, $\frac{19}{40}$ seria arredondado para $0,45$.

Geralmente, as informações armazenas são múltiplos de $0,1$, $0,01$, $0,001$, etc. Para estes casos, no ensino médio são ensinadas algumas "regras"de arredondamento nestes casos. Neste livro estas regras serão omitidas para que o estudante use o raciocínio lógico. Por exemplo, dividindo o intervalo entre 0 e 1 de modo que as informações sejam múltiplos de $0,001$, as informações ficam 0, $0,001$, $0,002$, $0,003$, ..., $0,997$, $0,998$, $0,999$ e $1,000$. Há 1001 informações armazenadas. Os três números acima $\frac{9}{16}$, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ e $\frac{19}{40}$ junto com $\frac{195}{400}$ ficam arredondados com outros valores. Eis os novos arredondamentos,

- $\frac{1}{3} = 0,\overline{3} \approx 0,333$ porque $\frac{1}{3}$ fica mais próximo de $0,333$ do que $0,334$
- $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071067811... \approx 0,707$ porque $\sqrt{\frac{1}{2}}$ fica mais próximo de $0,707$ do que $0,708$
- $\frac{19}{40} = 0,475$, o número não precisou ser arredondado porque a informa-

ção está exata

- $\frac{9}{16} = 0,5625$, pode ser arredondado para $0,562$ ou para $0,563$, mas se o arredondamento for o do menor número então $\frac{9}{16} \approx 0,562$

2.2 Posição de um corpo pontual em uma reta espacial

O problema tratado nesta seção é a localização de um corpo pontual em uma reta.

O corpo pontual localizado em uma reta ocupará um único ponto em cada instante de tempo. Se cada ponto da reta é associado a um número real, com um único número o corpo pontual é localizado.

No entanto a localização apresenta um problema. A associação entre números reais e pontos depende da associação de dois pontos distintos com os números 0 e 1. Se duas pessoas distintas associarem os números 0 e 1 a diferentes pares de pontos, a associação dos números reais com pontos muda completamente. Este problema será tratado nesta seção.

2.2.1 Unidades de comprimento.

Números são abstrações. Uma pessoa pode ter dois lápis, dois sapatos, dois cachorros, mas o número dois em si mesmo não está em lugar algum.

Entre as medidas, além do número, é necessário informar a unidade. A informação “2 canetas"é completa, mas falar de 2 comprimentos não faz sentido. Se um segmento mede 2, ele mede 2 alguma coisa. A mesma exigência de unidade pode ser extendida para tempo, massa, energia, etc.

(concepção alternativa sobre volume).

A necessidade de medir tamanhos de objetos é fundamental para a fabricação deles. Desde os tijolos de uma construção arquitetonica até circuitos microeletronicos dependem de padrões de medida para serem fabricados. Medir distânicas também é fundamental para a contrução de ferrovias, rodovias e todo o planejamento de transporte individual e coletivo. A agricultura depende de medidas de terreno. É da atividade agrícola que vem o nome "geometria", que em tradução livre significa "medida da terra".

Tamanho, comprimento, altura, profundidade e distância em geral correspondem à distância entre dois pontos. Para possibilitar o armazenamento de informação e comunicação das mesmas, o ser humano criou unidades de comprimento.

As primeiras unidades de comprimento surgiram com medidas do próprio corpo humano. Por exemplo, o palmo é distância entre as extremidades dos dedos polegar e mindinho quando a mão está esticada. A polegada, o pé e o cúbito também tem origem nas medidas do corpo humano. O inconveniente deste tipo de unidade é que cada ser humano tem seu próprio tamanho de mão, braço, pé, etc. Por exemplo, uma pessoa que tenha uma mão grande terá a unidade palmo diferente daquela com mão pequena. Não há padrão.

A solução adotada na Antiguidade foi usar as medidas relativas aos corpos de seus governantes. Por exemplo, o palmo deixava de ser relativo à mão individual e tornava-se um padrão correspondente a uma mão específica. Porém, quando o rei morria, o padrão ia embora junto. A solução foi construir barras de materiais não vivos com os comprimentos destas unidades. A informação sobrevivia à morte daquele que a inspirava. Estas barras podiam ser de madeira, metal ou pedra. Estas unidades ainda são populares nos países de língua inglesa.

Em 1792, a Academia de Ciências da França rompeu a tradição de unidades de comprimento corpóreas. A nova unidade estava baseada na distância entre o Pólo Norte e o Equador através de qualquer meridiano da Terra. A unidade não era muito prática porque a maioria das distâncias medidas na Terra eram menores (frequentemente muito menores) do que o novo padrão. Eles usaram como unidade de medida a fração 1/10000000 distância entre o Pólo Norte e o Equador através de qualquer meridiano da Terra. Esta unidade foi chamada de *metre* porque em grego *metron* significa "medida". Em português a unidade ficou "metro". O símbolo de metro é "m".

A mesma Academia de Ciências escolheu o metro como unidade de comprimento do Sistema Internacional de Unidades. O metro foi reproduzido em uma placa de platina iridiada que é guardada até hoje no Escritório Internacional de Pesos e Padrões em Paris. Após um longo desenvolvimento, o sistema de unidades francês deu origem ao Sistema Internacional (S.I.) de Unidades em 1960. O Brasil e quase o mundo inteiro aceitam o Sistema Internacional de Unidades. Apenas os Estados Unidos, Libéria e Mianmar rejeitam o Sistema Internacional por razões históricas e políticas.

Apesar da origem não corpórea do metro, a escolha a fração 1/10000000 da circunferência terrestre conduziu a uma medida próxima ao tamanho do corpo humano. Afinal, os franceses poderiam ter usado 1/20000000, 1/300000000 ou qualquer outra fração que estivesse na escala espacial cotidiana. Ao escolher 1/10000000 da distância pólo-equador, os franceses chegavam perto de uma unidade de distância retirada do corpo humano: a jarda (em inglês *yard*, simbolizada por "yd"). No séc. XII, o rei da Inglaterra Henrique I definiu a jarda como a distância entre a ponta de seu nariz quando ele olhava para um lado (por exemplo, o direito) e o polegar da mão do braço oposto extendido (se o lado é o direito, o braço é o esquerdo). A jarda é muito próxima do metro: $1m \approx 1,0936yd$.

Nos países de língua inglesa, a polegada (em inglês "inch") é calculada em metros como $in = 0,0254m$. Já o pé (em ingles "foot") equivale a 12 pés ($1ft = 12in = 0,3048m$).

Muitas unidades de medida que caíram em desuso há séculos, mas permanece em textos antigos. Este é o caso do côvado, definido como distância entre a ponta do dedo médio e o cotovelo. Alguns autores apontam que o côvado usado no Egito tinha cerca de $0,524m$. Mas o côvado hebraico e o caldeu eram diferentes.

É curioso citar uma algumas unidades de medida que não se baseiam no corpo humano, mas em distâncias percorridas pelo mesmo. Dois exemplos são a "milha"e a "légua". A milha é definida como a distância percorrida à pé em mil passos (de fato 2.000, já que se considera no caso, do latim, *mille passus* como sendo o movimento completo, das duas pernas). Nos países de língua inglesa, a milha equivale a $1.609///1.580m$. Já a légua é mais popular em países de língua portuguesa. Ela é definida como distância percorrida em uma hora à pé. Há várias definições de légua, mas todas elas giram em torno de $5.000m$.

A tabela abaixo traz algumas unidades de comprimento expressas em metros. Para cada unidade há a origem da mesma.

???????????????????????????

No séc. XX as unidades sofreram uma nova revolução. Os físicos substituiram as unidades baseadas nas distâncias entre dois pontos (sejam pontos no corpo humano, na Terra ou no espaço) por medidas que tivessem propriedades físicas "interessantes". Por exemplo, a velocidade da luz apresenta algumas propriedades singulares (que serão discutidas em outro volume do livro). A distância percorrida pela luz em um ano define a unidade de comprimento “anoluz". Um anoluz tem cerca de $9,4605284 * 10^{15}m$. Outra unidade muito usada em Astronomia é a Unidade Astronômica (simbolizada por U.A.). Ela é definida como a distância média entre o Sol e a Terra, sendo aproximadamente $U.A. = 149.597.870.000m = 1,49.597.87 * 10^{11}m$. Já o parsec (também usado em Astronomia) tem propriedades um pouco mais complexas. O símbolo de parsec é pc e $pc = 3,08568025 * 10^{16}m$ equivalendo a cerca de $3,2$ anos-luz.

O próprio metro foi redefinido no séc. XX. Atualmente o metro é definido como a distância percorrida pela luz em $\frac{1}{299.792.458}s \approx 3,33564095198 * 10^{-9}s$. Esta definição foi feita de modo que a velocidade da luz ficasse $299.792.458m/s$. Isso resolveu dois problemas. Em primeiro lugar, a Terra sofre variações de comprimento, alterando a fração 1/10000000 da distância pólo-equador. Ainda que esta variação na fração 1/10000000 da distância pólo-equador sejam desprezível, a unidade metro deve ser imutável por definição. Além disso, a barra iridiada que tem a informação do “metro"apresenta variações de comprimento (também desprezíveis). Ao ser aquecida, a barra se expande. Ainda que a uma taxa lentíssima, a barra também troca átomos com o ambiente através de reações químicas.

2.2.2 Múltiplos e submúltiplos de unidades de medida

Apesar do metro ser a medida padrão de distância, muitos problemas envolvem escalas muito diferentes. Distâncias percorridas por pessoas nas cidades chegam a milhares de metros. Já as distâncias entre células chegam a milhonésimos de metros. Os múltiplos e submúltiplos do metro são indicados por prefixos gregos ou latinos. Por exemplo, o prefixo “centi"significa “um centésimo"e é simblozado pela letra “c". Assim o centímetro é um centésimo de um metro e é representado como cm ($1cm = 10^{-2}m$). Segue abaixo uma tabela com os prefixos usados para se obter múltiplos e submúltiplos de qualquer unidade:

Prefixo	Fator multiplicativo	Símbolo
deca	10	da
deci	10^{-1}	d
hecto	10^{2}	h
centi	10^{-2}	c
quilo	10^{3}	k
mili	10^{-3}	m
mega	10^{6}	M
micro	10^{-6}	μ
giga	10^{9}	G
nano	10^{-9}	n
tera	10^{12}	T
pico	10^{-12}	p
peta	10^{15}	P
femto	10^{-15}	f
exa	10^{18}	E
atto	10^{-18}	a
zetta	10^{21}	Z
zepto	10^{-21}	z
yotta	10^{24}	Y
yocto	10^{-24}	y

A tabela acima pode ser usada não apenas com o metro, mas com qualquer outra unidade de medida. Por exemplo, o kilograma (kg) possui o prefixo “quilo"(k). Assim, um quilograma equivale a 10^3 gramas ($kg = 10^3 g$). Analogamente, um milissegundo (ms) possui o prefixo “mili"(m). Então um milissegundo é um milésimo de um segundo ($ms = 10^{-3}s$).

Muitos múltiplos e submúltiplos de unidades são tão usados que recebem nomes especiais. No caso de medidas de espaço, um décimo de nanometro ($10^{-1}.10^{-9}m = 10^{-10}m$) recebe o nome de Angstrom, simbolizado por Å. O Angstrom é muito usado em escala atômica. Em escala nuclear o fentometro é muito usado ($fm = 10^{-15}m$), recebendo outro nome: fermi. Por coincidência, o fermi (homenagem ao físico nuclear Enrico Fermi) também começa com a letra “f"e é simbolizado por f.

2.2.3 Reta espacial.

A reta dos reais apresenta números puros. Não existe especificação da grandeza e nem da unidade. Basta posicionar os números 0 e 1 em dois pontos distintos da reta (com o número 1 à direita do 0) que cada um dos infinitos pontos da reta ficam associados a um único número real. Mas para construir a reta espacial é fundamental especificar algum tipo de unidade.

Assim como foi feito com a reta dos reais, a reta espacial será horizontal. Posteriormente a reta espacial será generalizada para vertical, frontal, etc.

Para “transformar"a reta dos reais em uma reta espacial começa-se escolhendo um ponto da reta espacial como origem do espaço, ou simplesmente “origem". Este ponto será designado pela letra O de origem. O papel da origem na reta espacial é similar ao número 0.

Além da origem, escolhe-se uma unidade de distância, um padrão, uma norma. Por exemplo, o “metro"usado no Brasil e em grande parte do mundo corresponde a um comprimento específico. Ao informar que o comprimento de algo é “um metro", alude-se a um comprimento único. Já o centímetro, o milímetro e o quilometro correspondem a outras unidades de distância.

Para começar localizando pontos na reta, a unidade de distância usada será o centímetro, simbolizado por cm. Caso o leitor não disponha de uma régua com escala em centímetros, basta ver a figura abaixo. O ponto que fica à direita da origem do sistema a uma distância de um cm será associado ao símbolo $1cm$. Na linguagem da Física, este ponto é a posição $1cm$ a partir da origem O. Assim como a origem do sistema é análogo ao número 0, a posição $1cm$ é análoga ao número 1. Mas há uma diferença profunda entre o número 1 e a posição $1cm$. Enquanto o número 1 pode ser associado a qualquer ponto à direita do 0, a posição $1cm$ corresponde a um único ponto à direita de O: aquele que está a uma distância $1cm$ de O.

(Acrescentar figura).

Para associar outras posições a pontos da reta espacial diferentes de 0 e $1cm$, o procedimento é análogo ao que foi feito com os números reais. A posição $2cm$ corresponde ao ponto que fica a uma distância de um cm da posição $1cm$ e está a direita de $1cm$ (não se deve confundir a posição com a distância). O ponto à direita de $2cm$ a uma distância $1cm$ deste é a posição $3cm$. O processo pode ser repetido para encontrar as posições $4cm$, $5cm$, $6cm$, etc. A posição $-1cm$ corresponde ao ponto que está a uma distância de um cm de O, mas está à esquerda da origem. De forma análoga, encontram-se à esquerda de $-1cm$ as posições $-2cm$, $-3cm$, $-4cm$, etc. A posição $\frac{1}{2}cm$ é aquela que fica a uma distância de metade de um cm à direita da origem. Com o mesmo procedimento associa-se uma posição a cada ponto da reta. Cada posição corresponde a um número real seguido da unidade cm. A origem está uma distância zero dela mesma, assim ela pode ser designada por $0cm$.

No lugar da unidade cm usada neste texto, poderia ser usada qualquer outra unidade. Por exemplo, unidade pode ser decímetro, simbolizada por dm. A distância dm corresponde a 10 segmentos alinhados com um cm cada.

As posições da reta podem ser reescritas através da unidade dm. O ponto à direita de O que está à uma distância dm é a posição $1dm$. De forma análoga ao que foi feito para cm, são encontradas as posições na reta das posições em unidade dm.

Sobrepondo as unidades cm e dm, observa-se que cada ponto da reta espacial fica aparentemente associado a duas posições distintas. Por exemplo, o ponto que fica a uma distância de $10cm$ à direita da origem O corresponde às posições $1dm$ e $10cm$. Assim $10cm = 1dm$. Seja qual for o ponto da reta espacial, a posição em termos de cm será o dez vezes a posição em unidade de dm. Por exemplo, $\frac{1}{2}dm = 5cm$.

O mesmo pode ser extendido a qualquer outra unidade u da forma $u = ncm$. Qualquer posição da reta espacial pode ser escrita em termos de qualquer unidade $u = ncm$. Por exemplo, a unidade dm equivale a $dm = 10cm$ $(n = 10)$.

Reescrever uma posição que está expressa em unidades em termos de outra é denominado "conversão de unidade". Se u e w são unidades quaisquer, a conversão de unidade pode ser expressa abaixo como $w = nu \Rightarrow u = \frac{w}{n}$.

Por exemplo, a posição $3dm$ pode ser reescrita em termos da unidade metro $m = 10dm$, $3dm = 3\frac{m}{10} = 0,3m$. Como já foi descrito, a origem pode ser designada como posição $0cm$. Reescrevendo-se a origem em uma unidade qualquer $u = ncm$ chega-se a $0cm = 0\frac{u}{n} = \frac{0}{n}u = 0u$.

Então, em qualquer unidade u a origem fica designada com o número real 0 $(0cm = 0u = 0dm = 0m = ...)$. Os físicos costumam omitir a unidade em que está escrita a origem e designar a posição simplesmente como 0. No entanto, não se deve confundir o número real 0 da reta dos reais com a posição 0 da reta espacial.

Em último lugar, é importante definir o módulo de uma posição. Para números reais, o módulo de um número foi definido como a distância entre este e o “zero". No caso da reta espacial, o módulo será a distância da posição até a origem. Para uma posição xu, onde u é uma unidade de comprimento qualquer e x é um número real, o módulo fica definido como:

onde a unidade espacial u poderia ser substituída por qualquer outra unidade. Por exemplo, $|2cm| = 2cm$, $|-3dm| = 3dm$, $|0,5m| = 0,5m$, $|0cm| = 0cm = 0$, etc.

A reta espacial poderia ser construída de forma que a posição $1cm$ ficasse à esquerda da origem. Neste caso, as posições positivas ficariam à esquerda e as negativas, à direita. É como se a reta espacial contruída logo acima fosse invertida ou sofresse uma rotação de 180^{O}.

A reta espacial não precisa ser horizontal. Tomando uma reta vertical, adotando o centímetro e atribuindo um ponto O à origem, a posição $1cm$ pode ser colocada acima ou abaixo. Caso a posição $1cm$ seja colocada acima, as posições positivas ficarão acima e as negativas, abaixo. Analogamente, em uma reta frontal qualquer a posição $1cm$ pode ser colocada à frente ou atrás da origem. No primeiro caso as posições positivas estarão à frente e no segundo caso, atrás.

Há uma convenção que para retas horizontais, as posições positivas ficam à direita. Já para retas verticais, a convenção atribui as posições positivas acima da origem. Enfim, para retas frontais, as posições positivas ficam à frente. Esta convenção só não é usada em problemas bastantes específicos. O posicionamento de pontos em linhas não retilíneas será comentado no final da seção.

2.2.4 Relação entre origem e posição.

A localização de um ponto na reta espacial é escrita a partir da origem. Se a origem muda de lugar, todas as posições ficam reescritas. Para ilustrar esta situação, em uma reta espacial são nomeados 3 pontos distintos: A, B e C. A distância entre A e B é um cm e B está a direita de A. Analogamente, a distância entre C e B é um cm e C está a direita de B.

Se a origem for identificada com o ponto A, os pontos B e C ficam, respectivamente, com as posições $1cm$ e $2cm$. Mas se a origem for identificada com o ponto B, os pontos A e C correspondem às posições $-1cm$ e $1cm$. Enfim, se a origem está no ponto C, as posições de A e B são respectivamente $-2cm$ e $-1cm$. A tabela abaixo resume estas infirmações.

Pontos	Origem em A	Origem em B	Origem em C
A	$s_A = 0$	$s_A = -1cm$	$s_A = -2cm$
B	$s_B = 1cm$	$s_B = 0$	$s_B = -1cm$
C	$s_C = 2cm$	$s_C = 1cm$	$s_C = 0$

Assim, a posição do ponto depende da origem, enquanto o “lugar"que o ponto ocupa é independente daquela. Por exemplo, o mesmo ponto A pode ter posições 0, $1cm$ ou $2cm$. Para distinguir o ponto em si mesmo de sua posição usa-se letra s_A. No caso acima, $s_A = 0$ ou $s_A = 1u$ ou $s_A = 2u$.

Há uma relação que permite saber a posição de um ponto em relação a uma origem a partir de outra. Consideram-se duas origens designados por $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}\hat{}\prime$. Colocando a origem em $\mathcal{O}$, a posição de $\mathcal{O}\hat{}\prime$ é dada por $s_{\mathcal{O}\hat{}\prime}$. Naturalmente, a posição da origem $\mathcal{O}$ em relação à origem $\mathcal{O}$ é $s_{\mathcal{O}} = 0$. Um ponto A tem posição s_A em relação a $\mathcal{O}$ e s'_A em relação a $\mathcal{O}\hat{}\prime$ que chamamos referencial linha. Através do desenho abaixo, é possível calcular a relação entre s_A e s'_A $s_A = s'_A + s_{\mathcal{O}\hat{}\prime}$

(colocar desenho).

Assim, para saber a posição linha a partir da primeira origem, isola-se s'_A,

$$s'_A = s_A - s_{\mathcal{O}\hat{}\prime} \quad . \tag{2.22}$$

É importante notar que esta relação é válida tanto para $\mathcal{O}\hat{}\prime$ à direita de $\mathcal{O}$ como à esquerda.

Retomando o exemplo anterior, se a origem estiver em A ($\mathcal{O} = A$), as posições em relação a esta origem são $s_A = 0$, $s_B = 1cm$ e $s_C = 2cm$. Se a origem estiver em B ($\mathcal{O}\hat{}\prime = B$ e $s_{\mathcal{O}}\hat{}\prime = 1u$), a relação (2.22) indica que

- $s'_A = s_A - s_{\mathcal{O}\hat{}\prime} = 0 - 1cm = 0cm - 1cm = -1cm \quad ,$
- $s'_B = s_B - s_{\mathcal{O}\hat{}\prime} = 1cm - 1cm = 0cm = 0 \quad ,$
- $s'_C = s_C - s_{\mathcal{O}\hat{}\prime} = 2cm - 1cm = 1cm \quad .$

Os ítens acima concordam com a tabela (2.2.4).

Também é possível considerar primeiramente a origem em B e depois em A. Em outras palavras, $O = B$ e $O' = A$. Se a origem estiver em B, a posição de $\mathcal{O}\hat{}\prime$ (ponto A) é $s_A = -1cm$. Aplicando a relação 2.22 e tomando os dados da tabela 2.2.4 para a origem em B, chega-se às coordenadas dos pontos A, B e C na origem $\mathcal{O}\hat{}\prime$,

- $s'_A = s_A - s_{\mathcal{O}\hat{}\prime} = -1cm - (-1cm) = 0cm = 0,$
- $s'_B = s_B - s_{\mathcal{O}\hat{}\prime} = 0 - (-1cm) = 0u + 1cm = 1cm,$
- $s'_C = s_C - s_{\mathcal{O}\hat{}\prime} = 1cm - (-1cm) = 2cm.$

Os resultados acima concordam com a tabela (2.2.4) para a origem em A.

O leitor pode conferir como, a partir dos refenciais com origem em A ou em B, chega-se às posições dos pontos tomando a origem em C.

A situação fica mais complicada quando a origem for movel, ou seja, quando o ponto escolhido para a origem não for fixo. Esta situação será abordada posteriormente.

2.2.5 Distância entre dois pontos da reta espacial

A distância entre dois pontos de uma reta espacial é a associação de um intervalo na reta com um número positivo. Inspirado na definição (2.21), a distância entre dois pontos A e B da reta espacial é calculada como

$$d(s_A, s_B) = |s_A - s_B| \quad . \tag{2.23}$$

Como esta definição é análoga a (2.21), esta distância segue as 3 propriedades definidas pela métrica, $d(s_A, s_A) = 0$, $d(s_A, s_B) = d(s_B, s_A)$ e $d(s_A, s_B) \leq d(s_A, s_C) + d(s_C, s_B)$.

Por exemplo, a distância entre um ponto A localizado em $5cm$ e outro ponto B localizado em $3cm$ é $2cm$, $d(s_A, s_B) = |s_A - s_B| = |5cm - 3cm| = |2cm| = 2cm$.

É importante notar a diferença entre a distância entre números reais e entre pontos da reta espacial. No primeiro caso, a distância é adimensional, no segundo, ela tem dimensão espacial.

O conceito de módulo da posição é coerente com esta definição de distância. Módulo da posição foi definido como a distância do ponto à origem. De acordo com a definição (2.23) e levando em conta que a posição da origem é $s_{\mathcal{O}} = 0$, $d(s_A, s_{\mathcal{O}}) = |s_A - s_{\mathcal{O}}| = |s_A - 0| = |s_A|$.

A distância entre dois pontos definida em (2.23) independe do referencial. Em outras palavras, substuindo as posições s_A e s_B por s'_A e s'_B , a distância não se altera. Para provar esta afirmação basta substrair e somar $s_{\mathcal{O}^{\prime}}$, usando depois a relação 2.22,

$$
\begin{aligned}
d(s_A, s_B) &= |s_A - s_B| = |s_A - s_{\mathcal{O}\hat{}'} - s_B + s_{\mathcal{O}\hat{}'}| \\
d(s_A, s_B) &= |(s_A - s_{\mathcal{O}\hat{}'}) - (s_B - s_{\mathcal{O}\hat{}'})| \\
d(s_A, s_B) &= |s'_A - s'_B| \\
d(s_A, s_B) &= d(s'_A, s'_B)
\end{aligned}
$$

Para ilustrar esta independência, basta pegar os mesmos A e B com coordenadas $s_A = 5cm$ e $s_B = 3cm$ ($d(s_A, s_B) = 2cm$). Se a nova origem estiver no ponto $s_{\mathcal{O}\hat{}'} = 4cm$, a relação (2.22) faz com que $s_{A'} = s_A - s_{\mathcal{O}\hat{}'} = 5cm - 4cm = 1cm$ e $s_{B'} = s_B - s_{\mathcal{O}\hat{}'} = 3cm - 4cm = -1cm$. A distância entre os pontos neste novo referencial é $d(s'_A, s'_B) = |s'_A - s'_B| = |1cm - (-1cm)| = |2cm| = 2cm$.

A independência da origem motiva uma notação ligada aos pontos A e B, não às posições s_A e s_B. Assim a distância entre dois pontos fica redefnida como $d_{AB} = d(s_A, s_B) = d(s'_A, s'_B)$.

No caso de apenas dois pontos, é interessante medir a distância entre eles colocando a origem em um dos pontos. Isso porque se a origem estiver em um dos pontos, a distância entre o ponto e a origem será o próprio módulo do outro ponto. Usando estes mesmos pontos como exemplo ($s_A = 5cm$ e $s_B = 3cm$), se a origem for colocada em $s_{\mathcal{O}\hat{}'} = 5cm$, então a relação 2.22 fornece $s'_A = 5cm - 5cm = 0cm = 0$ e $s'_B = 3cm - 5cm = -2cm$. A origem foi colocada em A e a distância ficou o módulo da posição B: $d_{AB} = |s'_A - s'_B| = |0 - 2cm| = |2cm| = |s'_B|$.

2.2.6 Deslocamentos entre duas posições.

Quando um corpo pontual desloca-se em uma reta da posição A para a posição B, o deslocamento é dado pela variação das posições final (B) e inicial (A),

$$\Delta s_{AB} = s_B - s_A \quad . \tag{2.24}$$

Por exemplo, o deslocamento da posição $s_A = 5cm$ para $s_B = 7cm$ é $\Delta s_{AB} = 7cm - 5cm = 2cm$. Já o deslocamento de $s_B = 7cm$ para $s_C = -3cm$ é $\Delta s_{BC} = -10cm$.

O deslocamento não depende da origem do espaço. Mudando a origem de $\mathcal{O}$ para $\mathcal{O}\hat{}\prime$ chega-se ao resultado

$$\begin{aligned}
\Delta s'_{AB} &= s'_B - s'_A = (s_B - s_{\mathcal{O}\hat{}\prime}) - (s_A - s_{\mathcal{O}\hat{}\prime}) \quad , \\
\Delta s'_{AB} &= s_B - s_{\mathcal{O}\hat{}\prime} - s_A + s_{\mathcal{O}\hat{}\prime} = s_B - s_A \quad , \\
\Delta s'_{AB} &= \Delta s_{AB} \quad .
\end{aligned}$$

Por exemplo, usando as mesmas posições $s_A = 5cm$ e $s_B = 7cm$ e colocando a origem no ponto A $(O' = A)$ então $s'_A = s_A - s_{\mathcal{O}\hat{}\prime} = 5cm - 5cm = 0$ e $s'_B = s_B - s_{\mathcal{O}\hat{}\prime} = 7cm - 5cm = 2cm$. Assim $\Delta s'_{AB} = s'_B - s'_A = 2cm - 0 = 2cm = \Delta s_{AB}$.

Se $s_B > s_A$ o deslocamento é positivo. Já se $s_A > s_B$, o deslocamento é negativo. Enfim, se $s_A = s_B$, o deslocamento é nulo.

- $\Delta s_{AB} > 0$ se $s_B > s_A$
- $\Delta s_{AB} < 0$ se $s_B < s_A$
- $\Delta s_{AA} = 0$

Por exemplo, usando $s_A = 5cm$ e $s_B = 7cm$, então $s_B > s_A$ e $\Delta s_{AB} = 2cm > 0$. Já usando $s_B = 7cm$ e $s_C = -3cm$, então $s_B < s_C$ é $\Delta s_{BC} = -10cm < 0$. Enfim, se o deslocamento é de A para A, então $\Delta s_{AA} = s_A - s_A = 5cm - 5cm = 0$.

Na reta das posições, se o deslocamento é positivo, o corpo moveu-se da esquerda para a direita e a posição aumentou. Já se o deslocamento é negativo, o movimento ocorreu para a esquerda e a posição diminuiu.

O deslocamento entre duas posições é anticomutativo. Em outras palavras, trocando a posição inicial pela final e vice-versa, troca-se o sinal do deslocamento,

$$\Delta s_{AB} = s_B - s_A = -(s_A - s_B) = -\Delta s_{BA} \quad .$$

Usando ainda o exemplo das posições $s_A = 5cm$ e $s_B = 7cm$, $\Delta s_{BA} = s_A - s_B = 5cm - 7cm = -2cm$ e $\Delta s_{AB} = 2cm = -(-2cm) = -\Delta s_{BA}$.

Caso sejam feitos dois deslocamentos sucessivos, o deslocamento final será a soma dos dois deslocamentos. Em outras palavras, um deslocamento de A para B seguido de outro deslocamento de B para C equivale a um único deslocamento de A para C,

$$\begin{aligned}
\Delta s_{AB} + \Delta s_{BC} &= (s_B - s_A) + (s_C - s_B) \quad , \\
\Delta s_{AB} + \Delta s_{BC} &= s_B - s_A + s_C - s_B = s_C - s_A \quad , \\
\Delta s_{AB} + \Delta s_{BC} &= \Delta s_{AC} \quad . \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Por exemplo, para as mesmas posições $s_A = 5cm$, $s_B = 7cm$ e $s_C = -3cm$, os deslocamentos entre os 3 pontos ficam: $\Delta s_{AB} = 2cm$, $\Delta s_{BC} = -10cm$ e $\Delta s_{AC} = s_C - s_A = -3cm - 5cm = -8cm$. A soma dos deslocamentos sucessivos de A para B e de B para C é igual ao deslocamento de A para C:$\Delta s_{AB} + \Delta s_{BC} = 2cm + (-10cm) = -8cm = \Delta s_{AC}$.

2.2.7 Precisão dos instrumentos de medida de posição e erro experimental. O exemplo da régua e o problema do corpo pontual.

Há vários tipos de instrumentos de medida de distância. Para ilustrar a medida e o erro correspondente, será descrito a medição da posição em uma reta espacial através de uma régua.

As réguas tradicionais do Brasil são formadas por barras de plástico com pouco mais de $15cm$. Nesta barra está representada parte de uma reta espacial onde a unidade escolhida é o centímetro. O segmento de reta limita-se ao intervalo entre as posições 0 e $15cm$. Há números marcando as posições onde um número inteiro é seguido de $1cm$: 0, $1cm$, $2cm$, $3cm$,...,$14cm$ e $15cm$. Cada intervalo de um centímetro está dividido em 10 graduações iguais. Assim, as distâncias estas duas graduações é de $0,1cm = 10^{-1}10^{-2}m = 10^{-3}m$. Na tabela de prefixos e fatores (2.2.2), o fator $mm = 10^{-3}m$ é associado ao prefixo “mili"(símbolo m). Assim a medida $10^{-3}m$ pode ser representada por mm e é chamada de milímetro. Então $0,1cm = 1mm$. Como $15cm = 150mm$, ao todo há 150 graduações partindo do 0. Caso seja incluida a posição $15cm$, há 151 graduações. Em resumo, qualquer posição entre 0 e $15cm$ será identificada com uma das 151 informações da régua.

Um físico hipotético quer medir a posição de um corpo esférico com diâmetro menor do que $1mm$ em uma reta espacial entre as posições 0 e $15cm$. Esta medida será anotada em um pedaço de papel. Em uma linguagem, a informação será armazenada no pedaço de papel.

O físico tratará este corpo como um ponto material, ou seja, o corpo será considerado pontual. Para medir a posição do corpo pontual, o físico deve sobrepor a régua a esta reta, colocando o número 0 da régua na origem da reta. O número que indicado na régua que estiver sob o ponto será a posição do corpo pontual na reta.

Há uma problema nesta medida: o físico está atrubuindo uma única posição para um corpo que ocupa infinitos pontos no espaço. A solução é considerar que a posição do corpo pontual é o centro deste corpo. O centro será um único ponto, mas surge um novo problema. Visualmente, não é possível localizar o centro do corpo. Um dos pontos do corpo será tomado como centro, o que introduz um erro. O erro pode ser considerado pequeno, mas ele existe.

Por exemplo, se o corpo aparece sobre a marcação de $5cm$, o físico poderá atribuir ao ponto a posição de $5cm$. Se o corpo está sobre a terceira graduação após $6cm$, o ponto terá a posição $6,3cm$. A situação se complica quando um ponto não está sobre em uma das 151 informações da régua. Por exemplo, se centro do corpo está exatamente na posição $8,627cm$, o físico verificará apenas que o ponto está entre as posições $8,6cm$ e $8,7cm$. A régua mostra que o corpo está no intervalo entre $8,6cm$ e $8,7cm$, mas não indica em qual das infinitas posições entre estes dois pontos se encontra o corpo. Caso o físico precise anotar a medida, ele terá que escolher $8,6cm$ ou $8,7cm$. Ele poderá achar que o ponto está mais próximo de $8,6cm$ e anotar esta posição. Ao contrário, o físico pode achar que o ponto está mais próximo de $8,7cm$ e anotar esta outra posição. Se o físico achar que o ponto está bem no meio, ele erra ao anotar $8,65cm$ como indicação da régua. A régua não permite dizer que o ponto está bem no meio. A opinião do físico deve ser substituída pela informação do instrumento. Este é um dos princípios basilares da Física e de todas as ciencias experimentais. A leitura de um instrumento de medida contem erros, mas ainda assim ela é mais confiável do que uma opinião humana, um palpite. Através da régua, o físico jamais descobrirá que o centro do ponto está na posição $8,627cm$.

É muito importante que o físico anote não apenas a medida, mas também a precisão do instrumento. No caso da régua tradicional, cada posição estará entre dois pontos com distância de $1mm$ entre eles. Assim a precisão do instrumento é de $1mm$. Por exemplo, um corpo que esteja na posição $8,627cm$ será anotado ou como $8,6cm$ ou como $8,7cm$, ou seja, em um intervalo de $0,1cm = 1mm$. Se a posição for anotada como $8,6cm$, o erro terá sido de $0,027cm = 0,27mm$. Já se a posição anotada foi $8,7cm$, o erro foi de $-0,073cm = -0,73mm$. O erro não poderá exceder $1mm$ porque a régua não indicará que o corpo está fora deste intervalo.

A anotação da posição não precisa vir escrita exatamente como a posição seguida da precisão. Por exemplo, o físico não precisará escrever "$s = 8,6cm$ com precisão de $1mm$". Na linguagem da física, a precisão é incluída através da informação máxima extraída da régua, nem mais informação e nem menos. Por exemplo, matemáticamente, $8,6 = 8,60 = 8,600 = ...$, mas a régua só indica que $s = 8,6cm$. Ao escrever $s = 8,60cm$, o físico estaria subendendo que a precisão da régua chega a $0,01cm$. Assim o último algarismo indica qual a precisão do intrumento. Por exemplo, se o corpo pontual foi localizado na posição $5cm$, o físico não poderá escrever simplesmente $5cm$. Há nove gradações entre $5cm$ e $6cm$ e a localização do ponto está indicada em $5cm$ sem nenhuma outra gradação. Então a posição do ponto é $5,0cm$ indicando que a régua permite afirmar que o ponto não está nas posições $5,1cm$ e nem em $4,9cm$.

Por mais que se aumente a precisão da régua, não se pode afirmar jamais a posição exata de um corpo na reta. Para ilustrar a afirmação, o físico hipotético mediu a posição de um corpo como $5,2cm$. Após usar uma régua com precisão de $0,01cm$, a nova medida foi $5,21cm$. Aumentando a precisão para $0,001cm$ a posição ficou $5,210cm$. Com um novo aumento de precisão, o físico mediu $5,2100cm$. O físico fica tentado a achar que o corpo está extamente na posição $5,21cm$. Mas nada impede que para uma precisão de $0,0001cm$ o físico encontre uma posição de $5,21001cm$ ou mesmo $5,20999cm$. E mesmo que o físico encontre $5,21000cm$ ele nada pode afirmar sobre os algarismos posteriores.

Este exemplo da régua fornece dois princípios que podem ser generalizados para qualuqer instrumento de medida:

- todo instrumento tem uma precisão limitada, portanto, toda medida tem um erro em relação ao sistema medido.
- a leitura de um instrumento de medida inclui a medida em si e a precisão do instrumento através do último algarismo anotado.

É necessário fazer algumas observações em relação ao erro. Em primeiro lugar, o erro sempre depende da escala do problema. Por exemplo, em Física Atômica, um erro de $1mm$ é inaceitável. Um átomo tem um diâmetro da escala de Angstrons $\text{Å} = 10^{-10}m$. Se um elétron desloca-se em $1mm$ sua energia variou muito e ele pode ter migrado de um átomo para outro. Mais precisamente, o elétron pode ter saltado por milhões de átomos. Já um erro de $1mm$ para localizar uma casa em um mapa não faz sentido. Uma casa por ter desde alguns metros de largura. Se uma pessoa estacionou o carro a $1mm$ à frente do que o GPS indicou, certamente ela não perdeu a casa de vista.

Outra observação importante é que a precisão não é necessariamente um múltiplo de $0,1$, $0,01$, $0,001$, etc. Por exemplo, uma régua pode ter precisão de $0,5mm = 0,05cm$. Neste caso, um corpo pontual jamais teria posição medida em $8,62cm$. A posição seria $8,60cm$ ou $8,65cm$.

2.2.8 Posicionamento em linhas não retilíneas.

O movimento de qualquer corpo pode ser descrito em uma "linha". Esta linha pode ser retilínea ou não. Uma linha retilínea é parte de uma reta espacial. Seguindo os procedimentos descritos anterioremente, cada ponto desta linha retilínea fica associado a uma posição. Mas há situações onde a linha não é retilínea. Por exemplo, a trajetória de uma bola de futebol no espaço pode ser descrita quase como uma parábola. O movimento de um carro em uma estrada só pode ser retilíneo se a própria estrada for retilínea. Como associar posições a linhas não retilíneas?

Em primeiro lugar, será considerado o caso das linhas abertas. Por exemplo, uma parábora e uma estrada são linhas abertas. Assim como em uma reta, um dos pontos da linha é associado à origem $\mathcal{O}$. Um dos lados da linha é escolhido como sentido positivo. Para fins práticos, o sentido positivo será escolhido como o lado da linha imediatamente à direita. Adotando-se o centímetro como unidade de medida, "caminhando"pela linha, o ponto atingido após um caminho de comprimento de $1cm$ é a posição $1cm$. De modo análogo ao que foi feito na reta espacial, todos os outros pontos ficam associados a posições. Se a linha tem comprimento menor do que 1 centímetro, a unidade de distância deve ser substituída por outra unidade menor.

Nas estradas do Brasil, as posições são anotadas em placas e a unidade "quilômetro"precede o número. A origem da estrada não é representada por 0 ou por $0km$, mas por $km - 0$. (lê-se "quilômetro zero"). Analogamente, a posição $s = 1km$ é descrita na placa como $km - 1$ (lê-se "quilômetro um"). E assim sucessivamente. O "quilometro zero"fica em um dos extremos da estrada, de forma que não é necessário anotar "posições negativas". Caso a estrada seja extendida para "aquém"do "quilometro zero", os projetores das estradas não usam posições negativas. Ao invés disso, eles mudam o nome da estrada e contam as posições a partir de uma outra origem.

Surge um problema geométrico. A distância entre dois pontos será o comprimento da linha reta que une estes dois pontos ou corresponderá à fórmula (2.23)? Apenas no caso da linha retilínea, o comprimento da linha reta que une estes dois pontos e a fórmula (2.23) coincidem. Em linguagem matemática, há "duas métricas", duas formas distintas de se calcular a distância. A métrica adotada dependerá do problema. Por exemplo, o gasto de combustível de um veículo dependerá do comprimento percorrido no caminho. Neste caso, a relação do gasto de combustível estará relacionado à fórmula (2.23). Para ilustrar o que se está dizendo, se a distância em linha reta entre duas cidades é $50km$ e o comprimento da estrada, $70km$, o gasto de combustível é relativo à $70km$. No caso de um explosão de um caminhão de combustível em um ponto da estrada, a distância dos pontos atingidos pela onda de pressão, calor e os estilhaços dependerão da distância em linha reta. A onda de pressão se propagará esfericamente, não seguindo a estrada.

Além da ambiguidade de métricas, há um problema físico. No próximo capítulo ficará claro que a descrição de movimentos não-retilíneos envolve algo chamado de "aceleração centrípeta".

O caso de linhas fechadas ou que cruzam a si mesmas é mais complicado. O caso de linha fechada mais simples é a circunferência. Supõem-se que a cicunferência apresenta-se à frente e tenha um diamêtro de várias centímetros. Qualquer ponto pode ser escolhido como a origem, mas por convenção adota-se o ponto da extrema direita. Como não há pontos à esquerda, adota-se o sentido positivo como o anti-horário. Caminhando no sentido positivo e fazendo uma volta completa, reencontra-se a origem. Surge uma ambiguidade: a origem ficará associada a duas posições distintas? Caso se procure por posição negativas (por exemplo, a posição $-1cm$), partindo da origem no sentido horário, serão reencontradas as mesmas posições positivas achadas anteriormente. A solução deste problema não será feita no presente capítulo.

O problema da métrica na curva fechada é um pouco mais complicado. Usando ainda o exemplo da circunferência, a métrica pode nem sequer existir. Por exemplo, se forem atribuidas duas posições a um único ponto (por exemplo, duas posições à origem) a fórmula(2.23) indica que a distância entre um ponto e ele mesmo poderá ser diferente de zero. Neste caso, os matemáticos falam que não pode ser definida uma distância. Não há métrica. Evitando associar duas posições ao mesmo ponto, ainda há ambiguidade de métrica. A distância entre dois pontos distintos pode ser o comprimento do segmento de reta que liga os pontos, o comprimento do arco que une os dois pontos no sentido anti-horário (fórmula (2.23)) ou ainda o comprimento do arco que une os pontos no sentido horário. É o problema que determinará qual das três métricas será usada.

2.3 A flexa do tempo.

O tempo e o espaço são as duas estruturas onde e quando tudo ocorre. Na relatividade espaço e tempo afetam-se mutuamente, formando o espaço-tempo. Mas na Mecânica Clássica, espaço e tempo permanecem separados.

Os corpos físicos ocupam o espaço. É possível “desenhar"o espaço e descreve-lo através da geometria. Já o tempo não pode ser desenhado. O recurso que se usa é representar o tempo em uma reta, analogamente ao que foi feito com a reta espacial. Deste ponto de vista, o tempo tem uma única dimensão.

O espaço tem 3 dimensões, mas neste capítulo será analisada apenas a localização em uma reta, que tem uma dimensão. Assim, se o movimento é retilíneo, o espaço e o tempo tem ambos uma única dimensão.

2.3.1 Unidades de tempo e os calendários.

As primeiras unidades de tempo surgiram quando o homem observou o céu de maneira sistemática. O tempo que os astros percorriam no céu foram as primeiras unidades de tempo. Ao contrário do que aconteceu com as unidades de medida, o homem não tomou seus ciclos corpóreos como medida do tempo.

Todos as pessoas que vivem na superfície da Terra vêem o próprio planeta em repouso. O céu aparece com envolvendo a Terra. A descrição do céu onde a Terra é tomada como o centro do Universo é denominada "geocentrismo". As primeiras unidades de tempo nascem neste contexto geocêntrico. Filósofos gregos pitagóricos da Antiguidade (por volta do séc. III a.C.) e alquimistas árabes e persas da Idade Média propuseram uma descrição onde o Sol era o centro do Universo. Esta nova descrição é denominada "heliocentrismo". No séc. XV o astrônomo e clérigo alemão Nicolau de Cusa (1401-1464) reapresentou o modelo heliocêntrico na Europa Ocidental. Já no XVI, outro astrônomo e clérigo defendeu o heliocentrismo em um livro "Das revolucões das esferas celestes": o polonês Nicolau Copérnico (1473-1543). Paradoxalmente, o combate empreendido contra o livro de Copérnico o tornaram mais famoso que seus predecessores.

No modelo geocêntrico, o dia é o tempo decorrido entre o nascer e o por do Sol. Inversamente, a noite é o intervalo de tempo entre o por e o nascer do Sol. Quanto maior é o dia, menor é a noite e vice-versa. Nas estações do verão e primavera, os dias são mais longos que as noites. Já nas estações do inverno e do outono, as noites são mais longas. O dia e a noite variam, mas a soma destes dois períodos temporais é constante[1]. O conjunto do dia e da noite também recebe o nome de dia. Assim a palavra dia é ambígua: tanto pode significar o período que o Sol está no céu quanto o ciclo completo em que o Sol nasce, morre e renasce. Neste livro, o termo dia significará o período completo, salvo menção contrária.

Na interpretação geocêntrica, o dia é o tempo que a Terra demora para dar uma volta em torno de si mesma.

O Sol sempre nasce no leste e se põe no oeste. Mas a trajetória que o Sol percorre no céu não é sempre a mesma. Esta trajetória é chamada de "eclíptica". Há uma variação cíclica da eclíptica no sentido norte-sul. Na descrição geocêntrica, o período que o Sol leva para completar o ciclo dos deslocamentos da eclíptica no sentido norte-sul é denominado "ano". Na interpretação heliocêntrica, ano é o tempo necessário para que a Terra de uma volta em torno do Sol. Ainda na descrição heliocêntrica, a eclíptica é o plano que contém o Sol e a trajetória da Terra.

O dia do ano que a trajetória do Sol encontra-se mais ao sul é 21 de dezembro. A trajetória que o Sol faz no céu neste dia é chamada de "Trópico de Capricórnio Celeste". A projeção do trópico de Capricórnio na Terra é o "Trópico de Capricórnio". O Trópico de Capricórnio intercepta o Brasil, incluindo a cidade de São Paulo. A trajetória solar que se encontra mais ao

[1] De fato, aproximadamente constante.

norte é o “Trópico de Câncer Celeste", ocorrendo no dia é 21 de junho. A projeção terrestre do “Trópico de Câncer Celeste"é o “Trópico de Câncer". O Brasil não é cortado pelo “Trópico de Câncer". Os dias 21 de dezembro e 21 de junho são denominados solstícios.

Há dois dias no ano em que o dia (no sentido de período em que o Sol está no céu) é igual à noite. Estes dias são 21 de março e 23 de setembro[2]. A trajetória que o Sol faz no céu nestes dois dias é denominada “Equador Celeste". A projeção terrestre do Equador Celeste é o Equador (ou linha do Equador). O Equador corta o Brasil na cidade de Belém do Pará. Os dias 21 de março e 23 de setembro são denominados equinócios.

Quando no hemisfério norte é verão, no hemisfério sul é inverno e vice-versa. Já quando é primevera no hemisfério sul, norte é outuno e vice-versa. O dia 21 de março é chamado de “equinócio do outono"no hemisfério sul e “equinócio da primavera"no hemisfério norte. Inversamente, o dia 23 de setembro é chamado de “equinócio do outono"no hemisfério sul e “equinócio da primavera"no hemisfério norte. Analogamente, o “soltício de verão"no hemisfério norte ocorre no mesmo dia do “solstício de inverno"no hemisfério sul: 21 de junho. Enfim 21de dezembro é o “soltício de verão"no hemisfério sul e “solstício de inverno"no norte.

Os solstícios e equinócios foram reinterpretados na visão heliocêntrica. Atualmente, os solstícios são considerados os pontos onde os trópicos (terrestres) cruzam a linha que liga o centro do Sol ao centro da Terra. O que antes era um dia inteiro, tornou-se um horário específico de um determinado dia. Algo similar ocorre na redefinição dos equinócios. Os equinócios são considerados os pontos onde o Equador cruza a linha que liga o centro da

[2]Estas datas são aproximadas, podendo variar cerca de um dia para mais ou para menos

Terra ao do Sol. Estes dias podem ser posteriores ou anteriores aos dias 21 de dezembro e 21 de junho. Por exemplo, o solstício de inverno no hemisfério sul (solstício de verão no hemisfério norte) em 2013 ocorrerá no dia 21 de junho, às $05:04$ no horário de Brasília. Já o equinócio de primavera no hemisfério sul em 2013 (equinócio de outono no hemisfério norte) em 2013 ocorrerá no dia 22 de junho, às $20:44$.

Os solstícios da nova definição e o centro do Sol fazem parte de uma única reta. Os equinócios e o centro do Sol também pertencem a uma única reta. Estas duas retas são perpendiculares entre si.

Dia e ano são períodos relacionados ao Sol. Já o mês é o tempo aproximado que a Lua leva para dar uma volta em torno da Terra. Esta definição de mês é válida tanto para a descrição geocêntrica como heliocêntrica.

Todas as civilizações do mundo procuraram relacionar dia, mês e ano. As relações entre estas três unidades de tempo não são exatas. Isso conduzia os antigos a determinar datas erradas para o início das estações. Este erro conduzia ao plantio e à colheita prematuras ou atrasadas. O resultado final era a fome. Por exemplo, na Mesopotâmia, o mês era contado como tendo 30 dias e o ano como 365 dias. O ano era dividido em 12 meses (360 dias) e 5 dias. Estes dias que sobravam não eram contados dentro de nenhum mês. Provavelmente, é por isso que a circunferência é dividida em 360 graus. Os egípcios notaram que a cada 4 anos o ano começava com um dia de atraso. O ano então passou a ser contado como 365 dias e um quarto de dia. A cada 4 anos acrescentava-se um dia extra para compensar o erro. Atualmente, o ano do dia extra é chamado de bissexto porque tem 366 dias (dois algarismos 6). No calendário gregoriano (usado no Brasil e em quase todo o mundo) os anos bissextos sempre são múltiplos de 4.

O calendário gregoriano foi criado em 1582 por um grupo de astrônomos convocados pelo Papa Gregório VIII (-). O grupo estimou o ano em $365,2425$ dias. Apesar de $365,2425 \approx 365,25$, considerar $365,25$ dias introduzia um erro anual de $365,25 - 365,2425 = 0,0075$ dia. A cada 400 anos acumulava-se um erro de $0,0075 \cdot 400 = 3$ dias. O erro acumulado pelo calendário juliano desde a cruxificação de Cristo foi calculado em aproximadamente 11 dias. O Papa Gregório decretou que após a quinta-feira do dia 4 de outubro de 1582 viria a sexta-feira do dia 15 de outubro. Para que o erro não se acumulasse novamente, a solução foi eliminar os dias extras dos anos seculares (múltiplos de 100, portanto, múltiplos de 4) que não fossem múltiplos de 400. Tomando tal procedimento, a cada 400 anos deixa-se de contar 3 dias, corrigindo o calendário. Por exemplo, 2000 foi um ano bissexto, mas 2100, 2200 e 2300 não foram.

Como o ciclo lunar é muito mais fácil de observar do que o ciclo solar, muitos calendários do mundo contam o ano com um número exato de meses e o mês com um número exato de dias. Um mês tem aproximadamente $29,53059$ dias. Assim, um ano tem aproximadamente $12,3682763$ meses. O calendário árabe-islâmico conta cada mês como tendo 29 ou 30 dias. Dois meses islâmicos sucessivos ficam com $29+30 = 59$ dias, o que é aproxidamente dois ciclos lunares ($59,06118$ dias). O um ano islâmico tem exatamente 12 meses, ou seja, apenas 354 dias. A diferença entre o ano islâmico e o ano solar é de mais de 11 não sendo introduzida nehuma correção. Assim, os solstícios e equinócios mudam de data a cada ano islâmico. O calendário islâmico é lunar. Nos calendários hebraico e chinês, os meses também têm entre 29 e 30 dias, mas periodicamente eles introduzem dias ou até meses extras para que os solstícios e equinócios voltem a cair na mesma data. Devido a estas correções, estes calendários são classificados como lunissolares. Há muitos outros calendários no mundo, mas a descrição deles foge dos objetivos deste livro.

O calendário gregoriano e todos aqueles que se baseiam exclusivamente nos ciclos solares (dia e ano) classificados como "calendários solares". O mês no calendário gregoriano não é um ciclo lunar completo, mas um período.

Os meses do calendário gregoriano procedem do juliano. No calendário juliano, o mês deixou de ser contado como o ciclo lunar exato, mas como um período que dura entre 28 e 31 dias. Para distinguir o mês do calendário juliano do ciclo lunar, este último é chamado de "mês lunar". No calendário juliano, o mês tem exatamente 12 meses.

A semana é um período de 7 dias. A principal hipótese é que a semana era o originalmente o ciclo de cada fase lunar. Como o mês lunar tem quatro fases lunares, cada fase dura aproximadamente $7,3826475$ dias. Ainda não há consenso entre os pesquisadores, sobre a origem lunar da semana, mas esta unidade de tempo é documentada há milênios.

(figura solstício e equinócio).

Dias, meses e anos eram inadequados para medir o tempo em escalas menores. Uma das primeiras unidades de tempo menor do que o dia foi a hora. Não há consenso da origem da hora, mas sabe-se que ela surgiu no Egito. Após alguma evolução que será omitida neste livro, uma hora foi definida como $\frac{1}{24}$ de uma dia. Em outras palavras, o dia tinha 24 horas. O sistema de numeração babilônica era hexadecimal, dando destaque ao número 60. Os babilonios definiram o minuto como $\frac{1}{60}$ hora. Assim, uma hora tinha 60 minutos. Enfim, os babilônios dividiram o minuto em 60 partes: o segundo. Os símbolos atuais para hora, minuto e segundo são respectivamente h, min

e s. Assim $1h = 60min = 3600s$. Um dia têm $86.400s$ ou $1.440min$.

[concepção alternativa].

No ano de 1852, a Academia de Ciências escolheu o segundo como unidade de tempo do Sistema Internacional de Unidades. Como a Terra apresenta pequenas variações em sua rotação, o segundo foi redefinido como o tempo que dois pontos no Equador que tenham uma distância de $\frac{1}{86.400}$ do comprimento do Equador vêem o horário de meio-dia. Esta distância é de aproximadamente $462,962m$.

O segundo definido no séc. XIX ainda continha uma imprecisão porque a rotação da Terra apresenta irregularidades. No séc. XX, o segundo deixou de ser definido em função de ciclos astronômicos e foi redefinido em função de um ciclo atomico. Na Conferência Geral de Pesos e Medidas de 1967, o segundo foi definido como o período para que o átomo de Césio realize 9.192.631.770 transições entre os dois estados hiperfinos de menor energia.

Na mesma Conferência, o minuto foi redefinido como $60s$ e a hora, $3600s$. Estas redefinições parecem ser repetições das definições anteriores, mas não é este o caso. Se a hora é definida como $\frac{1}{24}$ de um dia, o dia sempre terá exatamente $24h = 1.440min = 86.400s$. Fica impossível medir qualquer irregularidade na rotação terrestre. Mas se o segundo, o minuto e a hora são definidos em função dos ciclos do átomo de Césio, o dia pode não ter exatamente $86.400s$ e as irregularidades aparecem facilmente.

Os físicos usam muito os submúltiplos do segundo para descrever fenômenos microscópicos. As unidades de tempo mais usadas são o milissegundo ($1ms = 10^{-3}s$), o microssegundo ($\mu s = 10^{-6}s$), o nanossegundo ($ns = 10^{-9}s$) e o picossegundo ($1ps = 10^{-12}s$). Por exemplo, uma transição hiperfina nos dois estados de menor energia do Césio dura por definição $\frac{1}{9.192.631.770}s$. Fazendo a aproximação $\frac{1}{9.192.631.770}s \approx \frac{1}{10.000.000.000}s = 10^{-10}s = 10^2 ps$, a transição tem aproximadamente uma centena de picossegundos. Utilizando os prefixos da tabela 2.2.2 é possível construir outras unidades de tempo com múltiplos e submúltiplos do segundo.

As unidades de tempo de 10 anos, 100 anos e 1.000 anos são mais usadas por historiadores ou para descrever fenômenos astronômicos. No lugar de se usar os termos “decaano", “hectoano"ou “quiloano", usam-se respectivamente “década", “século"e “milênio".

2.3.2 A Flexa temporal

A construção da flexa temporal será análoga à da reta espacial. O termo mais popular para a reta temporal é “eixo do tempo", ou ainda, "flecha do tempo". No entanto, o termo reta temporal será mantido para reforçar as analogias com a reta espacial.

A flexaa temporal será representada na direção horizontal, assim como a reta dos reais. Um ponto da reta temporal é escolhido como origem do tempo, ou simplesmente “instante inicial". Este ponto será designado pela letra $\mathcal{O}$ de origem, mesmo símbolo usada para origem do espaço. O papel da origem na reta temporal é similar à origem da reta espacial e ao zero dos números reais.

Além da origem, escolhe-se uma unidade de tempo, um padrão, uma norma. Por exemplo, a unidade pode ser o segundo. O tempo $1s$ é colocado à direita da origem. Os demais procedimentos para associar um ponto da reta temporal com um tempo são os mesmos usados para a reta espacial. Um ponto qualquer da reta temporal é denominado “instante".

Continuando com a analogia com a reta espacial, o segundo poderia ser substituido qualquer por outra unidade temporal. A unidade segundo pode ser “convertida"para qualquer outra unidade u da forma $u = ns$. Qualquer posição da reta espacial pode ser escrita em termos de qualquer unidade $u = ns$.

Se u e w são unidades temporais quaisquer, a conversão de unidade temporal pode ser expressa abaixo como

$$w = nu \Rightarrow u = \frac{w}{n} \quad .$$

Por exemplo, os instantes da reta temporal podem ser reescritas através da unidade (min). Usando $u = s$ e $w = min$ então $n = 60$ ($min = 60s$). Por exemplo, o intante $90s$ pode ser reescrito como $90s = 90 * \frac{1}{60}min = 1,5min$.

Há uma grande desvantagem nas unidades minuto e hora em relação aos múltiplos usados para a unidade espacial “metro". Os múltiplos e submúltiplos mais usados do metro são produtos da base 10. Dividir por 10^p (p inteiro) é um procedimento bastante simples na numeração decimal. No entanto, dividir ou multiplicar por 60 na numeração decimal não é tão simples, conduzindo a dízimas periódicas. Por exemplo, $1s = \frac{1}{60}min = 0,01666...s = 0,01\overline{6}s$.

Caso se use o valor exato $1s = \frac{1}{60}min$, a conversão de segundos para minutos só será exata para instantes múltiplos de $3s$. Por exemplo, $3s = 0,05min$, $6s = 0,1min$, $9s = 0,15min$, etc. Caso contrário, o intervalo em minutos será uma dízima periódica: $2s = 0,0\overline{3}s$, $4s = 0,0\overline{6}s$, $5s = 0,08\overline{3}s$. Caso se arredonde $1s$ para $0,0167$, os múltiplos de $3s$ ficarão errados, mas os demais valores serão arredondados sem dízima periódica. Por exemplo, $2s = 0,0334s$, $3s = 0,0501s$, $4s = 0,0668s$, $5s = 0,167s$, etc.

Assim como na reta espacial, a origem fica designada com o número real 0 qualquer unidade u ($0s = 0min = 0h = ...$). Os físicos também costumam omitir a unidade em que está escrita a origem do tempo e designar a instante simplesmente como 0. No entanto, não se deve confundir o número real 0 da reta dos reais, a posição 0 da reta espacial e o instante 0 da reta temporal.

Apesar das analogias, há diferenças profundas entre a reta temporal e a reta espacial. Em primeiro lugar, o tempo sempre desloca-se para “frente". É impossível lembrar do futuro ou alterar o passado. Por esta razão, muitos físicos não representam o tempo em uma reta temporal, mas em uma semirreta que começa na origem $\mathcal{O}$. Tal procedimento implica em desprezar tudo o que ocorreu antes do instante inicial.

Apesar de frequentemente omitido, o tempo negativo tem um significado físico preciso. Os instantes negativos são aqueles que precedem o instante tomado como origem. Por exemplo, se um corpo desloca-se do ponto A para o ponto B em $2s$, o instante inicial pode definido como aquele em que o corpo chega à B. Neste caso o instante que o corpo estava no ponto A foi $-2s$. Caso o instante inicial seja considerado como aquele em que o corpo estava em A, o corpo cruzou o ponto B no instante $2s$.

Como os tempos negativos são frequentemente excluídos, não se define o módulo de um instante no tempo.

A flexa temporal poderia ser construída de forma que a posição $1s$ ficasse à esquerda da origem. Neste caso, os instantes positivos ficariam à esquerda e as negativos, à direita. É como se a reta temporal contruída logo acima fosse invertida ou sofresse uma rotação de $180^{\mathcal{O}}$. Mas ao contrário do que acontece na reta espacial, não é necessário construir a reta temporal desta maneira. Em uma reta espacial horizontal, um corpo pontual pode deslocar-se em dois sentidos. Já na reta temporal, o deslocamento ocorre em um único sentido, tornando desnecessária a representação invertida.

Assim como a reta espacial, a reta temporal não precisa ser horizontal. Como o tempo só se desloca em uma dimensão, o sentido positivo fica colocado de baixo para cima. Não é usual representar o tempo como uma reta frontal.

2.3.3 Relação entre origem e instante, intervalos de tempo e fluxo temporal

Algumas relações usadas para a reta espacial podem ser generalizadas para o tempo. Assim como na reta espacial, a “localização"de um instante na reta temporal é escrita a partir da origem. Se a origem muda de tempo, todos os instantes ficam reescritos. Mantendo a analogia com a reta espacial, o instante da origem, enquanto o “tempo"que o ponto temporal ocupa é independente. Para distinguir o ponto temporal A em si mesmo de seu instante usa-se letra t_A. Por exemplo, se A é a origem $t_A = 0$. Já se há ocorreu $30s$ após a origem, $t_A = 30s$.

Para calcular os instantes de um mesmo ponto temporal a partir de duas origens distintas repete-se o procedimento anterior. Consideram-se duas origens designadas por $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}\hat{}\prime$. Colocando a origem em $\mathcal{O}$, o instante de $\mathcal{O}\hat{}\prime$ é dada por $t_{\mathcal{O}\hat{}\prime}$. Um ponto temporal A tem instante t_A em relação à $\mathcal{O}$ e t'_A em relação à $\mathcal{O}\hat{}\prime$ referencial linha. A relação (2.22) pode ser extendida para o tempo,

$$t'_A = t_A - t_{\mathcal{O}\hat{}\prime} \quad . \tag{2.26}$$

Na reta espacial, se $s_B > s_A$, o deslocamento pode ocorrer de A para B e vice-versa. No entanto, na reta temporal a analogia não pode ser usada. Se $t_B > t_A$ então o deslocamento só pode ocorrer de A para B. Em contraste com o deslocamento espacial o deslocamento temporal (ou variação temporal) é definido como

Matematicamente, um deslocamento temporal negativo faz sentido, porém fisicamente não. Assim como o deslocamento espacial, a variação de tempo também não depende de onde é considerada a origem da reta temporal. A distância entre dois instantes não precisa ser definida como em (2.23) porque Δt_{AB} nunca é negativo.

2.3.4 Precisão dos instrumentos de medida temporal

A contagem do tempo começou com ciclos astronômicos. Para medir intervalos de tempo menores foram usados inicialmente "relógios de Sol". Nestes relógios, a sombra projetada em uma superfície indicava o dia e o ano. Através destes relógios calendários eram elaborados. O problema é que estes relógios não indicavam o tempo em ambientes fechados ou à noite.

[Colocar foto do relógio de Sol da USP].

Posteriormente, foram criados dispositivos que não estavam relacionados a um ciclo, mas em processos irreversíveis. Nas igrejas européias, as velas presentes na missa eram usadas como relógios. O tempo que a chama demorava para derreter a vela era proporcional ao tempo. Algumas velas apresentavam marcações similares à uma régua afim de indicar subdivisões de tempo. Os chineses usavam vasilhas com água. A água caia através de orifícios e movia mecanismos. O tempo que a água demorava para cair ficava indicado nestes mecanismos. Tais relógios tinham a desvantagem de precisarem de abastecimento após toda a água da vasilha escorrer.

[foto do relógio chinês].

O italiano Galileu Galilei (1564-1642) revolucionou a contagem de tempo apelando para um aparente retrocesso. Ele voltou a contar o tempo com ciclos, mas não eram ciclos astronômicos. Galileu usou o movimento de pêndulos, onde cada ciclo completo era associado à uma unidade de tempo. Foram criados mecanismos para que cada oscilação ficasse indicada no movimento de um ponteiro. Este aparato deu origem aos relógios de pêndulo.

Posteriormente foram criados relógios de corda. Uma tira metálica era esticada ao máximo através de um mecanismo acionado por uma minialavanca. Para relaxar, a mola movia-se e acionava um mecanismo ligado a um ponteiro. Externamente, o relógio de corda assemelhava-se ao de pêndulo, mas o movimento da tira metálica relaxando até repousar é similar ao escorrer da água dos relógios chineses. Após a mola ficar relaxada, o mecanismo parava. Era necessário “dar corda"no relógio para manter seu funcionamento.

Os primeiros relógios de pulso eram de corda. Posteriormente foram criados relógios digitais. Estes relógios continham um minicircuito elétrico alimentado por uma bateria. Um cristal (geralmente quartzo) acoplado ao circuito emitia pulsos em unidades bem definidas de tempo. Estes pulsos produziam alterações no circuito que eram indicadas em um marcador digital. Com pulsos da ordem de centissegundos (cs), estes relógios digitais foram uma revolução no séc. XX.

Muitas vezes, o que interessa não é a contagem da horário, mas apenas intervalos de tempo. No séc. XX foram criados os cronômetros. Os cronômetros indicavam tempo zero. Ao serem acionados, eles passam a contar o tempo. Assim o momento em que um cronômetro é acionado corresponde à origem da reta temporal ($t = 0$).

A partir de meados do séc. XX, os ciclos atômicos e nucleares passaram a ser usados como as novas unidades de tempo. Mecanismos complicados fazem com que estes ciclos sejam contados e exibidos em computadores ou em mostradores digitais. Atualmente eles são os relógios atômicos são os mais precisos do mundo.

Todo ciclo dura um intervalo de tempo e define uma precisão em um relógio. Analogamente a uma régua, os instantes de tempo marcados com um relógio ou um cronômetro serão detectados sempre com certo erro. Quanto menor a unidade de tempo, maior a precisão e menor o erro.

2.4 Funções

2.4.1 Plano cartesiano.

Um ponto da reta real pode ser identificado com um número real e vice-versa. Algo análogo ocorre com um plano. O plano em questão é denominado plano cartesiano e o conjunto dos pares de números reais é representado por $\mathbf{R}^2$.

O plano cartesiano é feito cruzando-se duas retas. Uma das retas é horizontal e a outra, vertical. Em cada uma das retas é contruída uma reta real com a seguinte relação entre elas

- o número 0 de ambas as retas devem coincidir com o mesmo ponto no espaço. Este cruzamento é chamado de "origem do plano cartesiano", representado pelo par $(0, 0)$.
- a distância entre 0 e 1 deve coincidir am ambas as retas.
- o sentido positivo na reta horizontal será o usual: esquerda para a direita. Já na reta vertical, o sentido positivo é de baixo para cima.
- o eixo horizontal (denominado "eixo das abcissas") é geralmente representado pela letra x e o eixo vertical ("eixo das ordenadas") é denominado geralmente por y. Neste caso, o plano é denominado xy. Os eixos

das abcissas e ordenadas podem ser representados por quaisquer letras minúsculas, desde que elas sejam diferentes entre si.

- Cada ponto do plano pode ser identificado com um par de pontos (x, y) onde x e y são as projeções do ponto nos eixos x e y. Inversamente, cada par ordenado de números reais (x, y) pode ser representado como um ponto no plano xy.

Os números reais x e y são chamados de coordenadas. No plano cartesiano, várias curvas geométricas podem ser representadas como equações de duas variáveis (x e y) e vice-versa.

Por exemplo, a equação

$$2x + 3y + 4 = 0 \tag{2.27}$$

tem infinitas soluções dadas por pares de pontos. Por exemplo, $x = 0$ e $y = -\frac{4}{3}$ é uma solução particular da equação. Assim, o par ordenado $(0, -\frac{4}{3})$ pode ser representado como um ponto no plano cartesiano. Outra solução é $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{5}{2}$, de modo que o ponto $(0, -\frac{4}{3})$ representa outra solução da equação. O conjunto de pontos (x, y) que resolvem a equação (2.27) forma uma reta no plano cartesiano.

Toda a reta no plano cartesiano será representada por uma equação do tipo

$$ax + by + c = 0 \quad , \tag{2.28}$$

onde a, b e c são números reais, onde a ou b devem ser diferentes de 0. No caso da reta acima, $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$. Inversamente, toda a equação do tipo $ax + by + c = 0$ representa uma reta.

A equação da reta permite até mesmo saber se a reta é horizontal ou vertical. Para retas horizontais, $a = 0$. Por exemplo, a equação $2y + 3 = 0$

tem como solução todos os pontos com $y = -\frac{3}{2}$ e x genérico. Já as retas verticais correspondem a $b = 0$. Se $a = b = 0$ e $c \neq 0$, não há nenhum par (x, y) que resolva a equação. O eixo x é descrito como $y = 0$ e o eixo y, $x = 0$. Por outro lado, se $a = b = c = 0$, qualquer par (x, y) do plano cartesiano satisfaz a equação. Assim, é fundamental impor $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Em um plano, duas retas podem ser iguais, concorrentes e paralelas. Dadas duas equações de retas, é possível como será a relação entre as retas. Por exemplo, as retas

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 5 &= 0 \quad , & (2.29) \\ -x + 3y + 4 &= 0 & (2.30) \end{aligned}$$

podem ser iguais entre si, paralelas distintas ou concorrentes. Se um único par ordenado satisfaça as duas equações, as retas se cruzam em um único ponto. Caso todos os mesmos pares ordenados satisfaçam as duas equações, as retas são iguais. Enfim, se não há solução, as retas não se cruzam. Resolvendo o sistema acima através da multiplicação de (2.30) por 2 e a soma das equações

$$\begin{aligned} 10y + 3 = 0 \Rightarrow y &= -\frac{3}{10} \\ -x + 3\left(-\frac{3}{10}\right) + 4 &= 0 \Rightarrow x = \frac{31}{10} \quad . \end{aligned}$$

A única solução comum é o par $\left(\frac{31}{10}, -\frac{3}{10}\right)$. Assim, existe um único ponto em que as retas se cruzam: $\left(\frac{31}{10}, -\frac{3}{10}\right)$. As retas são concorrentes.

As retas correspondentes às equações $x + 2y + 3 = 0$ e $2x + 4y + 6 = 0$ são iguais porque todas as soluções da primeira equação coincidem com as da segunda. Enfim, as equações $x + 2y + 3 = 0$ e $x + 2y + 4 = 0$ não tem nenhuma solução em comum, portanto, as retas são distintas e paralelas.

Outros exemplos de gráfico são as curvas parábola e circunferência. A equação que corresponde à parábola com simetria vertical é

$$ax^2 + bx + c + dy = 0 \quad ,$$

onde as constantes a, b , c e d são números reais. Já a parábola com simetria horizontal é da forma $ax^2 + bx + c + dy = 0$. Por exemplo, para a parábola $x^2 - 6x + 5 - y = 0$, algumas soluções são os pontos $(5, 0)$, $(6, 0)$ e $(\frac{11}{2}, \frac{9}{4})$.

Já a circunferência de raio R centrada na origem tem equação da forma

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad .$$

Por exemplo, a circunferência com raio $R = 1$ segue a equação $x^2 + y^2 = 1$. Algumas soluções para esta equação são os pontos: $(0, 1)$, $(1, 0)$,$(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$,$(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ e $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

2.4.2 Conceito intuitivo de função.

O conceito de função apresenta muitos detalhes. No contexto deste capítulo, é necessário dominar apenas um tipo de função: funções de uma variável real. O conceito não será apresentado em detalhes, mas apenas o suficiente para que o movimento em uma dimensão seja compreendido.

“Uma função de uma variável real é uma relação de um número real $x \in \mathbf{R}$ com um único número real $f(x) \in \mathbf{R}$". Geralmente ela é representada como $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Daqui em diante se falará apenas em função para significar “função de uma variável real", salvo menção contrária. A função $f(x) = 2x + 3$ ilustra bem o conceito.

O número 0 é real. Assim, $f(0) = 2 * 0 + 3 = 3$, que também é real. O único número relacionado ao 0 pela função $f(x) = 2x + 3$ é 3. Da mesma forma $f(\frac{1}{2}) = 2 * \frac{1}{2} + 3 = 4$, ou seja, o único número relacionado à $\frac{1}{2}$ pela função $f(x) = 2x + 3$ é 4.

O número x que será associado à outro é denominado "argumento da função". Outras letras podem ser usadas para representar o argumento da função, desde que a transformação seja mantida. Por exemplo, a função acima poderia ser representada por $f(y) = 2y + 3$.

Para ilustrar que a função será a mesma, basta usar os dois exemplos anteriores: se $y = 0$ então $f(0) = 3$ e se $y = 1$, $f(1) = 5$. Não é necessário que $x \neq f(x)$. Por exemplo, para $f(x) = 2x + 3$, $-3 = f(-3)$.

Em uma função, um número x é associado com um único número real $f(x)$. Isso exclui associar um número à dois outros. No entanto, dois valores da função podem ser associados ao mesmo valor da variável. A função $f(x) = x^2$ é um exemplo disso.

O número 1 está associado apenas ao 1 ($f(1) = 1^2 = 1$). Mas o número -1 também está associado apenas ao 1 ($f(-1) = (-1)^2 = 1$).

As funções em que valores distintos dos argumentos correspondem a valores distintos nas funções são chamadas de "injetoras". A função $f(x) = 2x+3$ é injetora porque para dois valores dintintos de x há dois valores distintos de $f(x)$. Já a função $f(x) = x^2$ não é injetora porque dois números distintos com o mesmo módulo (podendo ser representados por a e $-a$) serão associados ao mesmo número (no caso de a e $-a$ o valor é a^2).

Uma função que aparece muito em Física é a "função constante". Neste caso, o argumento não aparecerá do lado direito. Por exemplo, $f(x) = 4$.

No sentido usual da palavra "função", 4 não está em função de x porque não depende de x. Qualquer x está associado a 4. No entanto, no sentido matemático dado ao termo "função", um número real x está associado a um único número real, neste caso 4. Por exemplo, $f(0) = 4$, $f(1) = 4$, etc. Em geral, a função constante é representada como $f(x) = c$, onde c é um número real qualquer. Uma função constante que tem importância particular é $f(x) = 0$. Ela é conhecida como função nula.

Como todo número é igual apenas a si mesmo, a identidade também pode ser caracterizada como uma função. A "função identidade"é definida como

$$f(x) = x \quad . \tag{2.31}$$

Quando há mais de uma função em uma determinada oração, a notação $f(x)$ pode apresentar ambiguidade. Por exemplo, se $f(x) = 2x+1$ e $f(x) = x^2$ há duas funções distintas sendo representadas pela mesma letra f. Nestes casos, é importante usar outras letras minúsculas para representar as outras funções. Geralmente são usadas as letras g ou h. No exemplo citado, as funções poderiam ser representadas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$.

Assim como o argumento pode ser chamado de x ou representado por qualquer outra letra minúscula, a função também pode receber tal notação. É comum que se escreva $y = f(x)$ ou $x = g(z)$ ou $z = h(t)$, etc. Por exemplo, a função $f(x) = 2x + 1$ pode ser representada como $y = 2x + 1$. Representar o argumento e a função por duas letras minúsculas é útil para representar gráficos de função.

Embora o argumento possa ser alterado sem que a função o seja, há certas notações que podem causar ambiguidade. Por exemplo, se $f(y) = -\frac{3}{2}y - 2$ e $f(x) = -\frac{3}{2}x - 2$ sejam a mesma função, usar a notação $y = f(y)$ faria com que a função $f(x)$ se parecesse com a função identidade 2.31. Sempre que ocorrer uma relação do tipo $y = f(x)$ as letras usadas para representar o argumento x e a função $y = f(x)$ devem ser distintas.

As funções podem ser representadas através de gráficos em um plano cartesiano. O gráfico de uma função é representado pela curva formada pelos pares da forma $(x, f(x))$. A notação mais comum é usar o par (x, y) onde $y = f(x)$. Uma notação muito comum para este caso é (x, y) onde $y = y(x)$. A letra y representa tanto o número real como a função.

Por exemplo, a função $f(x) = 2x + 3$ pode ser representada em um gráfico. Alguns dos infinitos pontos da forma $(x, 2x + 3)$ são $(0, 3)$, $(\frac{1}{2}, 4)$, $(1, 5)$, $(-1, 1)$, $(-2, -1)$ e $(-3, -3)$. Os pontos formarão uma reta. Para perceber isso basta escrever $y = 2x + 3$ e colocar tudo no primeiro membro: $2x - y + 3 = 0$. Este é um caso particular da reta $ax + by + c = 0$ com $a = 2$, $b = -1$ e $c = 3$.

A função $f(x) = x^2$ é um caso particular de $ax^2 + bx + c + dy = 0$ para $a = 1$, $d = -1$ e $b = c = 0$. Portanto, o gráfico da função $f(x) = x^2$ é uma parábola.

Por outro lado, há funções que representam parte de uma curva, mas não a curva em sua totalidade. Por exemplo, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ tem todos os seus pontos obdecendo a equação da circunferência com raio 1 centrado na origem, $y = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$.

No entanto, a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \geq 0$ não pode representar a parte inferior da circunferência, apenas a superior. A função que representa a parte inferior da circunferência é $f(x) = -\sqrt{1 - x^2} < 0$.

Há um critério para interpretar se uma curva de um plano cartesiano xy representa uma função $y = f(x)$ ou não. Uma reta vertical no plano xy intercepta apenas um ponto da curva. Para cada x há apenas um ponto com coordenadas $(x, y(x))$. Caso a reta vertical intercepte dois pontos, há dois valores de y para um valor de x, descaracterizando a função.

Depois destes exemplos, fica fácil ver que toda função pode ser representada por uma curva no plano cartesiano, mas o inverso não é verdadeiro. Por exemplo, a função constante pode ser representada por uma reta horizontal e vice-versa. Mas uma reta vertical no plano xy não pode ser representada por uma função $y = f(x)$. Uma circunferência completa no plano xy não pode ser representada por uma função $y = f(x)$ mas uma função pode representar partes da circunferência.

Uma informação importante é o ponto em que a curva cruza o eixo x. Este ponto é chamado de raíz da função. O eixo x corresponde a $y = 0$. Assim, a raíz de uma função equivale a $f(x) = 0$. Por exemplo, para $f(x) = 2x + 3$, a raíz da função é $x = -\frac{3}{2}$. Já para a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$, as raízes são $x = 5$ e $x = 6$. Nem todas as funções têm raízes. Por exemplo $f(x) = 2$ e $f(x) = x^2 - 6x + 10$ não possuem raízes. Em contrapartida, a função $f(x) = 0$ tem infinitas raízes, mais propriamente todo $x \in \mathbf{R}$.

A seguir serão colocados alguns exemplos de funções. Foram escolhidas as funções mais usadas ao longo deste livro com seus repectivos gráficos.

2.4.3 Exemplos de funções.

As funções apresentadas neste pequeno sumário são: linear, quadrática, potência, polinomial e exponencial. Elas serão extensivamente usadas ao longo deste e dos próximos livros. Outras funções serão apresentadas em capítulos posteriores.

Função linear.

A função linear é caracterizada como

$$f(x) = \alpha x + \beta \quad , \tag{2.32}$$

onde α e β são números reais.

O gráfico da função linear é uma reta. Para mostrar isso basta escrever $f(x) = y$,

$$y = \alpha x + \beta \Rightarrow \alpha x - y + \beta = 0 \quad .$$

o gráfico acima é uma reta $ax + by + c = 0$ com $a = \alpha$, $b = -1$ e $c = \beta$.

A constante β é denominada coeficiente linear da reta. Tal nome se deve ao fato de que $f(0) = \beta$. Assim, no gráfico da função, a reta intercepta o eixo das ordenadas (eixo y, cuja equação é $x = 0$).

A constante α é denominada coeficiente angular da reta. Ela contém informação sobre a inclinação da reta. Se $\alpha = 0$, então $f(x) = \beta$, o que é uma função constante. Para $\alpha = 0$, a relação $y = \beta$ indica o gráfico de uma reta horizontal. Para $\alpha > 0$, $f(1) = \alpha + \beta > \beta = f(0)$, ou seja, $f(1) > f(0)$. Como apenas dois pontos determinam uma reta, é possível concluir que a reta continua se elevando à direita. Já para $\alpha < 0$, $f(1) = \alpha + \beta < \beta = f(0)$, o que implica em $f(1) < f(0)$. Neste caso o inverso acontece: a reta continua diminuindo para a direita.

[desenhar gráficos].

Na linguagem matemática, uma função é monotomicamente crescente se para todo $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$. Uma reta com $\alpha > 0$ é estritamente crescente. Já uma função monotomicamente descrescente é definida como $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$. Uma reta com $\alpha < 0$ é monotomicamente descrescente.

[desenhar gráficos].

Quanto maior o coeficiente angular, mais inclinada será a reta. Quando o coeficiente angular diminui a reta também fica mais inclinada, mas com inclinação oposta. No entanto, a função reta nunca fica vertical, por maior que seja α. Como já foi indicado na seção anterior, uma reta vertical nem sequer é função.

A raíz da função linear ($f(x) = 0$) é dada por $\alpha x + \beta = 0$. Caso $\alpha = \beta = 0$, todo x real é raíz da função. Para $\alpha = \beta = 0$ a função é a constante $f(x) = 0$. Na seção anterior foi visto que esta função tem infinitas raízes. Para $\alpha = 0$ mas $\beta \neq 0$, a equação acima não tem solução porque ela se reduz a $\beta = 0$. Assim fica reconfirmado que a função constante não nula $f(x) = \beta = c \neq 0$ é uma reta paralela ao eixo x. Para $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, a equação acima tem solução

$$x = -\frac{\alpha}{\beta} \quad , \tag{2.33}$$

o que mostra que a raíz da função depende do coeficiente angular e do linear.

Toda função linear é uma reta (exceto a vertical), mas toda reta pode ser descrita por uma função linear? Reescrevendo a equação da reta (2.28),

$$ax + by + c = 0 \quad ,$$

se $b \neq 0$ (para excluir a reta vertical), toda a equação acima pode ser dividida por b,

$$\left(\frac{a}{b}\right) x + y + \frac{c}{b} = 0 \Rightarrow y = -\left(\frac{a}{b}\right) x - \frac{c}{b} \quad .$$

Reescrevendo $\alpha = -\frac{a}{b}$ e $\beta = -\frac{c}{b}$, a equação acima coincide com a expressão (2.32). Assim, toda reta não vertical pode ser representada por uma função.

Caso duas funções lineares sejam colocadas no mesmo gráfico, os coeficientes angulares das retas indicam se elas são paralelas ou concorrentes. Para duas retas $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1$ e $y_2 = \alpha_2 x + \beta_2$. As relações são

Para $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$ as retas são paralelas e cruzam a origem no mesmo ponto. Como duas paralelas só se encontram se elas são iguais, a condição $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$ indica que as retas são iguais. Um caso particular interessante é $\alpha_1 \neq \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$. Neste caso as retas são concorrentes e se interceptam no eixo y porque tem o mesmo coeficiente linear.

Usando as mesmas equações anteriores. Usando as mesmas retas (2.29) e (2.30) chega-se às funções $2x+4y-5=0$ e $2x+4y-5=0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$, $-x+3y+4=0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.

As retas são concorrentes porque $\alpha_1 = -\frac{1}{2} \neq \frac{4}{3} = \alpha_2$. Igualando os valores de y chega-se a $-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4} = \frac{1}{3}x-\frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{31}{10}$, portanto $y = -\frac{1}{2}\left(\frac{31}{10}\right)+\frac{5}{4} = -\frac{3}{10}$.

Os resultados coincidem com aqueles que foram encontrados. As retas correspondentes às equações $x+2y+3=0$ e $2x+4y+6=0$ são ambas iguais à $y = -\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$, confirmando que as retas são iguais. Enfim, as equações $x+2y+3=0$ e $x+2y+4=0$ ficam reescritas como $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ e $y = -\frac{1}{2}x-2$. As retas são paralelas porque $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{2}$, mas são distintas porque $\beta_1 = -\frac{3}{2} \neq -2 = \beta_2$, confirmando o que já tinha sido encontrado.

Função quadrática.

A função quadrática caracteriza-se pela equação

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad , \tag{2.34}$$

onde α, β e γ são números reais, mas $\alpha \neq 0$. Caso $\alpha = 0$ na função acima a função se reduz a uma reta $f(x) = \beta x + \gamma$.

Como já foi discutido na seção anterior, a função quadrática tem um gráfico de parábola com simetria vertical. Porém nem toda a parábola pode ser descrita pela função quadrática. Por exemplo, a parábola com simetria horizontal não é sequer uma função do tipo $y = f(x)$. Isso porque no gráfico desta parábola um reta vertical corta a parábola horizontal em dois pontos. Para a parábola com simetria horizontal, há dois valores de y para cada

x. Esse resultado pode ser generalizado: qualquer parábola que não tenha simetria vertical não pode representada por nenhuma função.

A parábola da função $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ intercepta o eixo y no ponto $(0, \gamma)$ porque $f(0) = \gamma$. Assim γ da parábola é similar ao coeficiente linear da reta.

O eixo de simetria da parábola é uma reta vertical. O ponto da parábola que intercepta esta reta vertical é denominado "vértice". As coordenadas do vértice são (x_v, y_v) Retas verticais não são gráficos de função, mas sua equação é $x = x_v$. A relação de simetria pode ser expressa como $f(x_v+h) = f(x_v-h)$ onde $h \neq 0$. Esta relação indica que a partir de x_v à uma distancia qualquer h a função é a mesma. Substituindo $f(x_v + h) = f(x_v - h)$ na expressão (2.34) chega-se a

$$\begin{aligned}
\alpha(x_v + h)^2 + \beta(x_v + h) + \gamma &= \alpha(x_v - h)^2 + \beta(x_v - h) + \gamma \\
\alpha(2x_v h) + \beta(+h) &= \alpha(-2x_v h) + \beta(-h) \\
(2\alpha x_\nu + \beta)h &= 0 \\
x_v &= -\frac{\beta}{2\alpha} \quad . \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

O eixo de simetria da parábola não depende de γ, mas apenas da relação entre α e β. É importante notar que se $\frac{\beta}{\alpha} > 0$ (o que equivale a α e β sejam ambos positivos ou ambos negativos), o eixo de simetria está à esquerda do eixo y porque $x_v < 0$. Já se $\frac{\beta}{\alpha} < 0$ (o que equivale a α seja positivo e β negativo ou vice-versa), o eixo de simetria está à direita do eixo y porque $x_v > 0$. Enfim, se $\frac{\beta}{\alpha} = 0$ (o que equivale a $\beta = 0$), o eixo de simetria é o próprio eixo y porque $x_v = 0$.

A altura do vértice é obtida substituindo-se 2.35 em 2.34,

$$y_v = f(x_v) = \alpha\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) + \gamma$$

$$y_v = f(x_v) = -\frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma \quad . \tag{2.36}$$

O altura do vértice depende de α, β e γ. Para identificar se a concavidade é para cima ou para baixo, basta avançar uma unidade em torno do eixo de simetria. Das expressões 2.35 e 2.34 chega-se a

$$\begin{aligned}
f(x_v+1) &= \alpha\left(-\frac{\beta}{2\alpha}+1\right)^2 + \beta\left(-\frac{\beta}{2\alpha}+1\right)+\gamma \\
f(x_v+1) &= -\frac{\beta^2}{4\alpha}+\gamma+\alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha}+1\right)+\beta \\
f(x_v+1) &= -\frac{\beta^2}{4\alpha}+\gamma+\alpha \\
f(x_v+1) &= f(x_v)+\alpha \quad .
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Se $\alpha > 0$, $f(x_v+1) = f(x_v)+\alpha > f(x_v)$. Como $f(x_v-1) = f(x_v+1)$ então $f(x_v+1) > f(x_v)$ e $f(x_v-1) > f(x_v)$. A função $f(x)$ nas vizinhanças do eixo de simetria são maiores do que a altura do vértice $f(x_v) = y_v$. Assim a parábola assemelha-se ao um recipiente com a boca virada para cima. Na linguagem matemática, se $\alpha > 0$, a concavidade é para cima. Inversamente, se $\alpha < 0$, a concavidade é para baixo. Assim a concavidade da parábola depende apenas de α.

Se $\alpha > 0$, quanto maior α, mais estreita é a parábola porque o salto entre $f(x_v+1)$ e $f(x_v)$ aumenta ainda mais. Já quando $\alpha < 0$, quanto menor o α, mais estreita é a parábola. Em suma, quanto maior o módulo de α, mais estreita é a parábola.

Se a concavidade é para cima ($\alpha > 0$), a função quadrática é crescente para $x \geq x_v$ e descrescente para $x \leq x_v$. Assim todos os pontos da parábola seguem a relação $f(x) \geq f(x_v)$. Em outras palavras, $f(x_v)$ é o menor ponto possível da parábola. Este ponto é denominado ponto de mínimo.

Inversamente, se concavidade é para baixo ($\alpha < 0$), a função quadrática é descrescente para $x \geq x_v$ e crescente para $x \leq x_v$. Assim todos os pontos da parábola seguem a relação $f(x) \leq f(x_v)$. Em outras palavras, $f(x_v)$ é o maior ponto possível da parábola. Este ponto é denominado ponto de máximo. Em suma,

- $\alpha > 0$: concavidade para cima, vértice é ponto de mínimo, ou seja, função crescente para $x > x_v$ e descrescente para $x < x_v$;

- $\alpha < 0$ concavidade para baixo, vértice é ponto de máximo, ou seja, função crescente para $x < x_v$ e descrescente para $x > x_v$.

As raízes da função quadrática ($f(x) = 0$) podem ser encontradas com a expressão (2.34),

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Rightarrow x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad .$$

O número de raízes da função quadrática é determinado pela relação que depende dos três coeficientes α, β e γ: $\beta^2 - 4\alpha\gamma$. Se $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ há duas raízes. O eixo de simetria $x_v = -\frac{\beta}{2\alpha}$ está exatamente entre as duas raízes. Caso $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, há uma única raíz e esta coincide com o vértice $x_v = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Enfim, se $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ não há raízes reais.

Uma forma de se entender as raízes da função quadrárica é reescrever as raízes em função das coordenadas do vértice (2.35) e (2.36),

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\beta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta^2}{4\alpha} - 4\gamma\right)} \\ x &= x_v \pm \sqrt{-\frac{y_v}{\alpha}} \quad . \end{aligned}$$

As raízes podem ser reinterpretadas geometricamente. Caso a concavidade esteja para cima ($\alpha > 0$) o valor y_v é um ponto de mínimo. Se o ponto de mínimo está abaixo do eixo x, necessariamente a parábola com concavidade para cima cruzará o eixo x em dois pontos. Na equação acima se $y_v < 0$ e $\alpha > 0$ então $-\frac{y_v}{\alpha} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2\alpha}(n^2 - 4\alpha\gamma) > 0$ e há duas raízes. O vértice x_v reaparece exatamente no meio das duas raízes. Continuando no caso da concavidade para cima ($\alpha = 0$), se o ponto de mínimo y_v está no eixo x ($y_v = 0$), todos os outros pontos estarão cima do eixo x. Na equação acima se $y_v = 0$ e $\alpha > 0$ então $-\frac{y_v}{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\alpha}(\beta^2 - 4\alpha\gamma) = 0$ e há apenas uma única duas raíz $x = x_v$. Enfim, se a concavidade é para cima ($\alpha > 0$) e o ponto de mínimo está acima do eixo x ($y_v > 0$), nenhum ponto poderá interceptar o eixo x. Na equação acima se $y_v > 0$ e $\alpha > 0$ então $-\frac{y_v}{\alpha} < 0 \Rightarrow \frac{1}{2\alpha}(\beta^2 - 4\alpha\gamma) < 0$ e não há raíz real. Para o caso da concavidade para baixo ($\alpha < 0$) as situações são similares: y_v é ponto de máximo. Se y_v acima do eixo x a parábola intercepta o eixo x em dois pontos; se y_v está no próprio eixo x, a parábola intercepta o eixo x em um único ponto; enfim, se y_v está acima do eixo x, a parábola não intercepta o eixo x.

Em suma, as raízes da função ficam resumidas nas condições

- se $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, há duas raízes: $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$;
- se $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, há uma única raíz que coincide com o vértice: $x = x_v = -\frac{\beta}{2\alpha}$;
- se $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, não há raízes reais.

Funções Potência e Polinomiais.

Funções potência são da forma $f(x) = x^n$.

As figuras abaixo represenatm as funções potência com $n = 0, 1, 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -1$ e $n = -2$. As figuras abaixo reproduzem estes gráficos.

[figuras]

As funções potência com $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$ são respectivamente casos particulares de função constante, linear e quadrática. A função polinomial é definida como

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n \quad ,$$

onde os expoentes n são sempre números naturais. O maior expoente do polinômio é denominado "grau do polinômio".

A forma mais compacta de escrever um polinômio é $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, lembrando que $x^0 = 1$ e $x^1 = x$.

Algumas funções vistas até agora são funções polinomiais. A função constante é uma função polinomial de grau 0 ($f(x) = a_0 = c$). A função linear é uma função polinomial de grau 1: $f(x) = \alpha x + \beta = \alpha_1 x + \alpha_0$. A função polinomial de grau 2 é uma função quadrática, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$.

As funções polinomiais de graus 3 e 4 são denominadas respectivamente função cúbica e quártica.

As figuras abaixo exibem alguns gráficos de função polinomial,

- $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$, função cúbica [fazer figura]
- $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 5$ função cúbica [fazer figura]
- $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, função cúbica [fazer figura]
- $f(x) = x^3 - x^2$, função cúbica [fazer figura]
- $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, função quártica [fazer figura]
- $f(x) = x^4 + x^2 + 1$, função quártica [fazer figura]

- $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$, função quártica [fazer figura]

Uma propriedade importante das funções polinomiais é a relação entre o grau n e as raízes. Toda função polinomial de grau $n \neq 0$ tem no máximo n raízes. Por exemplo, a função linear (não constante) tem no máximo uma raíz, a quadrática, no máximo 2 raízes, a cúbica, 3, etc. As funções de grau ímpar tem pelo menos uma raíz. Já as funções de grau par podem não apresentar nenhuma raíz. As figuras das funções cúbica e quártica desenhadas acima ilustram esta propriedade.

Função Exponencial

A função exponencial é denotada como $exp(x)$, sendo definida como a série infinita

$$exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \tag{2.38}$$

Esta soma infinita resulta em valor finito. Esta série é análoga àquelas usadas para representar dízimas periódicas assim como séries representando números irracionais.

Como $0! = 1! = 1$, $x^0 = 1$ e $x^1 = x$, a série acima pode ser reescrita como

$$exp(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

ou ainda,

$$exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \quad .$$

A função exponencial não pode ser considerada uma função polinomial. As funções polinomiais tem grau finito, enquanto a função exponencial é uma soma infinita.

A função exponencial pode ser reescrita como $f(x) = exp(x) = e^x$, onde e é denominado número neperiano e é dado por

$$e = exp(0) = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \quad . \tag{2.39}$$

[colocar gráfico de $f(x) = e^x$].

O número e é irracional. Uma soma parcial pode ser feita para graus cada vez maiores, chegando infinitamente próximo de e. Abaixo estão as somas para $n = 2, 3, 4, 5$ e 6. Usando (2.39),

$$\begin{aligned}
e &= \sum_{j=0}^{2} \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \\
e &= \sum_{j=0}^{3} \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} = 2,\bar{6} \\
e &= \sum_{j=0}^{4} \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24} = 2,708\bar{3} \\
e &= sum_{j=0}^{5} \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{60} = 2,71\bar{6} \\
e &= \sum_{j=0}^{6} \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} = 2,7180\bar{5}
\end{aligned}$$

Calculando e até 31casas decimais temos $e = 2,7182818284590452353602874713527$. O nome função exponencial vem justamente da forma e^x. O gráfico da função $f(x) = exp(x) = e^x$ está colocado abaixo.

As outras funções $f(x) = \alpha^x$ (com $\alpha > 0$) cujo argumento é um expoente também são chamadas de funções exponenciais. No entanto, o termo é reservado quase que exclusivamente à função $f(x) = e^x$.

As funções $f(x) = \alpha^x$ podem ser reescritas na forma $f(x) = e^{cx}$ onde $a = e^c$. O termo c pode ser encontrado através da função logaritmo, mas esta só será definida em outro capítulo. Para a função $f(x) = 2^x$, a constante c é aproximadamente $c \approx 0,693$ ($2 \approx e^{0,693}$). Assim $f(x) = 2^x = e^{0,693x}$. Apenas como curiosidade é apresentada o valor de $e^{0,693}$ até $n = 4$. Partindo de (2.38) o leitor pode verificar quão boa é a aproximação $2 \approx e^{0,693}$,

$$\begin{aligned}
e^{0,693} &= exp(0,693) = \sum_{j=0}^{4} \frac{(0,693)^j}{j!} \quad , \\
e^{0,693} &= 1 + 0,693 + \frac{(0,693)^2}{2} + \frac{(0,693)^3}{6} + \frac{(0,693)^4}{24} \quad , \\
e^{0,693} &= 1,998203222083375 \quad .
\end{aligned}$$

As funções $f(x) = \alpha^x$ são crescentes para $\alpha > 1$. Neste caso, a expressão $\alpha = e^c$ tem $c > 0$. Para $\alpha = 1$, a função é constante porque $f(x) = 1^x = 1$. Neste caso $1 = e^0$, o que reconduz a $f(x) = 1^x = e^{0x} = e^0 = 1$. Para $0 < \alpha < 1$, a função exponencial é descrescente. Neste caso, $c < 0$. Por exemplo, se $\alpha = \frac{1}{e}$, então $c = -1$ porque $e^{-1} = \frac{1}{e}$. Assim $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$.

[desenhar figura de $f(x) = e^{-x}$].

2.4.4 Taxa de variação de uma função

As funções podem ser crescentes ou descrescentes. Apenas a função constante não é crescente e nem descrecente. Mas o crescimento da função pode não ser uniforme. Por exemplo, uma função quadrática é crescente em um intervalo e descrescente em outro.

Mesmo entre funções crescentes e descrescentes, há “graus"de crescimento. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ para $x > 0$ é crescente. Entre 0 e 1, a função cresceu de $0^2 = 0$ a $1^2 = 1$. Já entre 1 e 2, o crescimento foi maior: de $1^2 = 1$ para $2^2 = 4$.

Há um número que pode ser associado crescimento da função em um intervalo. Este número é denominado “taxa de variação"ou “taxa de crescimento"ou ainda “variação média". A taxa de variação de uma função $f(x)$ para um intervalo $x_1 < x < x_2$ ou mesmo $x_2 < x < x_1$é definida por

$$T(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad . \tag{2.40}$$

Se a função $f(x)$ for monotomicamente crescente no intervalo, $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ e a taxa de variação fica positiva. Quando maior o crescimento de $f(x_2)$ em relação a $f(x_1)$, maior a taxa de variação. Caso a função seja monotomicamente descrescente no intervalo, a taxa de variação será negativa porque $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$. Caso a função seja ora crescente, ora descrescente no intervalo, não se pode afirmar se a taxa de variação é positiva, negativa ou nula.

As relações acima se repetem para $x_2 < x_1$ porque a troca de x_1 por x_2 não altera a taxa de variação (2.40)

$$T(x_2, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = T(x_1, x_2) \quad .$$

Alguns exemplos de taxa de variação são ilustrativos. A taxa de variação (2.40) de uma função linear (2.32) no intervalo x_1 e x_2 fica

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(\alpha x_2 + \beta) - (\alpha x_1 + \beta)}{x_2 - x_1} \\ T(x_1, x_2) &= \frac{\alpha x_2 + \beta - \alpha x_1 - \beta}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha x_2 - \alpha x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \quad . \end{aligned}$$

Se $x_1 = x_2$ a divisão acima recai em uma singularidade $\frac{0}{0}$. Mas a própria taxa de variação foi definida para $x_1 \neq x_2$. Assim a divisão acima fica:

$$T(x_1, x_2) = \alpha \quad . \tag{2.41}$$

A taxa de variação da função linear é uma constante, seu próprio coeficiente angular. A taxa de variação não depende do coeficiente linear. Assim a reta é sempre crescente ($\alpha > 0$), sempre descrescente ($\alpha < 0$) ou nem uma das duas ($\alpha = 0$).

Em contraste com a função linear, a função quadrática (2.34) tem uma taxa de crescimento que depende de x_1 e x_2,

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(\alpha x_2^2 + \beta x_2 + p) - (\alpha x_1^2 + \beta x_1 + p)}{x_2 - x_1} \\ T(x_1, x_2) &= \frac{\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \quad . \end{aligned}$$

Caso $x_1 = x_2$ a divisão acima leva a uma determinação. Mas a definição 2.40 é definida para $x_1 \neq x_2$. Usando a relação $(x_2^2 - x_1^2) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ na expressão acima,

$$T(x_1, x_2) = \alpha(x_2 + x_1) + \beta \quad . \tag{2.42}$$

A taxa de variação da função quadrática não depende de p, apenas de α e n. Além disso, a taxa de variação não depende da substração $(x_2 - x_1)$, mas da soma $(x_2 + x_1)$. Para ilustrar esta taxa de crescimento, será escolhido o caso mais simples de função quadrática: $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ ($f(x) = x^2$). A expressão (2.42) se reduz a $T(x_1, x_2) = x_2 + x_1$.

Desta expressão, a taxa de cresciemento de $f(x) = x^2$ entre 0 e 1 é $T(0, 1) = 1$ enquanto entre 1 e 2, $T(1, 2) = 3$. Isso confirma a conclusão anterior. O ritmo de crescimento da função é maior no intervalo $[1, 2]$ do que em $[0, 1]$. A taxa de crescimento entre 0 e 2 é dada por $T(0, 2) = 2$. Assim a taxa de variação no intervalo $[0, 2]$ foi a média entre os intervalos $[0, 1]$ e $[1, 2]$. Como para $x \geq 0$ a função é crescente, todas as taxas de variação são positivas. Escolhendo intervalos em $x \leq 0$, percebe-se que a função é descrescente. Por exemplo $T(-1, 0) = -1$, $T(-2, -1) = -3$ e $T(-2, 0) = -2$. Caso os intervalos incluam valores que onde a função passe de descrescente a crescente a taxa de variação pode ser positiva, negativa ou nula. Por exemplo, $T(-1,1) = 0$ (os acréscimos e os decréscimos foram cancelados), $T(-1,2) = 1$ e $T(-2,1) = -1$.

Estes dois exemplos de função ilustram bem as propriedades das taxas de variação.

Uma forma de reescrever a taxa de variação é apelando diretamente à relação entre a variação no argumento e à variação na função na função. Definindo a variação do argumento como $\Delta x = x_2 - x_1$ (o que equivale a $x_2 = x + \Delta x$), a taxa de variação fica reescrita como

$$T(x_1, \Delta x) = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad . \tag{2.43}$$

Por exemplo, a taxa de variação (2.42) da função quadrática escrevendo $x_2 = x_1 + \Delta x$ fica

$$T(x_1, \Delta x) = \alpha(2x_1 + \Delta x) + \beta \quad . \tag{2.44}$$

A expressão acima exibe bem como a taxa de variação varia em relação à variação de x_1 para x_2. Por exemplo, entre os intervalo entre $x_1 = 1$ e $x_2 = 10$, a função $f(x) = 2x+3$ variou $f(10) - f(1) = 38$. No intervalo entre $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ a função $f(x) = x^2$ variou $f(2) - f(1) = 3$. Embora a função $f(x) = 2x + 3$ tenha variado mais no intervalo $[1, 20]$ do que $f(x) = x^2$ no intervalo $[1, 2]$, no primeiro caso a variação no argumento foi de $\Delta x = 19$ enquanto no segundo caso, apenas $\Delta x = 1$. É por isso que no primeiro caso $T(1, \Delta x = 19) = T(1, 20) = 2$ e no segundo caso, $T(1, \Delta x = 1) = T(1, 2) = 3$.

Há ainda outra notação para a taxa de variação,

$$T(x_1, \Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad , \tag{2.45}$$

onde $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) = y(x_1 + \Delta x) - y(x_1)$.

Há uma grande desvantagem na notação acima. A variação Δy depende de x e de Δx, não apenas de Δx. A dependencia de Δy em relação a x fica implícita na relação acima. A expressão da taxa de variação da função quadrática 2.44 é um exemplo disso.

É importante frisar que as variáveis y e x podem ser trocadas por outras. Por exemplo, se $z = f(w)$, todas as definições acima ficariam reescritas. As tres definições de taxa de variação ficariam (2.40), (2.43) e (2.45),

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) &= \frac{f(w_2) - f(w_1)}{w_2 - w_1} \\ T(w_1, \Delta w) &= \frac{f(w_1 + \Delta w) - f(w_1)}{\Delta w} \\ T(w_1, \Delta w) &= \frac{\Delta z}{\Delta w} \end{aligned}$$

2.4.5 Cálculo Diferencial.

A taxa de variação (2.40) depende de dois pontos. Caso os dois pontos ($x_1 = x_2$) coincidam, surge um problema matemático já mencionado na seção anterior

$$T(x_1, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_1)}{x_1 - x_1} = \frac{0}{0} \quad .$$

Mas, intuitivamente, há algo similar à taxa de variação em um ponto único. Por exemplo, a função linear $f(x) = 2x + 3$ tem taxa de variação 2 para quaisquer dois pontos da reta. Intuitivamente, cada ponto da função $f(x) = 2x+3$ possui uma “taxa de crescimento"positiva, ainda que a definição (2.40) só existe para dois pontos distintos. No caso da função $f(x) = x^2$, também há uma percepção intuitiva de que a função cresce com taxas cada vez vez maiores a medida que os pontos avançam.

O físico inglês Isaac Newton (1643-1727) e o alemão Gottifried Wilhelm Leibniz (1646-1716) criaram de forma independente um cálculo para associar cada ponto de uma função à uma taxa de crescimento. Este cálculo é denominado cálculo diferencial. Há controvérsias sobre quem dos dois criou primeiro o cálculo diferencial, mas esta discussão foge dos objetivos deste livro.

A taxa de variação sempre se refere a um par de pontos x_1e x_2. Embora $x_1 \neq x_2$, estes dois pontos podem ser aproximados infinitamente. Caso x_1 seja um ponto fixo e x_2 se aproxime infinitamente de x_1, a taxa de variação (2.40) nesta condição é dada matematicamente por

$$lim_{x_2 \to x_1} T(x_1, x_2) \quad . \tag{2.46}$$

O símbolo matemático lim refere-se à uma operação que não será explicada neste livro. Por enquanto o leitor pode imaginar que o ponto x_2 aproxima-se infinitamente de x_1 sem nunca toca-lo. Caso os pontos se toquem $x_1 = x_2$ a relação (2.40) resulta em indeterminação. Caso os pontos parem de se aproximar, a relação não descreve a taxa de crescimento de um ponto específico, mas apenas a de um par de pontos.

A mesma relação poderia ser alcançada fazendo x_2 fixo e x_1 móvel. Neste caso, a relação equivalente seria reescrita como

$$lim_{x_1 \to x_2} T(x_1, x_2) \quad .$$

Para associar algum número à “taxa de variação"da função no ponto x qualquer da função, é usual escrever $x_1 = x$ como o ponto fixo e $x_2 = x_m$ como o ponto móvel. Assim a expressão (2.46) fica reescrita como

$$lim_{x_m \to x} T(x, x_m) \quad .$$

Cada ponto x fica associado à uma taxa de crescimento porque x_m desaparece da expressão. Como há um único valor na expressão acima para cada x, a expressão acima é uma função de x. Esta função é denominada "derivada de $f(x)$"e é simbolizada por $f'(x)$,

$$f'(x) = lim_{x_m \to x} T(x, x_m) \quad . \tag{2.47}$$

A expressão (2.47) pode ser reescrita de acordo com as definições de taxa de variação. A derivada de acordo com a definição (2.40) fica

$$f'(x) = lim_{x_m \to x} \frac{f(x_m) - f(x)}{x_m - x} \quad . \tag{2.48}$$

Também é muito usual escrever a derivada de acordo com a taxa de variação de acordo com a definição (2.43). Em outras palavras, $x_1 = x$ e $x_m = x + \Delta x$. Neste caso, o limite $x_m \to x$ equivale a $x + \Delta x \to x \Rightarrow \Delta x \to 0$. Substituindo esta forma reescrita na expressão (2.43) mantendo o limite da expressão (2.48),

$$f'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad . \tag{2.49}$$

Cada ponto x fica associado à uma taxa de crescimento porque Δx desaparece da expressão. Enfim, a derivada (2.47) pode ser reescrita de acordo com a definição (2.45),

$$f'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad . \tag{2.50}$$

Esta última definição de derivada motivou uma outra notação para a derivada

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \quad . \tag{2.51}$$

Esta notação é excelente para visualizar que $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$. As duas variações infinitamente pequenas ficam representadas por letras minúsculas.

O problema desta notação é que a derivada não é uma divisão, mas sim o limite de uma divisão. Por menor que seja Δx e Δy, se eles não se aproximam infinitamente de 0, a derivada não é uma função de um único número real, mas a de dois números reais. Este tópico será explorado ainda nesta seção.

A partir das taxas de variação das funções linear e quadrática é possível calcular a derivada destas funções.

Em primeiro lugar, a derivada da função linear a partir da expressão (2.41) com a definição (2.47) fica

$$f'(x) = lim_{x_m \to x} T(x, x_m) = lim_{x_m \to x} m \quad .$$

Como a constante m não depende de x_m, o limite não afetará a expressão acima. Assim, $f'(x) = \alpha$.

Algumas notações são comuns para representar a derivada a partir da função,

$$(\alpha x + \beta)' = \alpha \quad , \tag{2.52}$$

ou, usando a notação (2.51),

$$\frac{d(\alpha x + \beta)}{dx} = \alpha \quad . \tag{2.53}$$

Estas notações podem ser generalizadas para qualquer função. O estudante deve dominar as duas notações. A derivada de $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ pode ser obtida a partir da taxa de variação (2.44) e da definição (2.43),

$$\begin{aligned} \frac{d(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}{dx} &= lim_{\Delta x \to 0} T(x, \Delta x) \\ \frac{d(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}{dx} &= lim_{\Delta x \to 0} (m(2\alpha + \Delta x) + \beta) nonumber && (2.54) \\ \frac{d(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}{dx} &= 2\alpha x + \beta \quad , && (2.55) \end{aligned}$$

ou, usando a outra notação,

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = 2\alpha x + \beta \quad . \tag{2.56}$$

Uma propriedade extremamente interessante da derivada da função quadrática é que a derivada no vértice (2.35) é nula. Partindo da relação acima,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\alpha x + \beta \\ f'(-\frac{\beta}{2\alpha}) &= 2\alpha\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) + \beta = -\beta + \beta \\ f'(-\frac{\beta}{2\alpha}) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{2.57}$$

2.4.6 Regras de derivação.

O cálculo da derivada de uma função $f(x)$ nem sempre é simples como no caso da função linear e da função quadrática. Os matemáticos desenvolveram algumas regras que facilitam a obtenção da derivada. Como o tópico do livro é Física, as regras de derivação apresentadas serão especificamente àquelas que serão usadas ao longo deste livro. Além disso, não serão apresentadas provas matemáticas de nenhuma das regras.

Em primeiro lugar, começa-se com as funções conhecidas. Partindo-se das relações (2.52) e (2.53),

$$\frac{d(\alpha x + \beta)}{dx} = (\alpha x + \beta)' = \alpha \quad . \tag{2.58}$$

A regra (2.58) permite calcular a derivada de uma constante. A função constante $f(x) = c$ pode ser reescrita como $f(x) = 0x + c$. Assim $f(x)$ é uma função linear com $\alpha = 0$ e $\beta = c$. Substituindo estes valores em (2.58),

$$\frac{dc}{dx} = c' = 0 \quad . \tag{2.59}$$

A função identidade $f(x) = x$ também pode ser derivada a partir de 2.58. Substituindo em 2.58 $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ chega-se a

$$\frac{dx}{dx} = x' = 1 \quad . \tag{2.60}$$

As regras (2.55) e (2.56) permitem escrever a derivada da função quadrática,

$$\frac{d(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}{dx} = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = 2\alpha x + \beta \quad . \tag{2.61}$$

A derivada de $f(x) = x^2$ pode ser obtida a partir de $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$ em (2.61),

$$\frac{dx^2}{dx} = (x^2)' = 2x \quad . \tag{2.62}$$

Para funções potência da forma $f(x) = x^n$, a derivada é

$$\frac{dx^n}{dx} = (x^n)' = nx^{n-1} \quad . \tag{2.63}$$

É interessante calcular alguns casos desta regra. Para $n = 0$, a regra (2.63) fica sendo $\frac{dx^0}{dx} = 0x^{-1} = 0$, o que é coerente com (2.59) porque $f(x) = x^0 = 1$, que é uma função constante. Para $n = 1$ em (2.63), $(x^1)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$, o que é coerente com (2.60) porque $f(x) = x^1 = x$. Para $n = 2$ em (2.63), $\frac{dx^2}{dx} = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$, o que é coerente com (2.62). Outros exemplos que merecem atenção da regra (2.63) são $n = 3$, $n = 4$, $n = \frac{1}{2}$, $n = \frac{4}{3}$, $n = -1$ e $n = -2$,

$$\begin{aligned}
\frac{dx^3}{dx} &= 3x^{3-1} = 3x^2 \\
(x^4)' &= 4x^{4-1} = 4x^3 \\
\frac{d\sqrt{x}}{dx} &= \frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\
(x^{\frac{4}{3}})' &= \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{dx^{-1}}{dx} = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
\left(\frac{1}{x^2}\right)' &= (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \quad .
\end{aligned}
$$

As regras acima referem-se a funções particulares. Há relações para funções em geral,

$$\frac{d(cf(x))}{dx} = c\frac{df(x)}{dx} \quad , \tag{2.64}$$

ou, na outra notação,

$$(cf(x))' = cf'(x) \quad , labeleq : regraprod.const.ii \tag{2.65}$$

onde c é uma constante. Alguns exemplos de aplicações de (2.329) ou (**??**) seguem abaixo.

Neste exemplo serão usadas (**??**) e (2.62),

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' = \left(\frac{1}{2}\right)2x = x \quad .$$

Enfim, temos a conhecida regra da soma,

$$\frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx} = \frac{d(f(x)+g(x))}{dx} \quad , \tag{2.66}$$

ou, na outra notação,

$$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x) \tag{2.67}$$

Neste exemplo, será usada a regra (2.66) com (2.329) e (2.63),

$$\frac{d(x^5+4x^3)}{dx} = \frac{dx^5}{dx} + \frac{d(4x^3)}{dx} = 5x^4 + 4\frac{dx^3}{dx} = 5x^4 + 12x^2 \quad .$$

Já neste exemplo será usada (2.67) com (**??**), (2.59), (2.60) e (2.63),

$$
\begin{aligned}
(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' &= (\alpha x^2)' + (\beta x)' + (\gamma)' \quad , \\
(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' &= \alpha(x^2)' + \beta(x)' + 0 \quad , \\
(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' &= \alpha(2x) + \beta = 2\alpha x + \beta \quad ,
\end{aligned}
$$

o que coincide com (2.61).

Há inúmeras outras funções e regras de derivação que não serão apresentadas neste capítulo. A medida que estas regras e funções se tornarem necessárias, elas serão apresentadas nos próximos capítulos.

A derivada da função exponencial pode ser calculada a partir da definição (2.38) e (2.39) com as regras (2.66), (2.329), (2.59), (2.60) e (2.63),

$$\begin{aligned}
\frac{de^x}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...\right) \quad , \\
\frac{de^x}{dx} &= \frac{d(1)}{dx} + \frac{dx}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3!}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4!}\right) + ... \quad , \\
\frac{de^x}{dx} &= 0 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{dx^2}{dx} + \left(\frac{1}{3!}\right)\frac{dx^3}{dx} + \left(\frac{1}{4!}\right)\frac{dx^4}{dx} + ... \quad , \\
\frac{de^x}{dx} &= 0 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{dx^2}{dx} + \left(\frac{1}{3!}\right)\frac{dx^3}{dx} + \left(\frac{1}{4!}\right)\frac{dx^4}{dx} + ... \quad , \\
\frac{de^x}{dx} &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)2x + \left(\frac{1}{3!}\right)3x^2 + \left(\frac{1}{4!}\right)4x^3 + ... \quad .
\end{aligned}$$

Levando em conta que $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$,

$$\frac{de^x}{dx} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = e^x \quad .$$

Assim,

$$\frac{de^x}{dx} = (e^x)' = e^x \quad . \tag{2.68}$$

De forma análoga, a derivada de $f(x) = e^{cx}$ fica

$$\frac{de^{cx}}{dx} = (e^{cx})' = ce^{cx} \quad . \tag{2.69}$$

Seguem dois exemplos de aplicação de (2.69)

$$\begin{aligned}
\frac{de^{5x}}{dx} &= 5e^{5x} \quad , \\
(e^{-x})' &= (e^{(-1)x})' = (-1)e^{(-1)x} = -e^{-x} \quad .
\end{aligned}$$

Já neste exemplo serão usadas (2.68) e (2.329)

$$\frac{d(5e^x)}{dx} = 5\frac{de^x}{dx} = 5e^x \quad .$$

2.4.7 Interpretação geométrica da taxa de variação e da derivada.

Uma reta paralela ao eixo x corresponde a uma função constante $f(x) = \beta$. Esta reta é paralela e distinta do eixo x caso $\beta \neq 0$, mas ela coincide com o próprio eixo x se $\beta = 0$. Uma reta $f(x) = \alpha x + \beta$ com $\alpha \neq 0$ cruza o eixo x em um único ponto, a raíz da função $x = -\frac{\beta}{\alpha}$. O ângulo que a reta faz com eixo x é indexado como ϕ. Para o argumento $x = -\frac{\beta}{\alpha} + 1$ chega-se a $f(-\frac{\beta}{\alpha} + 1) = \alpha$. Há um triângulo retângulo definido pelos pontos $(-\frac{\beta}{\alpha}, 0)$, $(-\frac{\beta}{\alpha} + 1, \alpha)$ e $(-\frac{\beta}{\alpha} + 1, 0)$. Estes três pontos formam um triângulo retângulo. Embora a definição de tangente como cateto oposto sobre cateto adjacente seja incompleta, ela poderá ser usada neste caso. A tangente de ϕ é $tg\phi = \alpha$. Em suma, o coeficiente angular da reta é a tangente do ângulo que esta intercepta o eixo x se $\alpha \neq 0$.

Para $\alpha = 0$, ou o ângulo ϕ não é formado ou as retas coincidem ($\beta = 0$). No caso de coincidência $\phi = 0$ e $tg\phi = 0 = \alpha$, o que mantêm a relação entre ϕ e α.

Se a reta éfor crescente, $0 < \alpha < \infty \Rightarrow 0 < tg\phi < \infty$, então $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Mas se a reta é descrescente ($-\infty < \alpha < 0 \Rightarrow -\infty < tg\phi < 0$), há duas interpretações para ϕ. Ou se considera que ϕ é o ângulo formado no sentido horário entre o eixo x e a reta, ou ϕ é o ângulo formado no sentido anti-horário entre o eixo x e a reta. No primeiro caso o ângulo é negativo e está no intervalo $-\frac{\pi}{2} < \phi < 0$. Usando a relação trigonométrica $tg(-\phi) = -tg\phi$, a tangente de ϕ ficará no intervalo $-\infty < tg\phi < 0$. No segundo caso o ângulo é positivo e está no intervalo $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$. Usando a relação $tg(\pi - \phi) = -tg\phi$ chega-se a condição $-\infty < tg\phi < 0$. Em ambos os casos, $tg\phi = \alpha$ é negativa.

[figura com reta cruzando o eixo x e fazendo um angulo α].

A função tangente será vista em pormenores no capítulo IV.

Em uma curva (que não seja necessariamente uma reta) cuja função é $f(x)$, é possível passar uma reta que cruze dois pontos quaisquer. A equação da reta será $g(x) = \alpha x + \beta$, onde $g(x)$ para a função linear serve para distinguir de $f(x)$, a curva. Os dois pontos em que a reta $g(x)$ intercepta a curva $f(x)$ são dados por x_1 e x_2: $f(x_1) = g(x_1) = \alpha x_1 + \beta$ e $f(x_2) = g(x_2) = \alpha x_2 + \beta$. Substraindo $f(x_2)$ e $f(x_1)$ chega-se a

$$f(x_2) - f(x_1) = \alpha(x_2 - x_1) \Rightarrow \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad .$$

A taxa de variação na definição 2.40 coincide com o coeficiente angular da reta. Portanto, a taxa de variação da função $f(x)$ no intervalo $[x_1, x_2]$ pode ser interpretada geometricamente como o coeficiente linear da reta que cruza a curva nos pontos x_1e x_2.

Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ no intervalo $[1, 2]$ tem taxa de variação $T(1, 2) = 3$. A reta que intercepta a função neste intervalo é $g(x) = 3x - 2 = T(1, 2)x - 2$.

A derivada pode ser definida como a taxa de variação no intervalo $[x, x_m]$ com x_m infinitamente próximo de x (ver 2.47). A reta que liga x e x_m tende a tornar-se a reta tangente à curva no ponto x. Como a taxa de variação é o coeficiente linear da reta que liga os pontos x e x_m, a derivada é o coeficiente linear da reta tangente à curva no ponto x.

Continuando com o exemplo da função $f(x) = x^2$, toda a reta que intercepta a curva no ponto $(1, 1)$ têm equação $g(x) = \alpha x + 1 - \alpha$ (ou seja,

$\beta = 1-\alpha$). No exemplo anterior onde a reta cruzava a curva nos pontos $(1,1)$ e $(2,4)$, $\alpha = 3$. O leitor pode testar geometricamente que a única reta que é tangente à curva no ponto $(1,1)$ tem equação $g(x) = 2x - 1$. A derivada de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$ e em $x = 1$ ela vale $f'(x) = 2$. O coeficiente angular da reta $g(x)$ é 2.

2.4.8 Cálculo integral.

O espaço entre uma curva descrita pela função $f(x)$ e o eixo x é uma superfície bem delimitada. Limitando esta superfície por retas verticais com equações $x = x_1$ e $x = x_2$ (retas verticais não são funções), a superfície fica limitada. A diferença entre a área da parte da superfície que fica acima do eixo x menos aquela que fica abaixo é chamada de integral. A definição só se tronará clara com exemplos.

O símbolo de integral é

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \quad .$$

Os exemplos abaixo com a função linear $f(x) = 2x + 3$ ilustram o que é integral. A expressão

$$\int_{1}^{2} (2x+3)dx$$

é a diferença entre a área da parte da superfície que fica acima do eixo x menos aquela que fica abaixo. O espaço entre a reta $f(x) = 2x + 3$ e o eixo x entre $1 < x < 2$ fica inteiramente acima do eixo x. Em outras palavras, a área abaixo do eixo x será 0. Assim, esta integral é apenas a área da parte da superfície que fica acima do eixo x. Entre a reta $f(x) = 2x + 3$, o eixo x e as retas verticais $x = 1$ e $x = 2$ forma-se um trapézio. As bases deste trapézio são respectivamente $B = f(2) = 7$ e $b = f(1) = 5$ enquanto a altura é $h = 1$. A área do trapézio é dada por

$$A_+ = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(7+5)1}{2} = 6 \quad ,$$

enquanto a área abaixo do eixo x é $A_- = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2x+3)dx &= A_+ - A_- = 6 - 0 \quad , \\ \int_1^2 (2x+3)dx &= 6 \quad . \end{aligned}$$

[desenhar figura da região descrita acima].

Outro caso interessante é a integral $\int_{-2}^{2}(2x+3)dx$.

Neste caso, a reta $f(x) = 2x + 3$ fica acima do eixo x para $-\frac{3}{2} < x < 2$, e abaixo dele para $-2 < x < -\frac{3}{2}$. A integral é a diferença entre a área da parte da superfície que fica acima do eixo x (no intervalo $-\frac{3}{2} < x < 2$) menos aquela que fica abaixo é chamada de integral $(-2 < x < -\frac{3}{2})$.

A superfície acima do eixo x é é um triângulo retângulo cujos catetos são $f(2) = 7$ e $d(2, -\frac{3}{2}) = |2 - (-\frac{3}{2})| = \frac{7}{2}$. A área do triângulo retângulo acima do eixo x fica:

$$A_+ = \frac{c_1 c_2}{2} = \frac{7\left(\frac{7}{2}\right)}{2} = \frac{49}{4}$$

Abaixo do eixo x há um triângulo retângulo cujos catetos são $|f(-2)| = |-1| = 1$ e $d(-2, -\frac{3}{2}) = |-2 - (-\frac{3}{2})| = \frac{1}{2}$. A área abaixo de x será

$$A_- = \frac{c_1 c_2}{2} = \frac{1\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4} \quad .$$

A integral é a diferença entre a área da parte da superfície que fica acima do eixo x (A_+) menos aquela que fica abaixo é chamada de integral (A_-),

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2}(2x+3)dx &= A_+ - A_- = \frac{48}{4} \quad , \\ \int_{-2}^{2}(2x+3)dx &= 12 \quad . \end{aligned}$$

Por último será calculada a integral $\int_{-2}^{-\frac{3}{2}}(2x+3)dx$.

A superfície entre a reta e o eixo x está todo abaixo do eixo x. Assim a área acima de x $A_+ = 0$. A superfície abaixo do eixo x é o triângulo retângulo com catetos 1 e $\frac{1}{2}$ da integral anterior. Assim a área abaixo de x é A_-,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-\frac{3}{2}}(2x+3)dx &= A_+ - A_- = 0 - \frac{1}{4} \quad , \\ \int_{-2}^{-\frac{3}{2}}(2x+3)dx &= -\frac{1}{4} \quad . \end{aligned}$$

O estudante poderá, como exercício, provar que $\int_{-2}^{-1}(2x+3)dx = 0$.

Felizmente os mesmos criadores do cálculo diferencial também criaram o cálculo integral. Newton e Leibniz descobriram independentemente o "teorema fundamental do cálculo". O teorema estabelece uma relação entre a integral e a derivada,

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)dx = f(x_2) - f(x_1) \quad , \tag{2.70}$$

ou com outra notação

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx = f(x_2) - f(x_1) \quad . \tag{2.71}$$

Geralmente, a diferença entre funções $f(x_2) - f(x_1)$ é representada por $f(x)|_{x_1}^{x_2}$. Assim,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) dx = f(x)|_{x_1}^{x_2} \quad . \tag{2.72}$$

O teorema fundamental é usado para calcular integrais. Como exemplo, será recalculada a integral $\int_1^2 (2x+3)dx$.

Reescrevendo a integral acima de acordo com o teorema fundamental do cálculo eq. (2.70),

$$\int_1^2 \left(\frac{df(x)}{dx} \right) dx = f(2) - f(1) \quad .$$

O primeiro passo é procurar uma função $f(x)$ cuja derivada é $2x+3$. Esta função é $f(x) = x^2 + 3x$. O estudante pode derivar $f(x)$ como exercício. Calculando $f(2) = 10$ e $f(1) = 4$ e substituindo acima, $\int_1^2 \frac{d(x^2+3x)}{dx} dx = 10 - 6$. Portanto, temos

$$\int_1^2 (2x+3)dx = 6 \quad ,$$

o que concorda com o resultado anterior desta mesma integral.

Outro exemplo é a integral da função quadrática $g(x) = x^2 - 6x + 5$ entre suas raízes 1 e 5, $\int_1^5 (x^2 - 6x + 5)dx$.

Reescrevendo tudo na forma do teorema fundamental (2.71), $\int_1^5 f'(x)dx = f(6) - f(5)$.

A função $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x$ satisfaz a relação acima. Para provas basta usar as regras de derivação (2.66), (2.329), (2.63) e (2.60),

$$\begin{aligned} (\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x)' &= (\frac{x^3}{3})' + (-3x^2)' + (5x)' \quad , \\ (\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x)' &= \frac{1}{3}(x^3)' - 3(x^2)' + 5(x)' \quad , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x)' &= (\frac{1}{3})3x^2 - 3 * 2x + 5 \quad ,\\
(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x)' &= x^2 - 6x + 5 \quad .
\end{aligned}
$$

Calculando-se $f(5) = -\frac{25}{3}$ e $f(1) = -\frac{5}{3}$ e substituindo, temos

$$
\begin{aligned}
\int\limits_5^6 (\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x)'dx &= f(6) - f(5) \quad ,\\
\int\limits_5^6 (x^2 - 5x + 6)dx &= -\frac{25}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right) \quad ,\\
\int\limits_5^6 (x^2 - 5x + 6)dx &= -\frac{20}{3} \quad .
\end{aligned}
$$

O trecho da parábola com concavidade para cima e com duas raízes está abaixo do eixo x. É por isso que a integral acima é negativa.

Há inúmeras regras para o cálculo integral. Mas descrever o cálculo integral em detalhes é apropriado apenas para livros de cálculo diferencial e integral. Com os procedimentos descritos até aqui o estudante poderá efetuar e resolver exercícios envolvendo integral.

2.5 Posição como função do tempo.

Nesta seção a cinemática propriamente dita será desenvolvida em pormenores. Construindo primeiramente o arcabouço matemático para descrever a Física, muitos aspectos do movimento ficam esclarecidos. Mesmo que o futuro professor do ensino médio não venha a explicar a cinemática com a abordagem desenvolvida neste livro, é importante que ele saiba interpretar as equações da Física.

2.5.1 Tempo como parâmetro, posição como função.

Neste capítulo está sendo explorado o movimento de um corpo pontual em uma reta espacial. O corpo está localizado em um ponto da reta espacial em um momento específico. Assim, é possível contruir um par ordenado do ponto que o corpo ocupa s_A com o intante de tempo que ele está neste ponto t_A. Na verdade, há dois pares ordenados possíveis: (s_A, t_A) e (t_A, s_A).

Um corpo não pode se localizar duas vezes no mesmo lugar. Até hoje não há provas experimentais de bilocação, ou seja, nunca foi observado um único corpo em dois lugares ao mesmo tempo. Em linguagem matemática, para cada instante t há uma única posição s. Assim, a posição é uma função do tempo, $s = f(t)$.

A notação acima não é muito usada. Em seu lugar usa-se uma notação similar a $y = y(x)$ onde y é ao mesmo tempo um valor numérico e uma função. Assim, $s = s(t)$.

Embora s como número indique a posição, s como função $s(t)$ é chamada de movimento.

Se um corpo pudesse voltar no tempo, ele poderia reencontrar-se. Ele ocuparia dois lugares ao mesmo tempo. A posição deixaria de ser uma função do tempo. Toda a Física Clássica se baseia na ideia de que o tempo segue inexoravelmente. As impossibilidades de bilocação e do tempo inverter-se estão intimamente ligados.

Um corpo pode sair do ponto A para o ponto B e retornar para A. Observando apenas para o espaço, o corpo deslocou-se Δs_{AB} e depois Δs_{BA}. O deslocamento total foi de $\Delta s_{AB} + \Delta s_{BA} = \Delta s_{AA} = 0$. Mas observando o tempo, o corpo saiu do instante t_A para t_B em Δt_{AB}. No entanto, mesmo que o corpo volte ao ponto A, o tempo não retornou para t_A. Assim, o instante que o corpo voltou a A não pode ser indexado como t_A. Representando o instante de retorno a A como $t_C > t_A$, chega-se aos intervalos de tempo $\Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} = \Delta t_{AC} > 0$ porque $\Delta t_{AB} > 0$ e $\Delta t_{BC} > 0$. Em suma, s_A está associado a dois instantes distintos t_A e t_C. Neste caso, a posição não é função do tempo. Um corpo não pode ocupar dois lugares ao mesmo tempo, mas pode estar, em dois tempos, em um mesmo lugar.

Usando o formalismo desenvolvido até agora, é interessante deixar de descrever a posição indexada pelo ponto (neste caso s_A e s_B) para descrever as posições como função do tempo. Assim $s_A = s(t_A) = s(t_C)$ e $s(t_B)$. Assim fica claro que há duas posições, mas há três instantes de tempo.

Caso o corpo pontual nunca retorne em seu movimento, cada instante de tempo estará associado a uma única posição. Somente nesta situação o tempo seria função da posição ($t = t(s)$). Como os físicos estudam sistemas os mais gerais possíveis, apenas a situação geral será estudada. A posição é uma função do tempo ($s = s(t)$), nunca o contrário.

Com os pares $(t, s(t))$ as trajetórias dos corpos ao longo do tempo podem ser representadas em gráficos. Nestes gráficos, o eixo do tempo aparece apenas a partir de $t \geq 0$. No lugar de um plano cartesiano com os eixos do tempo e da posição, há um semiplano com a semirreta horizontal do tempo e a reta vertical do espaço. É importante informar nos gráficos desenhados quais as unidades de espaço e de tempo. O eixo do tempo e a reta espacial não são adimensionais.

Abaixo há alguns exemplos de movimentos. Os nomes dos movimentos só farão sentido ao longo do capítulo:

- Movimento retilíneo uniforme (MRU) é uma função linear do tempo $s(t) = \alpha t + \beta$.

- Movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) é uma função quadrática do tempo $s(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

- O movimento $s(t) = \gamma - \alpha e^{-\beta t}$ (onde $\gamma > \alpha$) não tem um nome específico, mas descreve corpos que bóiam em um líquido e são freados por eles.

As constantes dos movimentos tem relação direta com o movimento que elas descrevem. Em outroas palavras, há um significado físico para estas constantes. Estes significados serão explorados ao longo deste capítulo.

Nas seção anterior, x e $y(x)$ eram números reais. É importante frisar que t e $s(t)$ têm dimensões respectivas de tempo e de espaço. As constantes deverão ter unidades também.

2.5.2 Análise dimensional da função $s(t)$

As funções estudadas na seção anterior relacionavam um número real x com outro número real $f(x)$. Já a função $s(t)$, é uma relação entre um instante t e uma posição $s(t)$. No lugar de dois números reais, há duas grandezas, uma com dimensão de tempo e outra, de espaço. Assim, é necessário tomar cuidado na análise dimensional.

Por exemplo, no MRU $s(t) = \alpha t + \beta$, as constantes α e β não podem ser adimensionais. O coeficiente linear da reta β deve a mesma dimensão de espaço. O termo αt também deve ter dimensão de espaço. Assim, α deve ter dimensão de espaço sobre tempo.

Outro exemplo é o MRUV $s(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$. A constante γ tem dimensão de espaço, β tem dimensão de espaço sobre tempo e αtem dimensão de espaço sobre tempo ao quadrado. Enfim, para o movimento de arraste, as constantes α e γ têm dimensão de espaço, enquanto β tem dimensão de inverso do tempo.

É comum que os livros didáticos omitam as unidades das constantes. Isto se deve ao fato de que há algum sistema de unidades implícito. Por exemplo, o Brasil adota o SI. Cabe ao estudante interpretar as dimensões das constantes. Por exemplo, no MRU, $s(t) = 5t + 3$.

As unidades estão sendo omitidas. Levando-se em conta que o SI está sendo adotado, a função acima deve ser interpretada introduzindo as unidades correspondentes. O número 3 deve corresponder a uma unidade espacial porque no lado direito da igualdade há uma grandeza espacial. Assim, o número 3 deve ser interpretado como $3m$. Já o número 5 deve ter unidade de espaço sobre tempo para que $5t$ tenha unidade de espaço. Então 5 significa $5m/s$. Para calcular a posição no instante $t = 3s$, basta escrever $t = 3$ na função acima, $s(3) = 5 * 3 + 3 = 18$.

Embora a resposta seja o número 18, a resposta deve ser interpretada como o número acrescido da unidade m: $s(3s) = 18m$.

Reescrevendo $s(t)$ com as unidades do SI:

$$s(t) = (5m/s)t + 3m$$

para $t = 3s$ chega-se a

$$s(3s) = (5m/s)(3s) + 3m = 15m + 3m = 18m$$

Com as unidades explícitas em $s(t)$, a unidade não precisa ser colocada posteriormente.

Outro exemplo de omissão de unidade aparece na função abaixo.

$$s(t) = 2t^2 + 3t + 4$$

Colocando o tempo em unidade de s a resposta fica em m. Por exemplo $t = 3s$ indica a posição $s(3) = 31$, logo $s(3) = 31m$. Colocando a equação acima com as unidades explícitas chega-se à:

$$s(t) = (2m/s^2)t^2 + (3m/s)t + 4m$$

A unidade m/s^2 foi colocada para cancelar o s^2 que aparecerá em t^2.

A vantagem da omissão da unidade é que a conta fica explícita. Aparecem apenas números. Mas a desvantagem aparece para grandezas com a unidade fora do SI. Por exemplo, no MRU acima no instante $t = 2h$ está em algum lugar. No entanto o tempo está em “horas"(h). Caso se substitua $t = 2$ na função $s(t) = 5t + 3$ chega-se à $s(2) = 13$. A resposta $s(2) = 13m$ é correta para $t = 2s$, mas não para $t = 2h$. Seria como se o corpo pontual em MRU estivesse no mesmo lugar nos instantes $2h$ e $2s$. A solução para o problema é converter o tempo para a unidade do SI, segundo (s). Assim $t = 2h = 2(3.600s) = 7.200s$. Substituindo-se $t = 7.200s$ em $s(t)$ chega-se a $s(7.200) = 2(7.200) + 3 = 14.403$. A resposta é $s(7.200s) = 14.403m$. Caso as unidades não sejam omitidas, o erro por não converter as unidades não aparece. Assim o corpo pontual no instante $t = 2h$ (sem converter a unidade) está em:

$$s(2h) = (2m/s)(2h) + 3m = 4m(h/s) + 3m$$

A unidade h não cancela a unidade s. A resposta acima está correta, mas ela não está em SI. Ela nem sequer fornece uma idéia de onde o corpo está. Há duas saídas: ou se coloca a hora em unidade de segundo ou o inverso. Para manter tudo no SI, a hora será convertida para segundo.

$$s(2h) = 4m(3.600s/s) + 3m = 4m(3.600) + 3m$$

$$s(2h) = 14.400m + 3m = 14.403m$$

Muitas vezes a unidade é omitida mas o sistema não é o SI. Por exemplo, a posição de um carro pode ser dada em quilômetros e o tempo em hora. Mas neste caso, é necessário informar de algum esta unidade. O exemplo abaixo mostra uma função $s(t)$ nestas unidades.

$$s(t) = 72t + 30 \quad (km, h)$$

Na equação acima fica claro que o espaço está em unidade de km e o tempo em h. Para usar a fórmula acima omitindo as unidades é necessário converter a posição para km e o tempo para h.

2.5.3 Posição inicial

A posição de um corpo começa a ser medida no instante em que o cronômetro é ligado $t = 0$. Através das funções $s(t)$ é possível saber qual a relação entre a posição inicial e as constantes que definem o movimento.

A posição inicial geralmente é representada como s_0. A posição inicial s_0 não deve ser confundida com $s_{\mathcal{O}}$. A posição inicial é por definição $s(0) = s_0$, sendo que s_0 pode ou não ser nula. Já $s_{\mathcal{O}}$ é a posição da origem e necessariamente $s_{\mathcal{O}} = 0$.

No caso do MRU (2.5.1), $s(0) = \beta$. Assim a posição inicial $s_0 = \beta$ é o coeficiente linear da reta. Como foi visto anteriormente, na função linear o coeficiente linear corresponde ao valor da função onde o argumento é nulo. Também é interessante notar que já havia sido previsto que β tem dimensão de espaço. Assim o MRU pode ser reescrito como:

$$s(t) = \alpha t + s_0 \tag{2.73}$$

Já para o MRUV, $s(0) = \gamma$. Analogamente, $\gamma = s_0$ na função quadrática corresponde ao valor onde o argumento é nulo. Também havia sido previsto que γ tem dimensão de espaço. O MRUV (2.5.1) pode ser reescrito como:

$$s(t) = \alpha t^2 + \beta t + s_0 \tag{2.74}$$

Para o movimento de arraste 2.5.1 $s(t) = \gamma - \alpha e^{-\beta t}$, $s_0 = \gamma - \alpha$. Como α e γ tem dimensão de espaço, a grandeza $\gamma - \alpha$ também é espacial. As constantes α e γ não são independentes, portanto, α pode ser escrita em função de γ como $\alpha = \gamma - s_0$. Reescrevendo o movimento de arraste 2.5.1.

$$s(t) = \gamma - (\gamma - s_0)e^{-\beta t} \tag{2.75}$$

O movimento de arraste tem uma peculiaridade. Quando o tempo é infinitamente longo, a exponencial $e^{-\beta t}$ tende a 0. Então

$$lim_{t\to\infty} s(t) = lim_{t\to\infty} \gamma - (\gamma - s_0)e^{-\beta t} = \gamma - (\gamma - s_0)0 = \gamma$$

Assim γ também tem um significado específico: a posição final, designada por s_f. Substituindo $\gamma = s_f$ na equação 2.75 do movimento de arraste fica:

$$s(t) = s_f - (s_f - s_0)e^{-\beta t} \tag{2.76}$$

No sistema internacional de unidades, s_0 é medido em metros (m) porque s_0 é uma grandeza espacial.

2.5.4 Velocidade média.

Em linguagem popular e até em alguns livros de ensino médio velocidade é definida como:

$$v = \frac{s_B - s_A}{t_B - t_A} \tag{2.77}$$

ou algo similar.

Os problemas da definição acima surgem quando há dois valores distintos de tempo em que o corpo se encontra na posição A ou B. É o mesmo problema enunciado na subseção anterior. Por exemplo, o corpo pode se deslocar de A para B, depois de B para C, e depois retornar para B. A expressão acima não deixa claro se t_B é o primeiro intante ou o segundo em que o corpo ocupou B.

Usando a posição como função do tempo $s = s(t)$, a ambiguidade fica removida. Os físicos definem dois tipos de velocidade: velocidade média e velocidade instântanea. A velocidade média é definida a partir da expressão 2.77, mas no lugar de deixar s e t em função dos pontos, usa-se $s = s(t)$:

$$v(t_1, t_2) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{2.78}$$

Comparando a definição de velocidade média acima e a definição de taxa de variação 2.40, a velocidade média é a taxa de variação da função $s(t)$ no intervalo entre os instantes t_1e t_2.

$$v(t_1, t_2) = T(t_1, t_2) \tag{2.79}$$

Usando as outras duas definições de taxa de variação 2.43 e 2.45, a velocidade média também pode ser definida como:

$$v(t_1, \Delta t) = \frac{s(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} \tag{2.80}$$

$$v(t_1, \Delta t) = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

A notação mais comum para a velocidade média em livros do ensino médio é a terceira definição. No entanto, ela tem os inconvenientes já citado anteriormente e mais um outro. Muitos livros didáticos definem $\Delta s = s_B - s_A$ e $\Delta t = t_B - t_A$. A definição de Δs está correta, porém é necessário informar que a posição é uma função do tempo. A expressão 2.80 é mais adequada do que a definição acima.

A velocidade média é a divisão de uma grandeza espacial por uma temporal. Como no sistema internacional de unidade SI as dimensões de espaço e de tempo são respectivamente metro (m) e segundo (s), a dimensão de velocidade no SI é metro por segundo m/s. Para interpretar o significado do m/s, tal velocidade é a necessária para percorrer um metro em um segundo. Por exemplo, um corpo com $3m/s$ tem 3 vezes a velocidade de m/s. Em outras palavras, ele percorre $3m$ em $1s$.

Outra unidade muito usada é o km/h. A interpretação desta unidade é análoga: km/h é a velocidade para percorrer $1km$ em $1h$. Comparada com a caminhada humana, esta velocidade é baixa. Uma pessoa caminha em média $5km$ em $1h$, ou seja, $5km/h$. A conversão de uma unidade na outra depende das conversões da unidade de espaço e de tempo.

$$\frac{km}{h} = \frac{1.000m}{3.600s} = \left(\frac{1}{3,6}\right)\frac{m}{s}$$

Fica claro que o km/h é uma unidade de velocidade menor do que o m/s. Para representar a mesma velocidade em km/h e em m/s, o número na segunda unidade é menor. Por exemplo, $36km/h = (36/3,6)m/s = 10m/s$.

A velocidade média de um MRU pode ser calculada a partir da função linear. A função linear $f(x) = \alpha x + \beta$ tem taxa de variação independente dos extremos dos intervalos x_1 e x_2. Analogamente o MRU $s(t) = \alpha t + s_0$ tem velocidade média (que é uma taxa de variação) independente dos instantes t_1 e t_2. Usando a definição 2.79 com a taxa de variação da função linear 2.41 no MRU 2.73 chega-se à:

$$v(t_1, t_2) = T(t_1, t_2) = \alpha$$

Assim a velocidade média em um MRU é uma constante, o coeficiente angular da reta. Como a velocidade média no MRU é constante, é possível representa-la sem o intervalo de tempo $v(t_1, t_2) = v$. Consequentemente, a constante α do MRU pode ser reinterpretada. O coeficiente angular da reta $\alpha = v(t_1, t_2) = v$ é a velocidade média no MRU. A expressão 2.73 do MRU pode ser reescrita como:

$$s(t) = vt + s_0 \tag{2.81}$$

[desenhar gráfico de $s(t)$].

A “fórmula"acima implica que o MRU depende apenas da velocidade e da posição inicial. No gráfico de $s(t)$, o coeficiente linear da reta é a posição inicial s_0 e o coeficiente angular é a velocidade média v.

A velocidade média v tem dimensão de espaço sobre tempo. Isso confirma a previsão de que α do MRU tem dimensão de espaço sobre tempo.

A velocidade média do MRUA também pode ser calculada em um caso geral. Combinando a expressão da velocidade média 2.79 com a taxa de variação da função quadrática 2.42 chega-se a:

$$v(t_1, t_2) = \alpha(t_1 + t_2) + \beta \tag{2.82}$$

Assim a velocidade média no MRUA não é constante como no MRU. A velocidade média aumenta com a soma dos tempos. A mesma velocidade média também pode ser calculada pela expressão 2.44.

$$v(t_1, \Delta t) = \alpha(2t_1 + \Delta t) + \beta \tag{2.83}$$

Os exemplos abaixo ilustrarão o conceito de velocidade média.

- Um inseto entrou em um cano e saiu pelo outro lado. Se o cano $2,5m$ de comprimento e o bala levou $0,5s$ para atravessar o cano, qual a velocidade média do inseto durante o percurso?

O inseto é aproximado por um corpo pontual e a trajetória por uma reta. A origem da reta espacial é um extremo do cano $s_0 = s(0) = 0$. O outro extremo fica com posição $s(0,5s) = 2,5m$. A velocidade média pela definição 2.78 fica:

$$v(0,(0,5)) = \frac{s(0,5) - s(0)}{0,5 - 0} = \frac{2,5 - 0}{0,5} = 5$$

a velocidade média é de $v(0,(0,5)) = 5m/s$.

- A posição de um determinado carro freando a partir da origem pode ser descrita a partir da função: $s(t) = -4t^2 + 16t$. Qual a velocidade média nos dois primeiros segundos? Apenas como curiosidade, o carro irá parar em $2s$.

O estudante pode verificar que se trata de um MRUV. As posições extremas são $s(2s) = 16m$ e $s(0) = 0$. A velocidade média é dada por 2.78:

$$v(0,2) = \frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \frac{16 - 0}{2} = 8$$

Resp.: velocidade média será $v = 8m/s$.

O estudante pode verificar que se trata de um MRUV com $\alpha = -4m/s^2$ e $\beta = 16m/s$. Usando diretamente a relação 2.82 nos instantes $t_1 = 0$ e $t_2 = 2s$.

$$v(0,2) = (-4)(0 + 2) + 16 = 8$$

o que coincide com a resposta anterior.

- Um corpo largado em queda livre segue a função $s(t) = -5t^2 + 45$. Qual a velocidade média durante a queda da altura $40m$ até o solo?

A queda do corpo termina no solo $s(t) = 0$. Apenas como curiosidade, o corpo foi lançado de uma altura de $s_0 = s(0) = 45m$. O estudante pode conferir que os instantes em que o corpo atinge a altura de $45m$ e o solo são $t = 1s$ e $t = 3s$. Aplicando 2.78.

$$v(0,3) = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{0 - 40}{2} = -20$$

Resp.: velocidade média $v(1s, 3s) = -20m/s$.

O movimento é um MRUV com $\alpha = -5m/s^2$ e $\beta = 0$ que começou em $t_1 = 1s$ e durou $\Delta t = 2s$. Assim o estudante pode usar diretamente a relação 2.83:

$$v(1, \Delta t = 2) = (-5)(2 * 1 + 2) + 0 = -20$$

o que coincide com a resposta anterior.

- Um corpo segue a função polinomial $s(t) = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$. Qual a velocidade média entre o instante zero e $1s$?

Aplicando diretamente 2.78:

$$v(0,1) = \frac{s(1) - s(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

Resp.: a velocidade média foi $v(0, 1s) = 0$. Mas isso não significa que o corpo ficou em repouso. Por exemplo, $s(0, 5s) = 0, 6875m$.

2.5.5 Velocidade instantânea.

A velocidade média é calculada entre dois instantes de tempo. A taxa de variação só existe para $t_1 \neq t_2$, caso contrário, há uma indeterminação (ver subseção "cálculo diferencial"). No entanto, intuitivamente, uma partícula tem uma velocidade em cada instante específico do tempo. Para solucionar esta questão, o físico Isaac Newton criou o conceito de velocidade instântanea. Em termos modernos, a velocidade instântanea em um instante t é definida como como a velocidade média entre os instantes t e t_m, onde t_m é um instante infinitamente próximo de t.

$$v(t) = lim_{t_m \to t} \frac{s(t_m) - s(t)}{t_m - t} \tag{2.84}$$

Comparando a expressão da velocidade instântanea 2.84 e o conceito de derivada 2.48, a velodade instântanea pode ser definida como a derivada da função $s(t)$

$$v(t) = s'(t) = lim_{t_m \to t} \frac{s(t_m) - s(t)}{t_m - t}$$

A velocidade instantânea também pode ser definida através do limite na taxa de variação das expressões 2.49 e 2.50.

$$v(t) = s'(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$v(t) = s'(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Uma forma muito comum de apresentar a velocidade instântanea é através da notação 2.51.

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} \tag{2.85}$$

Os físicos usam muito mais o conceito de velocidade instantânea do que de velocidade média. O próprio nome velocidade média se deve ao fato desta ser a média das velocidades instantâneas. Quando o termo velocidade é empregado sem especificação, a velocidade é a “velocidade instântanea". Daqui em diante, o termo velocidade significará “velocidade instântanea", salvo menção emplícita da velocidade média.

Quando $v(t) > 0$, a função $s(t)$ é crescente porque $v(t)$ é a derivada de $s(t)$. Os físicos classificam que o movimento é progressivo. Analogamente, para $v(t) < 0$, $s(t)$ é descrescente e o movimento é classificado como retrógrado. A condição $v(t) = 0$ corresponde ao repouso (ainda que seja um repouso instantâneo).

Através das regras de derivação, é possível calcular as velocidades em vários tipos de movimento. Para o MRU 2.81 aplica-se a regra 2.58:

$$v(t) = \frac{d(vt + s_0)}{dt} = v \tag{2.86}$$

Assim, a constante v do MRU é tanto a velocidade média entre dois instantes como a velocidade instântanea em cada instante.

Para o MRUV 2.74, a velocidade instantânea é dada pela regra 2.61:

$$v(t) = (\alpha t^2 + \beta t + s_0)' = 2\alpha t + \beta$$

Para o MRUV, a velocidade instântanea muda a cada instante. É interessante caracterizar a constante β. A velocidade instantânea inicial é $v(0) = \beta$. Assim $\beta = v_0$ é a velocidade inicial. Anteriormente a dimensão de β já ficara indicada como espaço sobre tempo. O MRUV fica redefinido como:

$$s(t) = \alpha t^2 + v_0 t + s_0 \tag{2.87}$$

e a velocidade do MRUV como:

$$v(t) = 2\alpha t + v_0 \tag{2.88}$$

Enfim, para o movimento de arraste 2.76, a velocidade é dada pelas regras 2.67, 2.59, 2.329 e 2.69:

$$v(t) = (s_f - (s_f - s_0)e^{-\beta t})' = (s_f)' + (-(s_f - s_0)e^{-\beta t}))'$$

$$v(t) = 0 - (s_f - s_0)(e^{-\beta t})' = -(s_f - s_0)(-\beta)(e^{-\beta t})$$

$$v(t) = \beta(s_f - s_0)e^{-\beta t} \tag{2.89}$$

A velocidade inicial é dada por $v_0 = v(0) = \beta(s_f - s_0)$, então $\beta = \frac{v_0}{s_f - s_0}$. É interessante notar que a dimensão de β deveria ser de espaço sobre tempo. A divisão de velocidade (espaço sobre tempo) por um espaço tem dimensão de 1 sobre o tempo, o que confirma a previsão. Reescrevendo a posição 2.76 e a velocidade 2.341 com a definição de $\beta = \frac{v_0}{s_f - s_0}$:

$$s(t) = s_f - (s_f - s_0)e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.90}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.91}$$

É interessante ressaltar que no limite em que o tempo vai a infinito, a exponencial $e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}$ tende a 0. Assim, a velocidade no movimento de arraste tende a zero.

A definição $v(t) = s'(t)$ pode ser substituída no teorema fundamental do cálculo 2.71:

$$\int_{t_1}^{t_2} s'(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1) \tag{2.92}$$

Esta relação será analisada em casos posteriores. A principal utilidade desta expressão é identificar a variação de espaço $s(t_2) - s(t_1)$ a partir de gráficos de $v(t)$.

Os exemplos abaixo ilustram bem os cálculos de velocidade instântanea:

- Um MRU com função $s(t) = 4t + 3$ tem velocidade instantanea em qualquer instante de tempo de $v(t) = 4m/s$ de acordo com a relação 2.86.

- Um corpo arremessado para cima com velocidade de $40m/s$ tem as posições dadas pelo MRUV $s(t) = -5t^2 + 40$. De acordo com 2.339, a velocidade instantânea é de $v(t) = -10t + 40$. Acompanhando o movimento a cada $1s$, as posições e as velocidades até o retorno do corpo ao solo ficam:

$s(t)$	$v(t)$
$s(0) = 0$	$v(0) = 40m/s$
$s(1s) = 35m$	$v(1s) = 30m/s$
$s(2s) = 60m$	$v(2s) = 20m/s$
$s(3s) = 75m$	$v(3s) = 10m/s$
$s(4s) = 80m$	$v(4s) = 0$
$s(5s) = 75m$	$v(5s) = -10m/s$
$s(6s) = 60m$	$v(6s) = -20m/s$
$s(7s) = 35m$	$v(7s) = -30m/s$
$s(8s) = 0$	$v(8s) = -40m/s$

- Uma lancha que navega no mar tem MA dado por $s(t) = 20 - 10e^{-t}$. De acordo com a relação 2.343, a velocidade instantânea é de $v(t) = 10e^{-t}$. As posições e velocidades nos primeiros quatro segundos e em um tempo infinitamente longo são de:

$s(t)$	$v(t)$
$s(0) = 10m$	$v(0) = 10m/s$
$s(1s) = 16,32m$	$v(1s) = 3,68m/s$
$s(2s) = 18,65m$	$v(2s) = 1,35m/s$
$s(3s) = 19,50m$	$v(3s) = 0,50m/s$
$s(4s) = 19,82m$	$v(4s) = 0,18m/s$
$s(t \to \infty) = 20m$	$v(t \to \infty) = 0$

2.5.6 Aceleração.

A variação da velocidade apresenta propriedades físicas muito importantes. Estas propriedades serão vistas posteriormente. Por isso, é importante definir a derivada da velocidade. Esta derivada é chamada de aceleração. Usando a notação 2.51.

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

A dimensão da aceleração é de velocidade sobre tempo, ou equivalentemente, espaço sobre tempo ao quadrado. No SI a unidade de aceleração é m/s^2. A aceleração m/s^2 corresponde a um aumento de velocidade de $1m/s$ a cada $1s$, ou seja, $(m/s)/s = m/s^2$. Por exemplo, uma aceleração $10m/s^2$ corresponde a um aumento de velocidade de $10m/s$ a cada $1s$.

Outra unidade muito usada é o km/hs. Esta unidade corresponde a um aumento de $1km/h$ na velocidade a cada $1s$, ou seja, $(km/h)/s = km/hs$. Para converter esta aceleração em m/s^2 o procedimento é análogo ao que foi feito para conversão de velocidade.

$$\frac{km}{hs} = \frac{1.000m}{3600s^2} = \left(\frac{1}{3,6}\right)\frac{m}{s^2}$$

O fator de conversão de km/hs para m/s^2 é o mesmo de km/h para m/s

.

Usando as definições de derivada 2.48, 2.49 e 2.50, a aceleração pode ser definida como:

$$a(t) = v'(t) = lim_{t_m \to t}\frac{v(t_m) - v(t)}{t_m - t}$$

$$a(t) = v'(t) = lim_{\Delta t \to 0}\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$a(t) = v'(t) = lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

A aceleração de um MRU é dada pela regra 2.59 na derivada da velocidade 2.86:

$$a(t) = v'(t) = (v)' = 0 \tag{2.93}$$

Assim o MRU é caracterizado pela aceleração nula.

No caso do MRUV, a aceleração é dada pelas regra 2.58 na velocidade 2.340:

$$a(t) = \frac{d(2\alpha t + v_0)}{dt} = 2\alpha$$

onde o coeficiente linear acima é 2α, não α.

A aceleração no MRUV é constante. É por isso que ele é chamado de MRUV. Há uma variação uniforme na velocidade. Por ser uma função constante, $a(t)$ pode ser designada simplesmente por $a(t) = a$. Então $2\alpha = a$, logo $\alpha = \frac{a}{2}$. A previsão inicial de que a unidade de α era espaço sobre tempo ao quadrado fica confirmada. Substituindo $\alpha = \frac{a}{2}$ nas expressões de $s(t)$ 2.339 e $v(t)$ 2.340 chega-se a:

$$s(t) = \left(\frac{a}{2}\right)t^2 + v_0 t + s_0 \tag{2.94}$$

$$v(t) = at + v_0 \tag{2.95}$$

$$a(t) = a \tag{2.96}$$

Caso a aceleração seja nula ($a = 0$) as equações do MRUV reduzem-se ao MRU com $v_0 = v$. Assim o MRU pode ser considerado um caso particular de MRUV.

No caso do movimento de arraste, a aceleração é dada pelas regras 2.329 e 2.69 na velocidade 2.343:

$$a(t) = \frac{d(v_0 e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t})}{dx} = v_0 \frac{d(e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t})}{dx}$$

$$a(t) = v_0 \left(- \left(\frac{v_0}{s_f - s_0} \right) \right) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}$$

$$a(t) = -\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0} \right) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.97}$$

Quando $a(t) > 0$ e $v(t) > 0$, a velocidade está aumentando porque $a(t)$ é a derivada de $v(t)$. Além disso, o módulo da velocidade $|v(t)|$ está aumentando. Já para $a(t) > 0$ e $v(t) < 0$, a velocidade está aumentando, mas o módulo está diminuindo porque o corpo está indo de uma velocidade negativa para o repouso. Analogamente, para $a(t) < 0$ e $v(t) > 0$, a velocidade está diminuindo e o módulo da velocidade também. Enfim, se $a(t) < 0$ e $v(t) < 0$, a velocidade está diminuindo, mas o módulo da velocidade aumenta. Movimentos onde o módulo da velocidade aumenta ou diminui são classificados respectivamente como acelerados ou retardados. Em resumo:

- Movimento acelerado $\frac{v(t)}{a(t)} > 0$
- Movimento retardado $\frac{v(t)}{a(t)} < 0$

Analogamente ao que foi feito com a velocidade, a definição $a(t) = v'(t)$ pode ser substituída no teorema fundamental do cálculo 2.71:

$$\int_{t_1}^{t_2} v'(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1) \tag{2.98}$$

Esta relação será analisada em casos posteriores. A principal utilidade desta expressão é identificar a variação de espaço $v(t_2) - v(t_1)$ a partir de gráficos de $a(t)$.

É interessante ilustrar alguns exemplos de aceleração instantânea:

- O movimento $s(t) = 118t + 345$ é um MRU, então de acordo com 2.345 a aceleração é $a(t) = 0$

- Um corpo lançado em queda livre de uma altura de $20m$ descreve um MRUV $s(t) = -5t^2 + 20$. De acordo com 2.348 a aceleração do corpo é constante $a(t) = -10m/s^2$.

- Usando o mesmo movimento de arraste da seção anterior ($s(t) = 20 - 10e^{-t}$ e $v(t) = 10e^{-t}$), a relação 2.349, a aceleração é de $a(t) = -10e^{-t}$. Comparando posição, velocidade e aceleração nos quatro primeiros segundos e em um tempo infinitamente longo:

$s(t)$	$v(t)$	$a(t)$
$s(0) = 10m$	$v(0) = 10m/s$	$a(0) = -10m/s^2$
$s(1s) = 16,32m$	$v(1s) = 3,68m/s$	$a(0) = -3,68m/s^2$
$s(2s) = 18,65m$	$v(2s) = 1,35m/s$	$a(0) = -1,35m/s^2$
$s(3s) = 19,50m$	$v(3s) = 0,50m/s$	$a(0) = -0,50m/s^2$
$s(4s) = 19,82m$	$v(4s) = 0,18m/s$	$a(0) = -0,18m/s^2$
$s(t \to \infty) = 20m$	$v(t \to \infty) = 0$	$a(t \to \infty) = 0$

2.5.7 Comentários sobre o movimento retilíneo uniforme.

O movimento retilíneo uniforme (MRU) pode ser reconhecido tanto pelas equações da posição, velocidade e aceleração como pelos gráficos correspondentes. Reescrevendo 2.81, 2.86 e 2.345:

$$s(t) = vt + s_0 \tag{2.99}$$

$$v(t) = v \tag{2.100}$$

$$a(t) = 0 \tag{2.101}$$

Se $v > 0$, o movimento é progressivo. Caso $v < 0$, o movimento é retrógrado. Enfim, se $v = 0$ o corpo está em repouso. Não se trata de um repouso instantâneo, mas permanente.

O instante que o corpo em MRU cruza a origem $s(t) = 0$ é dado pela raíz da função linear 2.33 com $\alpha = v$ e $\beta = s_0$.

$$t_{\mathcal{O}} = -\frac{s_0}{v} \tag{2.102}$$

onde $t_{\mathcal{O}}$ não é o instante inicial, mas àquele em que o corpo cruza a origem.

Como os instantes considerados na cinemática são sempre positivos, então $\frac{s_0}{v}$ deve ser negativo ou nulo. Assim há apenas quatro possibilidades:

- $s_0 > 0$ e $v < 0$: neste caso o corpo tem posição positiva e o movimento é retrógrado, de modo que o corpo cruzará a origem. Caso $s_0 > 0$ e $v > 0$ o corpo apenas se afasta da origem rumo a $+\infty$

- $s_0 < 0$ e $v > 0$: neste caso o corpo tem posição negativa e o movimento é progressivo, de modo que o corpo cruzará a origem. Caso $s_0 < 0$ e $v < 0$ o corpo apenas se afasta da origem rumo a $-\infty$

- $s_0 = 0$ e $v < 0$ ou $v > 0$: neste caso o corpo partiu da própria origem, cruzando-a no intante $t = 0$. O próprio resultado 2.354 confirma isso: $t_{\mathcal{O}} = 0$

- $s_0 = 0$ e $v = 0$: neste caso o corpo está em repouso na própria origem, em todos os instantes de tempo ($s(t) = 0$). A expressão 2.354 não pode ser aplicada porque redunda em indeterminação. Na descrição da função linear já havia sido previsto que uma função constante nula tem como raíz todo o eixo x.

Identificando o MRU pelos gráficos, a função $s(t)$ aparece como uma reta. O ponto em que a reta cruza o eixo s é o coeficiente linear. Logo, o ponto em que a reta cruza o eixo s é a posição inicial s_0. O coeficiente linear é a velocidade v. Se a inclinação da reta é positiva,o movimento é progressivo. Analogamente, se a inclinação da reta é negativa,o movimento é retrógrado. Enfim, se a reta é horizontal, há repouso.

[desenhar 3figuras: $v > 0$,$v < 0$ e $v = 0$]

As possibilidades do instante em que o corpo cruza a origem podem ser reinterpretadas geometricamente.

- $s_0 < 0$ e $v > 0$: neste caso a reta começa na parte positiva do eixo s, mas com a inclinação negativa, a reta encontra o eixo t no instante dado por 2.354. Caso $s_0 < 0$ e $v < 0$, a reta só poderá cruzar o eixo t na parte negativa deste eixo, o que está sendo excluído

- $s_0 > 0$ e $v < 0$: neste caso a reta começa na parte negativa do eixo s, mas com a inclinação positiva, a reta encontra o eixo t no instante dado por 2.354. Caso $s_0 > 0$ e $v > 0$, a reta só poderá cruzar o eixo t na parte negativa deste eixo, o que está sendo excluído

- $s_0 = 0$ e $v < 0$ ou $v > 0$: neste caso a reta cruza o próprio cruzamento dos eixos s e t. Assim o instante do cruzamento é o próprio $t = 0$.

- $s_0 = 0$ e $v = 0$: neste caso a reta do movimento coincide com o eixo t. Em todos os instantes de tempo o corpo está na posição s_0.

A função $v(t) = v$ do MRU é uma função constante. O gráfico de $v(t)$ é uma reta horizontal. Se o movimento é progressivo ($v > 0$), a reta horizontal fica acima do eixo t. Já se o movimento é retrógrado ($v < 0$), a reta horizontal fica abaixo do eixo t. Enfim, se o corpo está em repouso ($v = 0$), a reta do movimento coincide com o eixo t.

[desenhar gráficos de $v(t)$].

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

Caso o movimento seja progressivo, a superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente acima do eixo t. Assim a integral acima é positiva ($s(t_2) - s(t_1) > 0$) e consequentemente $s(t_2) > s(t_1)$. Inversamente, se o movimento é retrógrado, a reta fica abaixo do eixo t, a integral é negativa e $s(t_2) > s(t_1)$. Enfim, se $v = 0$, a reta concide com o eixo t, não tendo área abaixo e nem acima. Assim a integral é nula e $s(t_2) - s(t_1) = 0$, logo $s(t_2) = s(t_1)$.

Também é interessante calcular a integral 2.344 a partir de 2.81.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = vt_2 + s_0 - (s(t_1) + s_0)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = vt_2 + s_0 - vt_1 - s_0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = v(t_2 - t_1)$$

A fórmula acima confirma toda a interpretação do gráfico de $v(t)$.

Enfim $a(t) = 0$ é uma função constante. O gráfico de $a(t) = 0$ é uma reta que coincide com o eixo t. Geralmente este gráfico não costuma ser representado.

Eis dois exemplos de aplicação do MRU:

- Um home com paraquedas aberto cai em linha reta com velocidade constante a partir de uma altura de $200m$ com velocidade constante de aproximadamente $8m/s$. Em quanto tempo o homem atinge o solo?

Existem duas formas de resolver este problema. A primeira forma consiste em colocar a origem no solo e o sentido positivo para cima. Assim $s_0 = 200m$ e $v = -8m/s$ porque o corpo cai de cima para baixo. A equaçõa horária pode ser escrita como:

$$s(t) = -8t + 200$$

Como o solo é a origem da reta, o momento que o corpo atinge o solo é a raíz da função 2.354:

$$t = -\frac{s_0}{v_0} = -\frac{200}{(-8)} = 25$$

Resp.: $t = 25s$

A outra forma de resolver o problema consiste em colocar o sentido positivo da reta de cima para baixo e a origem do sistema, o local onde o corpo se encontra. Assim $s_0 = 0$ e $v = 8m/s$. A equação horária fica:

$$s(t) = 8t$$

A posição do solo fica $s(t) = 200m$. Assim é necessário encontrar o instante em que $s(t) = 200$.

$$200 = 8t \Rightarrow t = \frac{200}{8} = 25$$

O instante é o mesmo, como era de se esperar.

- Um carro sai do $km - 80$ de uma estrada com uma velocidade média de $72km/h$ e anda estrada à frente. Onde estará o carro após meia hora?

O carro não tem velocidade constante. No entanto, com as acelerações e desacelerações ao longo do tempo, o modelo para descrever movimento do carro pode ser o de uma velocidade constante. Além disso, a estrada não é necessariamente reta. Mas como o problema não envolve os típicos problemas de movimento curvo (como a aceleração centrípeta), a estrada será aproximada por uma reta. Não é conveniente colocar a origem da reta espacial no carro no momento de sua partida. O sistema de localização da estrada é feito através de placas fixadas na estrada. Colocar a origem da reta espacial $km - 80$ é um desperdício de informação espacial. Ao deixar a origem no $km - 0$, o carro poderá ser localizado através das placas da estrada. Com $s_0 = 80km$ e $v = 72km/h$, a equação horária do movimento em unidades de km e h é

$$s(t) = 72t + 80 \quad (km; h)$$

após meia hora o carro estará em

$$s(0,5) = 72(0,5) + 80 = 36 + 80 = 116$$

o carro se encontrará em $s(0,5h) = 116km$, ou na linguagem rodoviária, no $km - 116$.

O problema pode ser reescrito em SI. Convertendo $s_0 = 80km = 80.000m$ e $v = 72km/h = 20m/s$, a equação horária fica:

$$s(t) = 20t + 80.000$$

após meia hora ($t = 0,5h = 1.800s$) o carro estará em

$$s(0,5) = 20(1.800) + 80.000 = 36.000 + 80.000 = 116.000$$

o carro estará em $s(1.800s) = 116.000m$, o que coincide com a resposta em km.

2.5.8 Comentários sobre movimento retilíneo uniformemente variado.

O movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) pode ser reconhecido tanto pelas equações da posição, velocidade e aceleração como pelos gráficos correspondentes. Reescrevendo 2.346, 2.347 e 2.348:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0 \tag{2.103}$$

$$v(t) = at + v_0 \tag{2.104}$$

$$a(t) = a \tag{2.105}$$

Há uma relação importante entre a posição e a velocidade. Isolando o tempo em 2.356:

$$t = \frac{v(t) - v_0}{a}$$

Substituindo o tempo acima em 2.355:

$$s(t) = \frac{a}{2}\left(\frac{(v(t) - v_0)}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{(v(t) - v_0)}{a}\right) + s_0$$

$$s(t) = \frac{v^2(t) - 2v(t)v_0 + v_0^2}{2a} + \frac{(v_0 v(t) - v_0^2)}{a} + s_0$$

$$s(t) = \frac{v^2(t) - 2v(t)v_0 + v_0^2 + 2v_0 v(t) - 2v_0^2}{2a} + s_0$$

$$s(t) = \frac{v^2(t) - v_0^2}{2a} + s_0$$

Para cada instante de tempo t, há uma única posição $s(t)$ para cada $v(t)$. Assim a posição no MRUV é uma função da velocidade: $s = s(v)$. Reescrevendo a relação acima:

$$s(v) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} + s_0 = \left(\frac{1}{2a}\right)v^2 - \frac{v_0^2}{2a} + s_0 \tag{2.106}$$

A relação acima é denominada "relação de Torricceli"embora a forma acima não seja muito popular. Isolando v na relação acima (omitindo que s é função de v):

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) \tag{2.107}$$

esta é a forma mais comum da relação de Torricceli. É interessante notar que para cada s há duas velocidades $\pm v$ correspondentes, de modo que a velocidade não é função da posição. Em suma, para cada velocidade, há uma única posição, mas para uma posição podem haver duas velocidades. O significado físico desta relação é que no MRUV, o corpo poderá passar duas vezes pelo menos ponto s com velocidades opostas $\pm\sqrt{v_0^2 + 2a(s - s_0)}$.

Os gráficos de $s(t)$ será uma parábola, cuja a concavidade depende de a. Já o gráfico de $v(t)$ é uma reta cujo coeficiente linear é a velocidade inicial v_0 e o coeficiente angular é a. Enfim, o gráfico de $a(t)$ é uma reta horizontal na altura a. O gráfico de $s(v)$ é uma parábola cuja concavidade depende de $\frac{1}{2a}$.

[desenhar os gráficos descritos acima].

Um instante de muito interesse no MRUV é aquele em que o corpo está em repouso instantâneo. Conforme a relação 2.57 a derivada no vértice da função quadrática é nula. Como a derivada da posição é a velocidade, a velocidade no vértice é nula. Analisando o vértice da função quadrática, $\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = v_0$ e $\gamma = s_0$. Assim o vértice das expressões 2.35 e 2.36 ficam respectivamente:

$$t_v = -\frac{v_0}{a} \tag{2.108}$$

$$s_v = s(-\frac{v_0}{a}) = -\frac{v_0^2}{2a} + s_0 \tag{2.109}$$

Como o tempo na cinemática só é considerado para $t > 0$, o vértice só será atingido se $t_v \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{v_0}{a}\right) \leq 0$. Assim o corpo só atingirá o vértice se o movimento começa retardado ou em repouso. O significado físico desta conclusão é interessante. O vértice do MRUV corresponde ao instante onde o corpo está em repouso. Se o movimento é retardado o corpo entrará em repouso. No caso do MRUV este repouso será apenas no único instante t_v. Se o corpo começa a partir do repouso ($v_0 = 0$),o instante em que o corpo está em repouso é o próprio $t = 0$ ($t_v = -\frac{0}{a} = 0$). Mas se o corpo começa acelerado, o módulo da velocidade só aumenta e o corpo não atinge o repouso.

O instante que o corpo em MRUV cruza a origem $s(t) = 0$ depende do valor das constantes da funções quadrática. Neste caso $\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = v_0$ e $\gamma = s_0$. De acordo com 2.4.3, 2.4.3 e 2.4.3 os instantes em que o corpo cruza a origem são:

- se $v_0^2 - 2as_0 > 0$, há duas raízes: $t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2as_0}}{2\alpha}$
- se $v_0^2 - 2as_0 = 0$, há uma única raíz que coincide com o vértice: $t = \frac{v_0}{2\alpha}$
- se $v_0^2 - 2as_0 < 0$, não há raízes reais

Como os instantes considerados na cinemática são sempre positivos, então há uma série de restrições em relação à t_0. As possibilidades são tantas que uma análise similar a que foi feita para o MRU não poderá ser feita. Assim, para ilustrar o MRUV serão usados alguns exemplos genéricos.

Movimento de saída de um corpo a partir do repouso.

A aceleração de um atleta na saída da corrida ou de um veículo automotor pode ser descrita por um MRUV nos primeiros instantes da arrancada. O corpo não poderá acelerar indefinidamente, o que torna a descrição do MRUV inadequada para longos intervalos de tempo. A posição inicial do corpo pontual é identificada com a origem da reta espacial ($s_0 = 0$). No instante zero o corpo ainda está em repouso, logo $v_0 = 0$. A aceleração é positiva $a > 0$. Substituindo estas relações em 2.355, 2.356, 2.357 e 2.358 em chega-se a:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 \tag{2.110}$$

$$v(t) = at \tag{2.111}$$

$$a(t) = a \tag{2.112}$$

$$s(v) = \frac{v^2}{2a} \tag{2.113}$$

Como o movimento é acelerado ($\frac{v_0}{a} > 0$) o corpo não entra em repouso. Observando as condições 2.15.7, 2.15.7 e 2.15.7, $v_0^2 - 2as_0 = 0 - 0 = 0$, o corpo cruza a origem uma única vez no instante $t_{\mathcal{O}} = \frac{-v_0}{a} = 0$. Assim o corpo só cruza a origem no instante extato de sua saída $t = 0$. O movimento pode ser visualizado através dos gráficos:

[desenhar os gráficos: $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ e $s(v)$]

Por exemplo, um carro hipotético é projetado para ter aceleração de $2m/s^2$. O físico poderá fazer três tipos de testes diferentes para a aceleração:

1. O primeiro teste consiste em acelerar o carro e comparar a distância que o carro andou com a velocidade fornecida pelo velocímetro. A relação entre velocidade e posição é 2.365. Se o carro tem aceleração de $2m/s^2$ a relação será $s(v) = \frac{v^2}{4}$. Por exemplo, quando a velocidade atingir $30m/s$, a posição do carro deverá ser $s = 225m$. A única coisa que o físico deverá ficar atento é que o velocímetro do carro indica a velocidade em km/h. Assim a velocidade que o físico deverá ver no velocímetro será $30m/s = 30 * 3,6km/h = 108km/h$.

2. O segundo teste consiste em observar o velocímetro e um cronômetro durante a aceleração do carro. A relação 2.363 indica que para $a = 2m/s^2$ vale $v(t) = 2t$. Novamente o físico deverá ficar atento à conversão de unidades entre km/h e m/s. Por exemplo, em $10s$,

o carro deverá ter velocidade de $v(10s) = (2m/s^2)(10s) = 20m/s = 20 * 3,6km/h = 72km/h$.

3. O terceiro teste é adequado para um observador exter ao carro sem acesso ao velocímetro. Ele consiste em comparar a distância que o carro andou com o tempo registrado em um cronômetro. A relação 2.362 para $a = 2m/s^2$ fica $s(t) = t^2$. Por exemplo, após $5s$ o carro deverá estar na posição $s(5s) = 25m$.

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente acima do eixo t. Assim a integral é positiva $(s(t_2) - s(t_1) > 0)$ e consequentemente $s(t_2) > s(t_1)$. O movimento é progressivo. A superfície é um triângulo retângulo caso $t_1 = 0$, caso contrário ela é um paralelograma.

Também é interessante calcular a integral 2.344 a partir de 2.362.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \frac{a}{2}t_2^2 - \frac{a}{2}t_1^2$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \frac{a}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

A fórmula acima confirma toda a interpretação do gráfico de $v(t)$. Como $t_2 > t_1$, a integral é positiva. Se $t_1 = 0$ a integral é igual à área de um triângulo retângulo com catetos a e t_2. Já se $t_1 \neq 0$, a integral é a área de um paralelograma de bases t_1 e t_2 e altura a.

Tomando agora a integral 2.350:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente acima do eixo t. Assim a integral é positiva ($v(t_2) - v(t_1) > 0$) e consequentemente $v(t_2) > v(t_1)$. O movimento é acelerado. A superfície é um retângulo.

Para calcular a integral 2.350 a partir de 2.363 basta.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = at_2 - at_1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = a\left(t_2 - t_1\right)$$

Como $t_2 > t_1$, a integral é positiva. A integral é igual à área de um retângulo com base $(t_2 - t_1)$ e altura a.

É importante frisar que o MRUV não poderá descrever este tipo de movimento infinitamente. Quando o tempo cresce infinitamente, as expressões 2.362 e 2.363 indicam posição e velocidade infinitas.

Freamento de um corpo.

Outra situação descrita pelo MRUV é o freamento de algum objeto sobre o solo através do atrito. Após entrar atingir o repouso, o corpo deixa de cumprir um MRUV, assumindo um repouso permanente. É por isso que descrição do MRUV é inadequada para descrever o freamento após a parada do corpo. A posição inicial do corpo pontual é identificada com a origem da reta espacial ($s_0 = 0$). No instante zero o corpo começa a frear e tem velocidade positiva $v_0 > 0$. A aceleração é negativa $a < 0$ porque para que o movimento seja retardado $\frac{v_0}{a} < 0$. Substituindo estas relações em 2.355, 2.356, 2.357 e 2.358 em chega-se a:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t \tag{2.114}$$

$$v(t) = at + v_0 \tag{2.115}$$

$$a(t) = a \tag{2.116}$$

$$s(v) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \tag{2.117}$$

Como o movimento é retardado ($\frac{v_0}{a} < 0$) o corpo entra em repouso, o que já era esperado de antemão. O instante t_f e a posição s_f em que o corpo entra em repouso são dados pelas relações 2.360 e 2.361. Como $s_0 = 0$ as relações ficam:

$$t_f = -\frac{v_0}{a} \tag{2.118}$$

$$s_f = -\frac{v_0^2}{2a} \tag{2.119}$$

O MRUV não poderá descrever o freamento para $t > t_f$ porque para além dele o corpo passa a descrever uma função constante $s(t) = s_f$. As próprias relações 2.366, 2.367 e 2.368 só tem validade para $0 < t < t_f$.

Observando as condições 2.15.7, 2.15.7 e 2.15.7, $v_0^2 - 2as_0 = v_0^2 > 0$, o corpo cruza a origem duas vezes nos instantes $t_{\mathcal{O}} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2}}{a} = \frac{-v_0 \pm |v_0|}{a} =$

$\frac{-v_0 \pm v_0}{a}$. Assim o corpo cruza a origem nos instantes $t = 0$ (começo do freamento) e em $t = -\frac{2v_0}{a} > 0$ (porque $a < 0$). Este segundo instante será excluído porque $t = -\frac{2v_0}{a} > -\frac{2v_0}{a} = t_f$. O movimento pode ser visualizado através dos gráficos. É importante ressaltar que a parábola descrita por $s(t)$ é incompleta, começando na origem do plano e acabando no vértice. Isso se deve ao fato de que não se usa o MRUV para $t > t_f$. As curvas dos gráficos de $v(t)$ e $a(t)$ também são interrompidos.

[desenhar os gráficos: $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ e $s(v)$]

Por exemplo, dois freios hipotéticos devem frear um carro com um deslisamento máximo de $5m$ a uma velocidade de $54km/h$. Em outras palavras, após o motorista pisar no pedal o carro só poderá andar por $30m$. Um freio tem de modo que após pisar no pedal é projetado para ter aceleração de $-3m/s^2$. Um segundo freio deixa o carro em repouso em $3s$. Algum dos dois freios atenderá a exigência? Qual o freio mais eficiente?

1. O primeiro freio tem a informação da aceleração. A relação expressão que relaciona o deslizamento do carro e a aceleração é 2.371. O físico só deve se precaver em fazer as conversões de unidade. Usando $a = -3m/s^2$ e $v_0 = 54km/h = (54/3,6)m/s = 15m/s$ na relação 2.371 chega-se a $s = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{225}{(-6)} = 37,5$. Assim o veículo só entrará em repouso em $s = 37,5m$. O freio não passou no teste.

2. O segundo freio contêm informações do tempo de freagem. O tempo de freagem é $t_f = 3s$. Substituindo os dados em 2.370: $t_f = -\frac{v_0}{a} \Rightarrow a = -\frac{v_0}{t_f} = -\frac{15}{3} = -5$. Assim a aceleração de freamento é $a = -5m/s^2$. Usando este dado em 2.369: $s_f = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{225}{(-10)} = 22,5$. O segundo freio passou no teste porque o carro deslizou $s_f = 22,5m < 30m$ para

frear

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

onde $t_2 < t_f$.

A superfície entre a reta $v(t)$ e o eixo t fica inteiramente acima do eixo t. Assim a integral é positiva ($s(t_2) - s(t_1) > 0$) e consequentemente $s(t_2) > s(t_1)$. O movimento é progressivo. A superfície é um paralelogramo.

Tomando agora a integral 2.350:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente abaixo do eixo t porque $a < 0$. Assim a integral é negativa ($v(t_2) - v(t_1) < 0$) e consequentemente $v(t_2) < v(t_1)$. O movimento é retardado. A superfície é um retângulo abaixo do eixo t.

[desenhar gráficos de $v(t)$ e $a(t)$ com as integrais]

Queda livre.

O exemplo mais comum de MRUV é o movimento de um corpo após ser largado em repouso ou ser arremessado verticalmente. Este tipo de movimento é chamado de queda livre. As limitações do modelo de MRUV para descrever a queda livre são três.

1. Em primeiro lugar, o atrito com o ar complica bastante a descrição do movimento, alterando radicalmente $s(t)$. Por exemplo, o atrito com o ar faz com que uma pessoa de paraquedas caia em MRU.

2. Após atingir o solo, o corpo para de acelerar verticalmente para baixo e entra em repouso ou ricochoteia o solo.

3. Em grandes altitudes a aceleração da gravidade apresenta variações significaticas, excluindo por definição uma descrição do movimento com aceleração constante. A altitude onde a aprximação do MRUV é “boa"é da ordem de alguns quilômetros acima do solo.

Assim a aproximação de MRUV para queda livre é restrita para situações onde o atrito com o ar é desprezível, antes que o solo seja atingido e para as proximidades da crosta terrestre. A reta espacial é vertical com o sentido para cima como positivo. O ponto em que a reta espacial toca o solo é a origem da reta espacial $s_{\mathcal{O}} = 0$. A posição inicial do corpo pontual s_0 é identificada com a altura a partir do qual o corpo é arremessado. O corpo pode ser arremessado do solo ou acima dele, então $s_0 \geq 0$. O corpo pode ser arremessado para cima ($v_0 > 0$) ou para baixo ($v_0 < 0$), ou ainda largado a partir do repouso ($v_0 = 0$). A aceleração é negativa $a < 0$ porque o movimento seja retardado quando o corpo está subindo ($\frac{v}{a} < 0 \Rightarrow v > 0$) e acelerado quando está caindo ($\frac{v}{a} > 0 \Rightarrow v < 0$) . Para facilitar a interpretação da aceleração negativa, os físicos definem a aceleração de queda livre como $a = -g$ onde $g > 0$ é denominada “aceleração da gravidade". O valor da aceleração da gravidade é de aproximadamente $g \approx 9,8m/s^2$. Para facilitar cálculos, os livros didáticos geralmente usam o valor $g = 10m/s^2$. Substituindo estes valores em 2.355, 2.356, 2.357 e 2.358 em chega-se a:

$$s(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + s_0 \tag{2.120}$$

$$v(t) = -gt + v_0 \tag{2.121}$$

$$a(t) = -g \tag{2.122}$$

$$s(v) = -\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2g}\right) + s_0 \tag{2.123}$$

Se o corpo é arremessado para cima ($v_0 > 0$), o movimento é retardado ($\frac{v_0}{a} < 0$) o corpo entra em repouso. O instante t_{api} e a posição s_{api} em que o corpo entra em repouso são dados pelas relações 2.360 e 2.361:

$$t_{api} = -\frac{v_0}{a} \tag{2.124}$$

$$s_{api} = -\frac{v_0^2}{2a} + s_0 \tag{2.125}$$

A posição que o corpo entre em repouso s_{api} é a maior distância que o corpo atinge do solo. Assim s_{api} é a altura máxima que um corpo arremessado para cima atinge.

Caso o corpo seja largado em repouso ($v_0 = 0$) o instante de repouso é o próprio instante zero $t_{api} = 0$. A altura máxima será o próprio $s_{api} = s_0$.

Se o corpo é arremessado para baixo ($v_0 < 0$) o movimento é acelerado. O corpo não atingirá o repouso. A maior altura possível é s_0 mas o corpo não estará em repouso nesta posição.

Observando as condições 2.15.7, 2.15.7 e 2.15.7, $v_0^2 - 2as_0 = v_0^2 + 2gs_0 > 0$, o corpo cruza a origem duas vezes nos instantes $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 + 2gs_0}}{g}$. A análise merece ser dividida em duas situações especiais: $s_0 = 0$ e $s_0 > 0$.

Caso o corpo seja arremessado a partir do solo ($s_0 = 0$) para baixo ($v_0 < 0$) ou em repouso ($v_0 = 0$) o corpo não poderá cair livremente. Assim para um arremesso a partir do solo, necessariamente a velocidade inicial é positiva ($v_0 > 0$). Os instantes em que o corpo tocará o solo serão $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2}}{g}$, ou seja, $t_{\mathcal{O}} = 0$ (momento do arremesso) e $t = \frac{2v_0}{g} > 0$. Assimo corpo sai do solo em $t = 0$, atinge a altura máxima em $t_{api} = \frac{v_0}{g}$ e retorna ao solo em $t = \frac{2v_0}{g}$. O tempo que corpo leva para subir é igual ao de queda.

O movimento pode ser visualizado através dos gráficos:

[desenhar os gráficos: $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ e $s(v)$ p/ queda a partir de $s_0 = 0$].

Para $s_0 > 0$, os instantes em que o corpo tocariam o solo seriam $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 + 2gs_0}}{g}$. No entanto, o corpo não tocará o solo no primeiro instante porque $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gs_0}}{g} < 0$. No entanto o corpo atingirá o solo no segundo instante $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gs_0}}{g} > 0$. Se $v_0 > 0$, o corpo sai do solo em $t = 0$, atinge a altura máxima em $t_{api} = \frac{v_0}{g}$ e retorna ao solo em $t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gs_0}}{g}$. O tempo que corpo leva para subir é menor do que aquele de queda. Caso $v_0 \leq 0$, o corpo não subirá, mas também atingirá o solo em $t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gs_0}}{g}$.

O intervalo de tempo não nulo que o corpo toca o solo será designado por t_q, tempo de queda.

$$t_q = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gs_0}}{g}$$

A expressão acima vale tanto para $s_0 > 0$ como para $s_0 = 0$.

O MRUV não poderá descrever a queda para $t > t_q$ porque para além dele o corpo passa a descrever uma função constante $s(t) = 0$. As próprias relações 2.372, 2.373 e 2.374 só tem validade para $0 < t < t_q$.

Caso um corpo esteja subindo, ele atingirá o ápice e retornará. Assim o corpo passará novamente pelas posições que ele subiu. De acordo com a relação de Torriccelli 2.375, se um corpo passou pela primeira vez no ponto com velocidade v, ele deverá passar pela segunda vez com uma velocidade de $\pm v$. Como o corpo está descendo, a velocidade será $-v$. Esta propriedade da queda dos corpos tem consequeências importantes que serão discutidas em outros capítulos.

Serão tomados 4 exemplos de queda de corpos. Em todos os exemplos a aceleração da gravidade foi aproximada para $g = 10m/s^2$.

1. O primeiro exemplo é o movimento da tabela 2.15.4. O corpo foi arremessado a partir do solo com $v_0 = 40m/s$. O tempo de subida e o tempo de queda foram iguais ($4s$). Para uma mesma posição, a velocidade de subida e de descida tiveram sinais opostos.

2. O segundo exemplo é de um corpo arremessado para cima com velocidade inicial $v_0 = 20m/s$ a partir da altura $s_0 = 60m$. O movimento será dado pela equação $s(t) = -5t^2 + 20t + 60$. Fica ao estudante o exercício de construir uma tabela com intervalos de $1s$. Compare esta tabela com 2.15.4. Verifique a relação entre as posições e as velocidades. Verifique se é válida a relação 2.375.

3. O terceiro exemplo é de um corpo largado a partir do repouso de uma altura $s_0 = 80m$. O movimento será dado pela equação $s(t) = -5t^2 + 80$. Fica ao estudante o exercício de construir uma tabela com intervalos de $1s$. Compare esta tabela com 2.15.4.

4. O quarto exemplo é de um corpo lançado para baixo com $v = -10m/s$ a partir do repouso de uma altura $s_0 = 75m$. O movimento será dado pela equação $s(t) = -5t^2 + 75$. Fica ao estudante o exercício de construir uma tabela com intervalos de $1s$. Compare esta tabela com 2.15.4.

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

onde $t_2 < t_q$.

Se $v_0 > 0$, parte da superfície entre a reta $v(t)$ e o eixo t fica acima do eixo t, parte fica abaixo. Assim a integral pode ser positiva ou negativa. O movimento pode ser progressivo ou retrógrado. A superfície pode ser um trapézio, um triângulo retângulo ou dois triângulos retângulos (um abaixo e outro acima do eixo t).

Para $v_0 > 0$ há uma relação interessante. Se os intervalos de tempo forem simétricos em relação ao tempo do ápice $t_{api} = \frac{v_0}{g}$, a integral é zero. A superfície são dois triângulos retângulos de mesma área, um abaixo e outro acima do eixo t.

$$\int_{t-t_{api}}^{t+t_{api}} v(t)dt = 0 = s(t_2) - s(t_1) \Rightarrow s(t_1) = s(t_2)$$

Assim, no intervalo de tempo $[t - t_{api}, t + t_{api}]$ o corpo subiu e desceu para o mesmo lugar, fazendo com que $s(t_1) = s(t_2)$.

Se $v_0 \leq 0$, a superfície entre a reta $v(t)$ e o eixo t fica abaixo do eixo t. Assim a integral é negativa. O movimento pode é retrógrado porque $s(t_2) - s(t_1) \leq 0 \Rightarrow s(t_2) < s(t_1)$. A superfície pode ser um trapézio ou um triângulo retângulo, ambos abaixo do eixo t.

Tomando agora a integral 2.350:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente abaixo do eixo t porque $a < 0$. Assim a integral é negativa ($v(t_2) - v(t_1) < 0$) e consequentemente $v(t_2) < v(t_1)$. O movimento é retardado. A superfície é um retângulo abaixo do eixo t.

[desenhar gráficos de $v(t)$ e $a(t)$ com as integrais]

2.6 Comentários sobre movimento de arraste.

O movimento de arraste (MA) é muito específico. Ele descreve o movimento de objetos que bóiam em um líquido e tem uma velocidade v_0. O atrito do líquido com o corpo que bóia não é descrito pelo MRUV, mas pelo MA. Para simplificar a análise do MA, a velocidade inicial, e as posições inicial e final são consideredas positivas ($v_0 \geq 0$, $s_0 \geq 0$ e $s_f \geq 0$). Reescrevendo as equações do MA 2.342, 2.343 e 2.349.

$$s(t) = s_f - (s_f - s_0)e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.126}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.127}$$

$$a(t) = -\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.128}$$

Há uma relação importante entre a velocidade e a aceleração. Dividindo a aceleração 2.380 pela velocidade 2.379:

$$\frac{v(t)}{a(t)} = -\frac{v_0 e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}}{\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}} = -\frac{v_0}{\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right)}$$

$$\frac{v(t)}{a(t)} = -\frac{(s_f - s_0)}{v_0} \tag{2.129}$$

Para cada instante de tempo t, há uma única posição $v(t)$ para cada $a(t)$ e vice-versa. Assim a velocidade no MA é uma função da aceleração ($v = v(a)$) e vice-versa ($a = a(v)$). A relação pode ser expressa de duas formas:

$$v(a) = -\frac{(s_f - s_0)}{v_0}a$$

ou

$$a(v) = -\frac{v_0}{(s_f - s_0)}v$$

As funções $v(a)$ e $a(v)$ são extremamente simples. Elas são retas que passam pela origem.

Se $v_0 > 0$ então o movimento começou progressivo. Desta forma a posição final é maior do que a inicial ($s_f > s_0$, logo $s_f > 0$). Então:

$$\beta = \frac{v_0}{(s_f - s_0)} > 0$$

esta conclusão é coerente com $\beta > 0$ imposto em seções anteriores. A consequência da desigualdade acima é que na relação 2.381:

$$\frac{v}{a} = -\frac{(s_f - s_0)}{v_0} < 0$$

Assim o movimento de arraste é sempre retardado.

O instante que o corpo intercepta a origem do sistema $s(t) = 0$ é dado pela relação 2.378:

$$0 = s_f - (s_f - s_0)e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}$$

$$s_f = (s_f - s_0)e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}$$

$$\frac{s_f}{(s_f - s_0)} = e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}$$

A exponencial $e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \leq 1$ sendo o $e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} = 1$ apenas para $t = 0$. Para que $\frac{s_f}{(s_f - s_0)} \leq 1$, é necessário que $s_f \leq s_f - s_0 \Rightarrow s_0 \leq 0$. Como foi proposto que $s_0 \geq 0$, a única possibilidade do corpo cruzar a origem no MA é $s_0 = 0$, ou seja, o corpo sai da origem. O único instante em que a posição é nula é $t = 0$. Os gráficos à seguir ilustram bem esta situação.

[desenhar gráficos do MA $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$].

Como a exponencial envolvida nas relações 2.378, 2.379 e 2.380 fica no intervalo $0 \leq e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \leq 1$ (lembrando que a função é descrescente), as três função ficam restritas aos intervalos:

$$s_0 \leq s(t) < s_f$$

$$0 < v(t) \leq v_0$$

$$-\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right) \leq a(t) < 0$$

O corpo sai de s_0 e se aproxima infinitamente de s_f. A velocidade começa com v_0 e cai infinitamente, aproximando-se infinitamente do zero. A aceleração (negativa) aproxima-se do zero. Na prática, um velocímetro registraria a velocidade nula após a velocidade do corpo ficar abaixo da precisão do aparelho.

O único exemplo de MA apresentado é aquele da tabela 2.15.4.

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

A superfície entre a reta $v(t)$ e o eixo t fica acima do eixo t. Assim a integral é positiva. O movimento é progressivo porque $s(t_2) - s(t_1) > 0 \Rightarrow s(t_2) > s(t_1)$.

Tomando agora a integral 2.350:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente abaixo do eixo t porque $a(t) < 0$. Assim a integral é negativa ($v(t_2) - v(t_1) < 0$) e consequentemente $v(t_2) < v(t_1)$. O movimento é retardado.

[desenhar gráficos de $v(t)$ e $a(t)$ com as integrais].

Movimento bidimensional

(colisão, rotação, balística, pendulo)

Cinemática em duas dimensões com trajetórias abertas e o cálculo vetorial

Introdução.

No capítulo anterior foram analisadas as ferramentas matemáticas usadas para descrever o movimento retilíneo de um corpo pontual. No mesmo capítulo anterior, foi proposta uma alternativa para associar posições à linhas não retilíneas, descrevendo o movimento nestes contextos. A descrição das trajetórias não retilíneas apresentou alguns problemas:

- Para linhas abertas, o procedimento adotado foi associar um dos pontos da linha à origem $\mathcal{O}$. Um dos lados da linha foi escolhido como sentido positivo. Adotando uma unidade de medida u, “caminhando"pela linha, o ponto atingido após um caminho de comprimento desta unidade foi a posição $1u$. Todos os outros pontos ficaram associados à posições específicas. Surgiu um problema geométrico: a distância entre dois pontos será o comprimento da linha reta que une estes dois pontos ou corresponderá à distância em linha reta? Embora a métrica adotada dependa do problema, neste capítulo será adotado uma métrica espcífica.

- Além da ambiguidade de métricas, foi citado que movimentos não-retilíneos envolve algo chamado de “aceleração centrípeta".

- A descrição de trajetórias que cruzam a si mesmas apresentou problemas para atribuir uma origem $\mathcal{O}$ à trajetória, dificuldade em atribuir valores positivos e negativos às posições e ainda ambiguidade de métrica.

Neste capítulo será abordado o movimento contido em um plano com uma abordagem diferente da apresentada no capítulo anterior. A complexidade do movimento não retilíneo será analisada, ou seja, compreendida como a combinação de simplicidades. Em outras palavras, o movimento do corpo pontual no plano será descrito como a combinação de dois movimentos retilíneos.

O caso particular dos movimentos não retilíneos com trajetória fechada será abordado no próximo capítulo. A aceleração centrípeta também será descrita no próximo capítulo.

Para estudar o movimento do corpo no plano, será necessário introduzir uma nova ferramenta matemática: o vetor.

Antes de estudar este capítulo, o estudante deverá dominar os conteúdos do capítulo anterior.

2.7 Vetores

2.7.1 Retas, semirretas e segmentos de reta no plano cartesiano.

O plano cartesiano foi definido no capítulo anterior.

Há infinitas retas no plano cartesiano. Duas retas podem coincidir (ou seja, há apenas uma reta), ser concorrentes ou paralelas.

Cada reta pode ser dividida em duas semirretas através de um único ponto. Por exemplo, se o ponto A pertence à reta r, há infinitos pontos de cada lado específico de A. Cada conjunto destes que se estende infinitamente é denominado semirreta. Por exemplo, o eixo do tempo é uma semirreta formada a partir da origem para o futuro.

Através da equação da reta, é possível descrever a semirreta matematicamente. Por exemplo, o ponto $A = (1, 5)$ pertence a reta com equação $y = 2x + 3$. O ponto A divide esta reta em duas semirretas: $y = 2x + 3$ para $x \geq 1$ e $y = 2x + 3$ para $x \leq 1$. Outro exemplo é a reta vertical (que não é função) $x = 2$. O ponto $B = (2, 5)$ divide esta reta vertical duas semirretas: $x = 2$ para $y \geq 5$ e $x = 2$ para $y \leq 5$.

Há infinitas retas que passam por um único ponto. Por exemplo, o ponto $C = (2, 7)$ faz parte de infinitas retas, incluindo a reta vertical $x = 2$, a reta horizontal $y = 7$ e a reta $y = 2x + 3$. Assim, um mesmo ponto divide diferentes retas em semirretas distintas. A reta $x = 2$ fica dividida nas semirretas $x = 2$ para $y \geq 7$ e $x = 2$ para $y \leq 7$. Já a reta horizontal fica dividida nas semirretas $y = 7$ para $x \geq 2$ e $y = 7$ para $x \leq 2$. Enfim, a reta $y = 2x + 3$ fica dividida em $y = 2x + 3$ para $x \geq 2$ e $y = 2x + 3$ para $x \leq 2$.

Um segmento de reta é formado por todos os pontos de uma reta localizados entre dois pontos distintos da reta. Por exemplo, se dois pontos distintos A e B pertencem à reta r, todos os pontos da reta r localizados entre A e B (incluindo estes dois pontos) formam um segmento de reta. O segmento de reta localizado entre A e B é representado por $\overline{AB}$.

O segmento de reta também pode ser descrito matematicamente. Por exemplo, os pontos $A = (1, 5)$ e $B = (2, 7)$ pertencem à reta $y = 2x + 3$. O segmento $\overline{AB}$ é descrito matematicamente como $y = 2x + 3$ para $1 \leq x \leq 2$.

Há uma única reta que passa por dois pontos distintos. Assim, não é necessário especificar qual a reta que passa pelos dois pontos porque ela é única. Por exemplo, a única reta que liga $C = (1, 2)$ e $D = (2, 3)$ é $y = x+1$. Assim a descrição matemática do segmento $\overline{CD}$ só pode ser $y = x + 1$ para $1 \leq x \leq 2$.

O conjunto de pontos localizados entre A e B ou entre B e A são os mesmos. Assim, $\overline{AB}$=$\overline{BA}$.

2.7.2 Distância entre dois pontos do plano cartesiano.

No capítulo anterior foi definida uma distância entre números e entre posições. A distância entre dois pontos distintos do plano cartesiano será definida como o comprimento do segmento de reta que liga estes dois pontos. Já a distância de um ponto a ele mesmo é definida como 0. Assim a distância entre A e B é o comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$ caso $A \neq B$ e 0 caso contrário.

A distância entre dois pontos A e B (designada por $d(A, B)$ ou por d_{AB}) obedece uma métrica, ou seja, segue as 3 propriedades à seguir:

1. A distância entre um ponto e ele mesmo é zero pela própria definição acima ($d(A, A) = 0$) e a distância entre dois pontos distintos é um número positivo ($d(A, B) > 0$ se $A \neq B$) porque o comprimento do segmento $\overline{AB}$ é um número positivo.

2. A distância entre dois pontos não depende da ordem entre eles, ou seja, a distância de A até B é a mesma distância de B até A ($d(A, B) = d(B, A)$). No caso de pontos distintos $d(A, B) = d(B, A)$ porque $\overline{AB}$=$\overline{BA}$. Já para pontos iguais, $d(A, A) = d(A, A) = 0$.

3. A soma das distâncias entre dois pontos e um terceiro é maior ou igual a distância entre os dois elementos ($d(A, B) \leq d(A, C)+d(B, C)$). Esta relação é denominada "desigualdade triangular". Há razões geométricas para esta denominação que serão discutidas a seguir.

Se os três pontos são iguais ($A = B = C$), então $d(A, B) = d(A, C) = d(B, C) = 0$. Logo $d(A, B) = d(A, C) + d(B, C)$ porque $0 = 0$. Se $A = B$ mas $A \neq C$, então $d(A, B) = 0$, $d(A, C) = d(B, C) = d > 0$. Logo $d(A, B) < d(A, C) + d(B, C)$ porque $0 < d + d$. Já se $A \neq B$ mas $A = C$ então $d(A, B) = d(B, C) > 0$ e $d(A, C) = 0$. Logo $d(A, B) = d(A, C) + d(B, C)$ porque $d = 0 + d$. Se $A \neq B$ mas $B = C$ então $d(A, B) = d(A, C) = d > 0$ e $d(B, C) = 0$. Logo $d(A, B) = d(A, C) + d(B, C)$ porque $d = d + 0$. Enfim, resta a situação mais geral: os três pontos são distintos ($A \neq B$ e $A \neq C$ e $B \neq C$).

Para três pontos distintos, há ainda duas situações: os pontos podem ser parte da mesma reta ou não. Se o ponto C faz parte da mesma reta entre A e

B, e ainda, C está entre A e B, então geometricamente $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B) \Rightarrow d(A,B) = d(A,C) + d(B,C)$. Já se o ponto C faz parte da mesma reta que A e B, mas não está entre eles, então $d(A,B) = d(A,C) - d(B,C) < d(A,C) + d(B,C)$ ou $d(A,B) = d(B,C) - d(A,C) < d(B,C) + d(A,C)$. Em suma, se os três pontos estão alinhados vale $d(A,B) < d(B,C) + d(A,C)$. Para os três pontos distintos e não alinhados forma-se um triângulo $\widehat{ABC}$. Na linguagem popular, "o caminho mais curto entre dois pontos é a reta". Assim, o comprimento de A até B é menor do que a soma dos comprimentos de A até C mais o de C até A. Enfim, neste triângulo vale $d(A,B) < d(B,C) + d(A,C)$. É desta figura que vem o nome "desigualdade triângular".

Com todas as possibilidades exploradas, conclui-se que no plano cartesiano:

$$d(A,B) \leq d(B,C) + d(A,C) \tag{2.130}$$

Como cada ponto do plano cartesiano é associado a um par de números reais, é possível expressar a distância através destes números reais. Se o segmento é horizontal, então o segmento pode ser projetado no eixo x. Neste caso, o problema é equivalente à distância entre dois números reais. Assim os pontos $A = (x_1, c)$ e $B = (x_2, c)$ ambos pertencentes à reta $y = c$ tem distância igual a dos números reais x_1 e x_2. Consultando o capítulo anterior.

$$d(A,B) = |x_1 - x_2| \tag{2.131}$$

Analogamente, dois pontos $A = (c, y_1)$ e $B = (c, y_2)$ que pertençam à mesma reta vertical $x = c$ tem distância dada por :

$$d(A,B) = |y_1 - y_2| \tag{2.132}$$

Enfim, se os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ não estão alinhados nem vertical e nem horizontalmente, então as relações acima não se aplicam. O ponto $C = (x_A, y_B)$ faz parte da mesma reta vertical de A e da mesma reta vertical de B. Assim o triângulo $\widehat{ABC}$ é um triângulo retângulo cujo o ângulo reto está em C. A hipotenusa é o segmento $\overline{AB}$, o cateto horizontal é $\overline{BC}$ e o cateto vertical, $\overline{AC}$. Usando o teorema de Pitágoras:

$$d(A,B)^2 = d(A,C)^2 + d(B,C)^2$$

Como o segmento $\overline{BC}$ é horizontal, então por 2.257 $d(B,C) = |x_B - x_A|$. Já o segmento $\overline{AC}$ é vertical, então por 2.258 $d(A,C) = |y_B - y_A|$. Substituindo acima:

$$d(A,B)^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

Aplicando acima a identidade $|x|^2 = x^2$ então:

$$d(A,B)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \tag{2.133}$$

A fórmula acima implica que com as coordenadas dos dois pontos, é possível calcular a distância entrer eles ao invés de medi-la em uma figura.

A fórmula dispensa o uso das relações 2.257 e 2.258. Se os pontos A e B estão alinhados horizontalmente, então $y_A = y_B$. Substituindo em 2.259 chega-se a $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2} = |x_B - x_A|$. Já o alinhamento vertical $(x_A = x_B)$ em 2.259 implica em $d(A,B) = \sqrt{(y_B - y_A)^2} = |y_B - y_A|$.

Por exemplo, os pontos $A = (1,2)$ e $B = (4,6)$ tem distância $d(A,B) = \sqrt{(1-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. Já o ponto $(1,2)$ e a origem $(0,0)$ tem distância $d(A,B) = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

2.7.3 Definição de vetor.

Em Matemática Pura, vetor é definido como um objeto matemático de um conjunto dotado de uma álgebra vetorial. O conjunto é denominado "espaço vetorial". Tal noção é muito abstrata e vai além dos objetivos deste capítulo. Assim, neste capítulo será definido apenas vetor no plano cartesiano.

A definição de vetor no plano cartesiano é um pouco abstrata, embora não seja um conceito difícil. Vetor pode ser definido provisoriamente como um par ordenado de pontos onde um é classificado como origem e outro como extremo. Por exemplo, no par de pontos distintos A e B, A pode ser escolhido como origem e B como extremo. Neste caso fica definido o vetor reprsentado como $\overrightarrow{AB}$. No plano cartesiano o vetor $\overrightarrow{AB}$ pode ser representado como o segmento $\overline{AB}$ onde no extremo é colocado o símbolo de uma flecha. Esta representação pictórica não significa que o vetor seja o conjunto de todos os pontos entre A e B, mas sim que existe uma ordenação de A para B. Inversamente, o ponto B poderia ser escolhido como origem e A, como extremo. Neste caso o vetor seria diferente de $\overrightarrow{AB}$ e sua representação seria $\overrightarrow{BA}$.

O vetor cuja origem coincide com o extremo é denominado "vetor nulo". Por exemplo, se o ponto A é origem e extremo do vetor, o símbolo fica $\overrightarrow{AA}$. A representação pictórica do vetor nulo não é uma flecha, mas apenas o ponto onde está o origem e o extremo.

O módulo de um número real é um número positivo associado a este número. Analogamente, o módulo de um vetor é um número positivo associado a este deslocamento. O módulo do vetor é definido como a distância entre a origem e o extremo. O símbolo de módulo do vetor usado neste livro será o mesmo do módulo de um número.

$$|\overrightarrow{AB}| = d(A, B) \tag{2.134}$$

É interessante notar que se $A \neq B$, então $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$, mas $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$ porque $d(A, B) = d(B, A)$. Também é interessante notar que o vetor nulo tem módulo zero: $|\overrightarrow{AA}| = d(A, A) = 0$.

Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{AB}$ onde $A = (1, 2)$ e $B = (2, 3)$ tem módulo $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$.

O vetor tem uma direção. Direção é um conjunto de retas paralelas. Para ilustrar o conceito de direção, definem-se os pontos $A = (1, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (-1, -2)$ e $D = (2, 4)$. O vetor $\overrightarrow{AB}$ está sobre a reta $y = 2x+1$ enquanto $\overrightarrow{CD}$ está sobre a reta $y = 2x$. Ambos estão sobre retas com coeficiente angular 2. Retas com o mesmo coeficiente angular são paralelas. Então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm a mesma direção. O vetor $\overrightarrow{BC}$ está sobre a reta $y = \frac{7}{3}x + \frac{1}{3}$. O coeficiente angular desta reta é $\frac{7}{3}$, logo o vetor $\overrightarrow{BC}$ não tem a mesma direção de $\overrightarrow{AB}$ e nem de $\overrightarrow{CD}$. O vetor $\overrightarrow{AD}$ está sobre a reta $y = x + 2$. Como o coeficiente angular da reta é 1, o vetor $\overrightarrow{AD}$ não tem a mesma direção de $\overrightarrow{AB}$, nem $\overrightarrow{CD}$ e nem de $\overrightarrow{BC}$.

[desenhar figura com os pontos A, B, C e D e seus respectivos vetores].

Se A e B são quaisquer dois pontos distintos, então os vetores distintos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ estão sobre a mesma reta. Logo, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ têm a mesma direção.

O vetor nulo $\overrightarrow{AA}$ é um ponto. Por um ponto, passam infinitas retas, com infinitos coeficientes angulares, além da reta vertical. Assim, o vetor nulo tem infinitas direções. Consequentemente, o vetor nulo tem a mesma direção de qualquer vetor. Usando os mesmos quatro pontos $A = (1, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (-1, -2)$ e $D = (2, 4)$, o vetor $\overrightarrow{AA}$ está sobre as retas $y = 2x + 1$,

$y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ e $y = x + 2$. Estas retas passam respectivamente pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$. Como toda reta é paralela a si mesma, o vetor nulo tem a mesma direção de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$. O vetor $\overrightarrow{BD}$ está sobre a reta $y = 2x$. Como a reta com mesmo coeficiente angular $y = 2x + 1$ passa sobre o vetor $\overrightarrow{AA}$, então este vetor e $\overrightarrow{BD}$ têm a mesma direção.

Uma forma mais prática de verificar se dois vetores tem a mesma direção é verificar diretamente o coeficiente angular da reta que passa pelos dois pontos. Um vetor com a origem em $A = (x_A, y_A)$ e extremo $B = (x_B, y_B)$ está sobre uma reta com um certo coeficiente angular α e coeficiente linear β. Escrevendo a equação da reta com os pontos dados: $y_A = \alpha x_A + \beta$ e $y_B = \alpha x_B + \beta$. Substraindo as equações:

$$y_A - y_B = \alpha(x_A - x_B)$$

$$\alpha = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Se um vetor é representado pela origem $C = (x_C, y_C)$ e extremo em $D = (x_D, y_D)$, o coeficiente angular deverá ser:

$$\alpha = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D}$$

Assim, o teste para verificar se dois vetores não nulos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm a mesma direção é validade da relação

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} \tag{2.135}$$

Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ (novamente com os pontos $A = (1, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (-1, -2)$ e $D = (2, 4)$) são paralelos porque seguem o critério 2.261.

Além de módulo e sentido, o vetor possui um sentido. Sentidos são as duas possibilidades de “movimento"que existe em um conjunto de retas paralelas. Na reta dos reais, os números positivos e negativos expressam esta dualidade. Em uma reta genérica, nem sempre existe uma convenção de qual dos dois sentidos será chamado de positivo. Uma vez que um sentido é positivo, o sentido oposto é negativo e vice-versa. Em um conjunto de retas paralelas, a mesma convenção de sentido deverá ser repetida para as demais retas. Por exemplo, em um conjunto de retas horizontais, se o sentido positivo é da esquerda para a direita em uma das retas, em todas as demais esta convenção será adotada. Já em um conjunto infinito de retas verticais, se o sentido de baixo para cima foi adotado em uma delas, todas elas deverão seguir a mesma convenção.

Dois vetores que não têm a mesma direção, não podem ter o mesmo sentido. Dois vetores não nulos que tem a mesma direção podem ter o mesmo sentido ou sentido oposto. Vetores com o mesmo sentido são denominados “vetores paralelos". Já dois vetores com sentidos opostos são denominados “vetores antiparalelos". Por definição, todo vetor é paralelo a si mesmo porque todo o vetor tem a mesma direção de si mesmo e está no mesmo sentido.

O vetor nulo não representa nem um movimento para um sentido e nem para o oposto. Assim o vetor nulo é classificado como “vetor sem sentido". Apesar disso, o vetor nulo é classificado como “paralelo"a todos os demais vetores.

Para ilustrar o conceito de sentido, serão usados os mesmos pontos $A = (1, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (-1, -2)$ e $D = (2, 4)$. Dentre todos os vetores não nulos que se pode construir com estes pontos, apenas quatro têm a mesma direção: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DC}$. Os vetor $\overrightarrow{AB}$ é paralelo ao próprio $\overrightarrow{AB}$ e à $\overrightarrow{CD}$, mas é antiparalelo à $\overrightarrow{BA}$ e à $\overrightarrow{DC}$. Analogamente, o vetor $\overrightarrow{CD}$ é paralelo ao próprio $\overrightarrow{CD}$ e à $\overrightarrow{AB}$, mas é antiparalelo à $\overrightarrow{BA}$ e à $\overrightarrow{DC}$. Todos estes vetores são paralelos aos vetores nulos $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$ e $\overrightarrow{DD}$.

A definição acima foi provisória porque um vetor não é apenas um par ordenado de pontos. Um vetor pode ser definido todos os pares ordenados de pontos que possuem o mesmo módulo, direção e sentido. Em outras palavras, dois vetores são iguais quando são paralelos e têm o mesmo módulo.

Um vetor é igual a si mesmo por definição porque ele possui o mesmo módulo, direção e sentido de si mesmo.

Para ilustrar o conceito de vetores iguais, serão escolhidos cinco pontos: os quatro primeiros já escolhidos ($A = (1, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (-1, -2)$ e $D = (2, 4)$) e um quinto ponto, a origem $O = (0, 0)$. O vetor $\overrightarrow{AB}$ é paralelo à $\overrightarrow{CD}$ mas não tem o mesmo módulo. Basta usar a definição 2.260: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{5}$ enquanto $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9 * 5} = 3\sqrt{5}$. O vetor $\overrightarrow{AB}$ também é paralelo a $\overrightarrow{CO}$ porque eles pertencem às retas respectivas $y = 2x+1$ e $y = 2x$ e têm o mesmo sentido. Estes dois vetores também têm o mesmo módulo: $|\overrightarrow{CO}| = \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$. Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CO}$ têm o mesmo módulo e são paralelos, eles são iguais: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CO}$. Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OC}$ têm o mesmo módulo e são antiparalelos, logo eles são diferentes: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{OC}$.O leitor pode resolver como exercícios a verificação de que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.

Há uma forma prática de verificar se dois vetores são iguais. Dois vetores não nulos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se e somente se:

$$x_A - x_B = x_C - x_D \tag{2.136}$$

$$y_A - y_B = y_C - y_D \tag{2.137}$$

Fica para o estudante o exercício de provar que a relação acima inclui o paralelismo 2.261 e a igualdade de módulos em 2.260.

Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CO}$ (com os mesmos pontos $A = (1,3)$, $B = (2,5)$, $C = (-1,-2)$ e $O = (0,0)$) são iguais, confirmando a relação acima.

Quando dois vetores "localizados"em locais distintos do plano cartesiano são iguais, fica claro que o vetor não está em um lugar específico. Antes, o vetor expressa uma relação entre pontos. Para distinguir o vetor dos pontos onde ele está representado, os matemáticos e os físicos usam uma letra minúscula acrescida do símbolo $\rightarrow$ acima da letra. Por exemplo, as representações $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CO}$ do mesmo vetor podem deixar a falsa impressão de que este vetor esteja localizado nos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CO}$. Representando o vetor como $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CO}$, a não localização fica mais clara.

Todos os vetores nulos são iguais entre si porque possuem o mesmo módulo (zero), a mesma direções (as infinitas direções) e o mesmo sentido (não há sentido). Assim $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = ...$ Em outras palavras, todos os vetores nulos são um único vetor nulo. O símbolo adotado para o vetor nulo é $\overrightarrow{\mathcal{O}}$.

No lugar de verificar se dois vetores são iguais, o estudante pode fazer o processo inverso. Dado um vetor $\overrightarrow{AB}$, ele procura o mesmo vetor em outra localização $\overrightarrow{CD}$. O processo é conhecido como "transporte do vetor". Basta que os novos pontos sigam as relações 2.262 e 2.263.

Para transportar um vetor, é necessário manter o paralelismo e o módulo do vetor.

2.7.4 Transporte do vetor e representação do vetor em coordenadas cartesianas.

No lugar de verificar se dois vetores são iguais, o estudante pode fazer o processo inverso. Dado um vetor $\overrightarrow{AB}$, ele procura o mesmo vetor em outra localização $\overrightarrow{CD}$. O processo é conhecido como “transporte do vetor". Basta que os novos pontos sigam as relações 2.262 e 2.263.

Por exemplo, dados os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ será transportado para a origem $C = (x_C, y_C)$. Em outras palavras, a nova representação do vetor será $\overrightarrow{CD}$. Qual a coordenada de D? Seguindo a as relações 2.262 e 2.263:

$$D = (x_C + x_B - x_A, y_C + y_B - y_A) \tag{2.138}$$

Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{AB}$ com $A = (2, 4)$ e $B = (3, 2)$ pode ser transportado de modo que a origem fique em $C = (4, 5)$. Então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se $D = (5, 3)$.

Para não precisar indicar a coordenadas dos dois pontos, há uma convenção. Caso as coordenadas da origem sejam omitidas, a origem do vetor é transportada para a origem do plano cartesiano $O = (0, 0)$. Nesta convenção, as coordenadas do extremo do vetor identificam o próprio vetor. O vetor é representado apenas pela letra minúscula e pelas coordenadas do extremos. Usando a relação 2.264, o vetor $\overrightarrow{AB}$ com coordenadas $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ fica representado como:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \tag{2.139}$$

Geralmente os vetores são representados simplesmente como:

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y) \tag{2.140}$$

onde o vetor $\overrightarrow{a}$ tem origem em $(0,0)$ e extremo em (a_x, a_y).

Nesta notação o vetor nulo pode ser obtido pela relação 2.265. Para um ponto A qualquer, o vetor nulo pode ser expresso por $\overrightarrow{AA}$. Usando a relação 2.265 para $x_A = x_B$ e $y_A = y_B$, o vetor nulo fica:

$$\overrightarrow{\mathcal{O}} = (0,0)$$

O módulo do vetor $\overrightarrow{a}$ pela expressão 2.260 é a distancia entre a origem $\mathcal{O}$ e o ponto (a_x, a_y) fica:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(a_x - 0)^2 + (a_y - 0)^2}$$

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{2.141}$$

Da relação acima, o estudante pode concluir novamente que o módulo do vetor nulo é zero: $|\overrightarrow{\mathcal{O}}| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

Os físicos costumam representar o módulo do vetor $\overrightarrow{a}$ pela mesma letra sem o símbolo de vetor encima:

$$|\overrightarrow{a}| = a \tag{2.142}$$

O vetor representado na forma 2.266 pode ser transportado para qualquer origem. Combinando as expressões 2.266 e 2.264, colocando a origem do vetor $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$ no ponto $A = (x_A, y_A)$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ terá como ponto B as coordenadas:

$$B = (a_x + x_A, a_y + y_A)$$

Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{a} = (1,2)$ com a origem em $A = (3,5)$ ficará representado como vetor $\overrightarrow{AB}$ com $B = (4,7)$.

É interessante notar que na nova representação, fica mais fácil verificar se dois vetores estão na mesma direção. Lembrando que as origens dos vetores estão na origem $(0,0)$ e aplicando 2.261, os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ não nulos têm a mesma direção se e somente se:

$$\frac{a_y}{a_x} = \frac{b_y}{b_x} \tag{2.143}$$

Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{a} = (1,3)$ e $\overrightarrow{b} = (2,6)$ obedecem a relação acima, logo eles tem a mesma direção. Já os vetores $\overrightarrow{a} = (1,3)$ e $\overrightarrow{b} = (2,7)$ não têm a mesma direção.

2.7.5 Soma vetorial.

A soma entre dois vetores é uma operação análoga à soma entre números reais. Assim como a soma de dois números reais associa um par de números a um terceiro, a soma entre dois vetores associa dois vetores a um terceiro.

Dois vetores $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$ e $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y)$ somados resultam em:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y) \tag{2.144}$$

A soma de dois números reais possui quatro propriedades. Dados $a, b, c \in \mathcal{R}$:

1. Propriedade comutativa: $a + b = b + a$

2. Propriedade associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$

3. Existe um elemento neutro $0 \in \mathcal{R} : a + 0 = 0 + a = a$

4. Para todo a existe um elemento inverso $(-a) \in \mathcal{R}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

A soma vetorial também segue estas quatro propriedades. Usando a definição 2.270, a propriedade comutativa está provada abaixo:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y) = (b_x + a_x, b_y + a_y)$$

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \tag{2.145}$$

Por exemplo, $(1, 2) + (3, -1) = (3, -1) + (1, 2) = (4, 1)$.

A soma vetorial também segue a propriedade associativa. Partindo de 2.270:

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y) + (c_x, c_y) =$$

$$= ((a_x + b_x) + c_x, (a_y + b_y) + c_y) =$$

$$= (a_x + (b_x + c_x), a_y + (b_y + c_y)) \Rightarrow$$

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \tag{2.146}$$

Por exemplo, $((1, 2) + (3, -1)) + (4, 0) = (4, 1) + (4, 0) = (8, 1)$ e $(1, 2) + ((3, -1) + (4, 0)) = (1, 2) + (7, -1) = (8, 1)$.

O elemento neutro no plano cartesiano não é o número 0, mas o vetor nulo $\overrightarrow{\mathcal{O}}$. Usando a definição 2.270:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{\mathcal{O}} = (a_x + 0, a_y + 0) = (a_x, a_y) = \overrightarrow{a}$$

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{\mathcal{O}} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \tag{2.147}$$

O elemento inverso de $\overrightarrow{a}$ é definido de acordo com a interpretação do sinal "$-$"dado na capítulo anterior. Em outras palavras, $(-\overrightarrow{a})$ é o vetor que somado com $\overrightarrow{a}$ resulta no elemento neutro $\overrightarrow{\mathcal{O}}$. O vetor $(-\overrightarrow{a})$ é dado pelas coordenadas:

$$(-\overrightarrow{a}) = (-a_x, -a_y) \tag{2.148}$$

de modo que o sinal "-"inverte o sinal das coordenadas:

$$-(a_x, a_y) = (-a_x, -a_y) \tag{2.149}$$

Por exemplo, $-(3, 2) = (-3, -2)$.

Neste caso também vale a relação de que o inverso do inverso de algo é ele mesmo. Partindo da definição acima:

$$-(-\overrightarrow{a}) = -(-a_x, -a_y) = (-(-a_x), -(-a_y)) = (a_x, a_y)$$

$$-(-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a} \tag{2.150}$$

Usando a definição de soma 2.270 e a definição 2.274:

$$\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = (a_x, a_y) + (-a_x, -a_y) =$$

$$= (a_x + (-a_x), a_y + (-a_y)) = (0, 0) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = (-\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathcal{O}} \tag{2.151}$$

Uma relação interessante surge das relações 2.265 e 2.275:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (-(x_A - x_B), -(y_A - y_B))$$

$$\overrightarrow{AB} = -(x_A - x_B, y_A - y_B)$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \tag{2.152}$$

Assim a inversão da ordem dos pontos implica que o vetor muda para seu elemento inverso.

Outra relação interessante é a comparação dos módulos do vetor $\overrightarrow{a}$ com o elemento inverso $(-\overrightarrow{a})$. Usando as relações 2.267 e 2.274:

$$|-a| = \sqrt{(-a_x)^2 + (-a_y)^2} = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$$

$$|-a| = |a|$$

A soma entre vetores pode ser expressa geometricamente de duas formas. Em primeiro lugar, a origem de um dos vetores pode ser transportada para o extremo do outro. Por exemplo, o extremo do vetor $\overrightarrow{AB}$ é o ponto B. Se um segundo vetor for transportado para ter sua origem em B, o vetor será escrito na forma $\overrightarrow{BC}$. Usando a relação 2.265 e a definição de soma 2.270 chega-se à soma de $\overrightarrow{AB}$ com $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (x_B - x_A, y_B - y_A) + (x_C - x_B, y_C - y_B) =$$

$$(x_C - x_A, y_C - y_A) = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \tag{2.153}$$

Caso os vetores não sejam paralelos, a relação acima pode ser representada por um triângulo de lados $\widehat{ABC}$. Já se os vetores são paralelos, a soma dos vetores também será paralela, não havendo um triângulo.

Fazendo uma analogia do vetor com um deslocamento, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é como um deslocamento do ponto A para o ponto B, $\overrightarrow{BC}$ é como o deslocamento de B para C. A soma dos vetores é como se fosse o deslocamento final. Algo que se deslocou de A para B e de B para C, deslocou-se de A para C. Esta analogia será importante para descrever deslocamentos espaciais.

A figura acima pode ser relacionada com a desigualdade triângular. Partindo da desigualdade 2.256, usando a definição de módulo 2.260 e 2.270:

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$$

$$|\overrightarrow{AC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$$

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| \tag{2.154}$$

Assim como para números reais, o módulo da soma é menor do que a soma dos módulos. A igualdade só se verifica para se os vetores forem paralelos. Reescrevendo a relação acima com $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$ chega-se à

$$|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| \leq |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$$

A relação do módulo da soma com os módulos dos vetores será retomada no próximo capítulo.

Por exemplo $(1,-1)+(2,3)=(3,2)$ e os módulos ficam $|(3,2)|=\sqrt{13}$ e $|(1,-1)|+|(2,3)|=\sqrt{2}+\sqrt{13}>\sqrt{13}=|(3,2)|$, logo, $|(1,-1)|+|(2,3)|>|(3,2)|$.

Há outra forma geométrica de somar vetores. No lugar de colocar a origem de um vetor no extremo de outro, colocam-se as origens dos dois vetores no mesmo ponto. Por exemplo, a origem do vetor $\overrightarrow{AB}$ é o ponto B. Se um segundo vetor for transportado para ter sua origem em A, o vetor será escrito na forma $\overrightarrow{AC}$. Deixando-se a origem do vetor soma no ponto A chega-se ao vetor $\overrightarrow{AD}$. Assim:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$$

Da relação 2.279 chega-se a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$. Comparando com a relação acima, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Ainda usando 2.279, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$. Então $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Como vetores iguais são paralelos e têm o mesmo módulo, a figura $\overline{ABCD}$ é um paralelograma. Assim, o vetor soma $\overrightarrow{AD}$ esta na diagonal de um paralelograma desenhado a partir dos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AC}$. Este método de soma vetorial é denominado método do paralelograma. A desvantagem deste método é para vetores paralelos, o paralelograma fica degenerado.

Na representação dos vetores com a origem em $\mathcal{O}$, a soma vetorial acaba sendo representada pela regra do paralelograma.

2.7.6 Substração vetorial.

A operação de subtração vetorial é análoga à subtração entre números reais. Para números reais vale a definição:

$$a-b=a+(-b)$$

Analogamente, a subtração vetorial é definida como:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b}) \tag{2.155}$$

Usando as definições 2.274 e 2.270 na definição acima:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b}) = (a_x, a_y) + (-b_x, -b_y) =$$

$$= (a_x + (-b_x), a_y + (-b_y))$$

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y) \tag{2.156}$$

Geometricamente, a subtração vetorial pode ser representada transportando as origens dos dois vetores para o mesmo ponto. Os vetores podem ser escritos como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. A primeira forma consiste em usar a relação 2.278 e 2.281:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$$

$$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \tag{2.157}$$

Assim, o vetor subtração $\overrightarrow{CB}$ tem origem no extremo do vetor subtraido $\overrightarrow{AC}$ (ponto C) e o extremo no extremo do vetor $\overrightarrow{AB}$ (ponto B). Caso os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não tenham a mesma direção, forma-se um triângulo $\widehat{ABC}$.

[desenhar figura.].

É interessante notar que a soma e a subtração dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ podem ser representadas em um paralelogramo $\overline{ABCD}$. As diagonais do paralelogramo são $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. A soma dos vetores $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ fica representada na diagonal $\overline{AD}$. Já a subtração vetorial $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ fica sobre a diagonal $\overline{BC}$. É interessante notar que a subtração invertida $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ também fica representada na diagonal $\overline{BC}$.

2.7.7 Produto por escalar.

O conceito de escalar é um pouco complicado e vai além dos objetivos deste curso introdutório de Física. Neste contexto bem específico, o escalar será tomado como sinônimo de número real.

O termo “escalar"vem da palavra escala. Um número real pode ser colocado em uma escala, a reta dos reais.

As coordenadas do vetor são dois números reais. Logo, as coordenadas são dois escalares.

O produto por escalar é uma operação análoga ao produto entre dois números reais. Mas há diferenças profundas entre estes dois produtos. O produto entre dois números reais é a associação de dois números com um terceiro. Já o produto por escalar é a associação de um escalar e um vetor com um vetor. Neste segundo produto, os termos envolvidos na operação são dois objetos matemáticos diferentes: um escalar e um vetor.

A definição do produto do escalar $\lambda \in \mathcal{R}$ pelo vetor $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$ é dada por:

$$\lambda \overrightarrow{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y) \tag{2.158}$$

O produto de dois números reais possui quatro propriedades. Dados

$a, b, c \in \mathcal{R}$:

1. Propriedade comutativa: $ab = ba$

2. Propriedade associativa: $(ab)c = a(bc)$

3. Existe um elemento neutro $0 \in \mathcal{R}: a1 = 1a = a$

4. Para todo $a \neq 0$ existe um elemento inverso $(\frac{1}{a}) \in \mathcal{R}$ tal que $a(\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a})a = 1$

Além disso, há uma propriedade distributiva que relaciona soma e produto:

$$c(a + b) = (a + b)c = ac + bc$$

A propriedade comutativa não faz sentido para o produto por escalar. Mesmo trocando a ordem entre o escalar e o vetor, a distinção entre os objetos multiplicados permanece. Para deixar clara esta diferença, se o produto entre naturais é definido como uma sucessão de somas, $2*3 = 2+2+2$ e $3*2 = 3+3$. Embora $2*3 = 3*2$, as operações são distintas. Caso se escreva $\overrightarrow{a}\lambda$ no lugar de $\lambda\overrightarrow{a}$, a operação não mudou.

O produto por escalar segue uma propriedade análoga à associativa. Se $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$, pela definição:

$$\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = \lambda(\mu a_x, \mu a_y) = (\lambda\mu a_x, \lambda\mu a_y) =$$

$$= \lambda\mu(a_x, a_y) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$$

$$\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a} \tag{2.159}$$

Há uma diferença profunda entre a propriedade acima e a associativa entre números. No primeiro caso, o produto entre o primeiro e o segundo fator ou entre o segundo e o terceiro resultam em números. Já no caso acima, o produto entre o segundo e o terceiro fator é um vetor, enquanto entre o primeiro e o segundo é um número. Por exemplo, $2(3(4,5)) = 2(12,15) = (24,30) = 6(4,5) = (2*3)(4,5)$.

O escalar “1"atua como um análogo do elemento neutro. Partindo de 2.284:

$$1\overrightarrow{a} = (1a_x, 1a_y) = (a_x, a_y)$$

$$1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \tag{2.160}$$

É importante frisar que o escalar 1 não está sendo operado em outro escalar, mas em um vetor.

Não faz sentido falar de um elemento inverso no produto por escalar. Não existe um análogo do número 1 para vetores.

Como escalares são diferentes de vetores, há duas propriedades distributivas: uma para soma dos escalares e outra para soma de vetores.

$$(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = (\lambda + \mu)(a_x, a_y) =$$

$$= ((\lambda + \mu)a_x, (\lambda + \mu)a_y) = (\lambda a_x + \mu a_x, \lambda a_y + \mu a_y) =$$

$$= ((\lambda + \mu)a_x, (\lambda + \mu)a_y) = (\lambda a_x, \lambda a_y) + (\mu a_x, \mu a_y) =$$

$$= \lambda(a_x, a_y) + \mu(a_x, a_y)$$

$$(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a} \tag{2.161}$$

Por exemplo, $(2 + 3)(4, 5) = 5(4, 5) = (20, 25) = (8, 10) + (12, 15) = 2(4, 5) + 3(4, 5)$.

$$\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda(a_x + b_x, a_y + b_y) =$$

$$= (\lambda(a_x + b_x), \lambda(a_y + b_y)) = (\lambda a_x + \lambda b_x, \lambda a_y + \lambda b_y) =$$

$$= (\lambda a_x, \lambda a_y) + (\lambda b_x, \lambda b_y) = \lambda(a_x, a_y) + \lambda(b_x, b_y)$$

$$\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b} \tag{2.162}$$

Por exemplo, $2((4, 5) + (3, -1)) = 2(7, 4) = (14, 8) = (8, 10) + (6, -2) = 2(4, 5) + 2(3, -1)$.

Se $\lambda = 0$, há uma relação análoga ao produto do número 0 com outros números. Partindo de 2.284:

$$0\overrightarrow{a} = 0(a_x, a_y) = (0a_x, 0a_y) = (0, 0)$$

$$0\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathcal{O}} \tag{2.163}$$

Enquanto o número 0 multiplicado por outro número resulta em 0, o número 0 multiplicado por um vetor resulta no vetor nulo $\overrightarrow{\mathcal{O}}$. Por outro lado, um escalar qualquer multiplicado pelo vetor nulo resulta em vetor nulo. Partindo de 2.284:

$$\lambda\overrightarrow{\mathcal{O}} = \lambda(0,0) = (\lambda * 0, \lambda * 0) = (0,0)$$

$$\lambda\overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

Assim como qualquer número multiplicado por 0 resulta em 0, qualquer número multiplicado pelo vetor nulo resulta no vetor nulo.

O produto do número (-1) com um número a resulta em $(-a)$. Para vetores há uma relação análoga. Partindo da definição 2.284 e 2.274:

$$(-1)\overrightarrow{a} = (-1)(a_x, a_y) = ((-1)a_x, (-1)a_y) = (-a_x, -a_y)$$

$$(-1)\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a} \tag{2.164}$$

Novamente é necessário frisar que o produto acima é entre um número e um vetor.

A semelhança do comportamento do vetor nulo com o número 0 no produto por escalar não deve levar o estudante a achar que o número zero é igual ao vetor nulo. Muitos livros didáticos apresentam a identidade $0 = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Neste livro esta identidade não será usada. Ao contrário, a distinção entre 0 e $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ será enfatizada.

É interessante averiguar as relações entre os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\lambda\overrightarrow{a}$. Se $\lambda = 0$ então o vetor $\lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Neste caso, o vetor $\lambda\overrightarrow{a}$ é parelelo a $\overrightarrow{a}$ porque o vetor nulo é paralelo a qualquer outro. Se $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, o vetor $\lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{a}$ coincide com $\overrightarrow{a}$. Para $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$ e $\lambda \neq 0$, a relação 2.269 junto com 2.284 indica que os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\lambda\overrightarrow{a}$ têm a mesma direção.

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{\lambda a_x}{\lambda a_y}$$

Se $\lambda > 0$, o vetor $\overrightarrow{a}$ é paralelo a $\lambda\overrightarrow{a}$. Já se $\lambda < 0$, o vetor $\overrightarrow{a}$ é antiparalelo a $\lambda\overrightarrow{a}$.

Resta a relação entre os módulos de $\overrightarrow{a}$ e $\lambda\overrightarrow{a}$. Usando as relações 2.267 e 2.284:

$$|\lambda\overrightarrow{a}| = \sqrt{\lambda^2 a_x^2 + \lambda^2 a_y^2} = \sqrt{\lambda^2(a_x^2 + a_y^2)} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$|\lambda\overrightarrow{a}| = |\lambda||\overrightarrow{a}| \tag{2.165}$$

Com as relações acima é possível construir geometricamente o vetor $\lambda\overrightarrow{a}$ a partir de $\overrightarrow{a}$. O módulo de $\lambda\overrightarrow{a}$ é $|\lambda|$ vezes o módulo de $\overrightarrow{a}$. Se $\lambda > 0$, os vetores são paralelos. Caso $\lambda < 0$, os vetores são antiparalelos. Para $\lambda = 0$ ou $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, o vetor $\lambda\overrightarrow{a}$ é apenas um ponto, o vetor nulo.

2.7.8 Divisão por escalar

O termo divisão por escalar geralmente não aparece nos livros de matemática. Mas a operação é feita em livros de Física, mesmo sem uma definição formal.

A divisão de um vetor por um escalar é dada por:

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{a} \tag{2.166}$$

onde $\lambda \neq 0$.

Usando a definição 2.284 chega-se a outra definição:

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)(a_x, a_y) = \left(\left(\frac{1}{\lambda}\right)a_x, \left(\frac{1}{\lambda}\right)a_y)\right)$$

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)(a_x, a_y) = \left(\frac{a_x}{\lambda}, \frac{a_y}{\lambda}\right) \tag{2.167}$$

Por exemplo, $\frac{(3,4)}{2} = (\frac{3}{2}, 2)$

Da propriedade 2.291 aplicada em 2.292 chega-se a:

$$|\frac{\overrightarrow{a}}{\lambda}| = |\left(\frac{1}{\lambda}\right)||\overrightarrow{a}|$$

$$|\frac{\overrightarrow{a}}{\lambda}| = \frac{|\overrightarrow{a}|}{|\lambda|} \tag{2.168}$$

O vetor $\frac{\overrightarrow{a}}{\lambda}$ tem a mesma direção de $\overrightarrow{a}$. Se $\lambda > 0$, os vetores são paralelos, mas se $\lambda < 0$, os vetores são antiparalelos.

2.7.9 Versores

Versor e um vetor de módulo 1. Os versores são representados com um “^"acima da letra minúscula no lugar do símbolo $\rightarrow$. Assim o versor pode ser definido em função de seu módulo como:

$$|\hat{a}| = 1$$

Alguns versores são tão usuais que há símbolos especiais para eles. Os versores definidos abaixo são os mais usados.

$$\hat{i} = (1, 0) \tag{2.169}$$

$$\hat{j} = (0, 1) \tag{2.170}$$

Fica como exercício para o estudante usar a definição 2.267.

A partir de qualquer vetor não nulo é possível “construir"um versor. Basta dividir um vetor pelo seu próprio módulo.

$$\hat{a} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} \tag{2.171}$$

Para verificar que o versor acima tem realmente módulo 1, basta usar a propriedade 2.294:

$$|\hat{a}| = |\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}| = \frac{|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|}$$

Por exemplo, o versor construido a partir de $(1, 1)$ é dado por:

$$\hat{a} = \frac{(1,1)}{|(1,1)|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Qualque vetor pode ser reescrito na forma de um versor multiplicado pelo módulo do vetor:

$$\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \left(\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} \right) = |\overrightarrow{a}| \hat{a}$$

Por exemplo, o vetor $(1, 2)$ pode ser reescrito como:

$$(1,2) = |(1,2)| \left(\frac{(1,2)}{|(1,2)|} \right) = \sqrt{5} \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

onde $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ é um versor.

2.7.10 Decomposição de vetores

Os vetores podem ser escritos como somas de outros vetores. Este processo é conhecido como decomposição.

A decomposição mais comum é aquela dada em termos de vetores nos eixos x e y. Um vetor qualquer $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$ fica decomposto como:

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y) = (a_x, 0) + (0, a_y)$$

[fazer figura.].

O vetor $(a_x, 0)$ está no eixo x e $(0, a_y)$, no eixo y.

Através da definição 2.284, os vetores acima podem ser reescritos como:

$$\overrightarrow{a} = a_x(1, 0) + a_y(0, 1)$$

Com as definições dos versores $\hat{i}$ e $\hat{j}$ a expressão acima fica:

$$\overrightarrow{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \tag{2.172}$$

Por exemplo, $(1, 3) = 1\hat{i} + 3\hat{j}$

A soma vetorial 2.270 reescrita em termos destes versores fica:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j}$$

É como se a componente de cada vetor fosse somada independetemente da outra. Analogamente, o produto por escalar 2.284 atua em cada componente independentemente.

$$\lambda\overrightarrow{a} = \lambda a_x\hat{i} + \lambda a_y\hat{j}$$

Uma decomposição geral do vetor $\overrightarrow{a}$ é dada pela definição de subtração de vetores 2.281:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b}) + \overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{b} \tag{2.173}$$

Por exemplo, o vetor $(3,7)$ pode ser decomposto como $(3,7) = ((3,7) - (1,1)) + (1,1) = (2,6) + (1,1)$.

Embora seja possível escrever o vetor nulo $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ como soma de dois vetores opostos (ver 2.277) não é usual decompor este vetor.

2.8 Posição de um corpo pontual em um plano espacial.

O problema tratado nesta seção é a localização de um corpo pontual em um plano espacial.

O corpo pontual localizado em um plano espacial ocupará um único ponto em cada instante de tempo. Cada ponto do plano pode ser localizado através de um par de números reais. Mas no lugar de apenas pontos, os corpos pontuais serão localizados com vetores.

2.8.1 Plano Espacial.

Os eixos do plano cartesiano são duas retas reais perpendiculares. As localizações são adimensionais. Já em um plano espacial há a dimensão “espaço". No lugar das retas reais, os eixos x e y são retas espaciais. Caso o leitor não se lembre das diferenças entre a reta real e a reta espacial, é necssário consultar o capítulo anterior.

Os físicos não representam uma posição como um simples ponto $P = (x, y)$. Eles representam a posição como um vetor que tem origem na origem do plano espacial $O = (0, 0)$ e tem extremo na própria posição $P = (x, y)$. Em outras palavras, a posição que corresponde ao corpo no ponto P é $\overrightarrow{s} = (x, y)$ É importante enfatizar que este vetor não é adimensional, mas suas coordenadas tem dimensão de espaço.

[ver figura.].

Há inúmeras vantagens de se atribuir um vetor à localização no lugar de apenas um ponto. A velocidade é definida como uma divisão de uma variação de posição por variação de tempo. Pontos no plano não podem ser somados ou subtraidos, mas os vetores $\overrightarrow{s}$ podem. Então, os conceitos de velocidade e aceleração poderão ser definidos para o plano.

Para não se confundir o vetor nulo do plano cartesiano $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ com o vetor nulo do plano espacial, usa-se o termo $\overrightarrow{s_{\mathcal{O}}} = (0, 0)$ onde as componentes não são os números 0 , mas as posições 0.

O módulo do vetor posição é definido de acordo com 2.267:

$$|\overrightarrow{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \tag{2.174}$$

onde este módulo tem dimensão espacial.

Por exemplo, $|(1m, 2m)| = \sqrt{5}m$, $|(1cm, 2cm)| = \sqrt{5}cm$, $|(1m, 50cm)| = |(1m, 0, 5m)| = \sqrt{1, 25}m$, etc.

2.8.2 Grandezas escalares e vetoriais.

O conceito detalhado de grandeza escalar está além dos objetivos deste curso. No contexto da Mecânica Clássica, uma grandeza escalar pode ser definida como aquela que pode ser representada por um escalar (número real) seguido de alguma unidade.

Por exemplo, a posição de um corpo em uma reta espacial é uma grandeza escalar. Cada posição é representada por um número real seguido de uma unidade espacial (por exemplo, $s = 2m$). O tempo também é uma grandeza escalar porque pode ser representado por um número real seguido de uma unidade temporal (como em $t = 3s$). Massa é uma grandeza escalar (como em $m = 4kg$). Na reta, velocidade e aceleração também são grandezas escalares.

Grandeza vetorial é aquela que pode ser representada como uma sequência de escalares em uma certa ordem. No caso particular do plano, uma grandeza vetorial é aquela que precisa de um par de números reais para ser representada. O nome grandeza vetorial se deve ao fato de que qualquer par de números reais pode ser associado a um vetor com a origem em $\mathcal{O}$.

No plano, a posição não pode ser considerada uma grandeza escalar. São necessários dois números reais para localizar um ponto no plano. Assim, a posição de um corpo no plano é uma grandeza vetorial. Este par de números reais é associado a um vetor com estas mesmas coordenadas. Velocidade e aceleração no plano também são grandezas vetoriais.

2.8.3 Distância entre duas posições no plano espacial

A distância entre duas posições $\overrightarrow{s_A}$ e $\overrightarrow{s_B}$ no plano espacial é a associação deste par de pontos com um número positivo. Inspirado na definição da distância entre números no capítulo anterior:

$$d(\overrightarrow{s_A}, \overrightarrow{s_B}) = |\overrightarrow{s_A} - \overrightarrow{s_B}| \tag{2.175}$$

O módulo da posição coincide com a distância da posição $\overrightarrow{s_A}$ até a origem $(0, 0)$.

$$d(\overrightarrow{s_A}, \overrightarrow{s_O}) = |\overrightarrow{s_A} - \overrightarrow{s_O}| = |\overrightarrow{s_A}|$$

Substituindo a relação de subtração entre vetores em 2.282 acima:

$$d(\overrightarrow{s_A}, \overrightarrow{s_B}) = |(s_{Ax} - s_{Bx}, s_{Ay} - s_{By})|$$

$$d(\overrightarrow{s_A}, \overrightarrow{s_B}) = \sqrt{(s_{Ax} - s_{Bx})^2 + (s_{Ay} - s_{By})^2} \tag{2.176}$$

Esta definição coincide com a distância entre pontos 2.259. Assim a distância entre pontos no plano espacial segue a métrica usual.

Por exemplo, a distância entre um ponto $\overrightarrow{s_A} = (1m, 2m)$ e $\overrightarrow{s_B} = (2m, 1m)$ é de:

$$d(\overrightarrow{s_A}, \overrightarrow{s_B}) = |\overrightarrow{s_A} - \overrightarrow{s_B}| = |(-1m, 1m)| = \sqrt{2}m$$

2.8.4 Deslocamentos entre duas posições.

Quando um corpo pontual desloca-se posição $\overrightarrow{s_A}$ para a posição $\overrightarrow{s_B}$, o deslocamento é definido como.

$$\Delta\overrightarrow{s_{AB}} = \overrightarrow{s_B} - \overrightarrow{s_A} \tag{2.177}$$

Por exemplo, o deslocamento da posição $\overrightarrow{s_A} = (5cm, 2cm)$ para $\overrightarrow{s_B} = (7cm, 9cm)$ é $\Delta\overrightarrow{s_{AB}} = (7cm, 9cm) - (5cm, 2cm) = (2cm, 7cm)$. Já o deslocamento de $\overrightarrow{s_B} = (7cm, 9cm)$ para $\overrightarrow{s_c} = (2cm, 2cm)$ é $\Delta\overrightarrow{s_{BC}} = (-5cm, -7cm)$.

Se $\overrightarrow{s_A} = \overrightarrow{s_B}$, o deslocamento é nulo.

$\Delta\overrightarrow{s_{AA}} = \overrightarrow{s_A} - \overrightarrow{s_A} = \overrightarrow{s_O}$.

Assim como o deslocamento na reta, o deslocamento entre duas posições no plano é anticomutativo.

$$\Delta\overrightarrow{s_{AB}} = \overrightarrow{s_B} - \overrightarrow{s_A} = -(\overrightarrow{s_A} - \overrightarrow{s_B}) = -\Delta\overrightarrow{s_{BA}}$$

Usando ainda o exemplo das posições $\overrightarrow{s_A} = (5cm, 2cm)$ e $\overrightarrow{s_B} = (7cm, 9cm)$ então $\Delta\overrightarrow{s_{AB}} = (7cm, 9cm) - (5cm, 2cm) = (2cm, 7cm)$ e $\Delta\overrightarrow{s_{BA}} = (5cm, 2cm) - (7cm, 9cm) = (-2cm, -7cm) = -(2cm, 7cm)$.

Caso sejam feitos dois deslocamentos sucessivos, o deslocamento final será a soma dos dois deslocamentos. Em outras palavras, um deslocamento de A para B seguido de outro deslocamento de B para C equivale a um único deslocamento de A para C.

$$\Delta\overrightarrow{s_{AB}} + \Delta\overrightarrow{s_{BC}} = (\overrightarrow{s_B} - \overrightarrow{s_A}) + (\overrightarrow{s_C} - \overrightarrow{s_B})$$

$$\Delta\overrightarrow{s_{AB}} + \Delta\overrightarrow{s_{BC}} = \overrightarrow{s_B} - \overrightarrow{s_A} + \overrightarrow{s_C} - \overrightarrow{s_B} = \overrightarrow{s_C} - \overrightarrow{s_A}$$

$$\Delta\overrightarrow{s_{AB}} + \Delta\overrightarrow{s_{BC}} = \Delta\overrightarrow{s_{AC}} \tag{2.178}$$

Fica confirmada a analogia do vetor e do deslocamento comentada na seção anterior (ver 2.279). A soma vetorial representa o deslocamento total.

[ver figura]

Por exemplo, para as mesmas posições $\overrightarrow{s_A} = (5cm, 2cm)$, $\overrightarrow{s_B} = (7cm, 9cm)$ e $\overrightarrow{s_c} = (2cm, 2cm)$ os deslocamentos entre os 3 pontos ficam: $\Delta\overrightarrow{s_{AB}} = (2cm, 7cm)$,$\Delta\overrightarrow{s_{BC}} = (-5cm, -7cm)$ e $\Delta\overrightarrow{s_{AC}} = (-3cm, 0)$. A soma dos deslocamentos sucessivos de A para B e de B para C é igual ao deslocamento de A para C: $\Delta\overrightarrow{s_{AB}} + \Delta\overrightarrow{s_{BC}} = (-3cm, 0) = \Delta\overrightarrow{s_{AC}}$.

2.9 Funções Vetoriais

2.9.1 Conceito de função aplicado ao vetor.

Neste capítulo, é necessário dominar apenas um tipo de função: funções que associam um número real a um vetor. Estas funções são chamadas de "funções vetoriais".

"Uma função vetorial é uma relação de um número real $t \in \mathcal{R}$ com um único vetor com coordenadas $\overrightarrow{f}(t) = (g(t), h(t)) \in \mathcal{R}^2$ onde $g(t)$ e $h(t)$ são funções de uma variável real". Geralmente ela é representada como $\overrightarrow{f} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^2$.

A função abaixo ilustra bem o conceito.

$$\overrightarrow{f}(t) = (2t + 3, t^2)$$

A função que associa t à coordenada x é $g(t) = 2t + 3$. Já a função que associa t à coordenada y é $h(t) = t^2$. O número 0 é real. Assim, $\overrightarrow{f}(0) = (g(0), h(0)) = (3, 0)$, é um vetor. O único vetor relacionado ao 0 pela função $\overrightarrow{f}(t) = (2t + 3, t^2)$ é $(3, 0)$. Da mesma forma $\overrightarrow{f}(\frac{1}{2}) = (4, \frac{1}{4})$, ou seja, o único vetor relacionado à $\frac{1}{2}$ pela função $\overrightarrow{f}(t) = (2t + 3, t^2)$ é $(4, \frac{1}{4})$.

O número t que será associado à outro também é denominado "argumento da função". O argumento da função não será designado por x ou por y porque esta letra designa o eixo das abcissas. Outras letras podem ser usadas para representar o argumento da função, desde que a transformação seja mantida, mas é importante reservar as letras x e y para os eixos. Por exemplo, a função acima poderia ser representada por:

$$\overrightarrow{f}(u) = (2u + 3, u^2)$$

Para ilustrar que a função será a mesma, basta usar os dois exemplos anteriores: se $u = 0$ então $\overrightarrow{f}(0) = (3, 0)$ e se $u = \frac{1}{2}$, $\overrightarrow{f}(\frac{1}{2}) = (4, \frac{1}{4})$.

Também neste caso, cada número real está associado a um único vetor, mas dois números reais podem ser associados ao mesmo vetor. Por exemplo, para a função $\overrightarrow{f}(t) = (t^2, t^4)$, segue que $-1 \neq 1$ mas $\overrightarrow{f}(-1) = \overrightarrow{f}(1)$.

Analogamente ao que ocorre para funções de uma variável, é possível definir uma "função constante".

$$f(t) = \overrightarrow{c}$$

onde $\overrightarrow{c}$ é um vetor qualquer. Por exemplo, a função constante poderia ser $f(t) = (2, 3)$.

Uma função constante que tem importância particular é $f(x) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Ela também é conhecida como função nula.

Não existe para funções vetoriais um análogo da função identidade $f(x) = x$. Um escalar jamais é igual um vetor.

As analogias entre funções vetoriais segue adiante. Quando há mais de uma função em uma determinada oração, a notação $\overrightarrow{f}(x)$ pode apresentar ambiguidade. Por exemplo, se $\overrightarrow{f}(t) = (2t + 1, t^2)$ e $\overrightarrow{f}(x) = (t^2, 2^t)$ há duas funções distintas sendo representadas pela mesma letra $\overrightarrow{f}$. Nestes casos, é importante usar outras letras minúsculas para representar as outras funções. Não é conveniente usar as letras $\overrightarrow{g}$ ou $\overrightarrow{h}$ porque elas são usadas para representar as funções espcíficas em x e y. No exemplo citado, as funções poderiam ser representadas por $\overrightarrow{s}(t) = (2t + 1, t^2)$ e $\overrightarrow{v}(x) = (t^2, 2^t)$.

As funções vetoriais não são representadas através de gráficos. Para cada valor de t não há um número, mas um vetor $(x = g(t), y = h(t))$. Apesar disso, os pontos formados pelo rastro do extremo do vetor $(x = g(t), y =$

$h(t)$) formam curvas no plano xy. Estas curvas são chamadas de "curvas parametrizadas". No lugar de escrever uma relação valores de x e y, escolhe-se um terceiro valor t para fornecer $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

A seguir serão colocados alguns exemplos de funções. Foram escolhidas as funções mais usadas ao longo deste livro.

2.9.2 Exemplos de funções vetoriais.

Os exemplos de funções vetoriais são restritos, mas ilustrativos.

Cada componente da função vetorial é uma função linear.

A função vetorial linear é caracterizada como:

$$\overrightarrow{f}(t) = (\alpha_x t + \beta_x, \alpha_y t + \beta_y) \tag{2.179}$$

onde α_x, α_y, β_xe β_y são números reais.

Um exemplo da função vetorial linear é $\overrightarrow{f}(t) = (2t + 3, 4t - 1)$. Alguns valores para esta função são exibidos à seguir: $\overrightarrow{f}(0) = (3, -1)$, $\overrightarrow{f}(1) = (5, 3)$, $\overrightarrow{f}(2) = (7, 7)$, $\overrightarrow{f}(-1) = (1, -5)$, $\overrightarrow{f}(\frac{1}{2}) = (4, 2)$.

[ver figura].

A função linear vetorial pode ser reescrita a partir de 2.305 e das definição de soma vetorial 2.270:

$$\overrightarrow{f}(t) = (\alpha_x t + \beta_x, \alpha_y t + \beta_y) = (\alpha_x t, \alpha_y t) + (\beta_x, \beta_y)$$

Com a definição de produto escalar 2.284, o argumento t pode ser tratado como um escalar:

$$\overrightarrow{f}(t) = t(\alpha_x, \alpha_y) + (\beta_x, \beta_y)$$

Definido os vetores $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y)$ e $\overrightarrow{\beta} = (\beta_x, \beta_y)$ e substituindo acima:

$$\overrightarrow{f}(t) = t\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} \tag{2.180}$$

Os físicos costumam escrever o produto escalar $t\overrightarrow{\alpha}$ como $\overrightarrow{\alpha}t$.

$$\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{\alpha}t + \overrightarrow{\beta} \tag{2.181}$$

Por exemplo, a função $\overrightarrow{f}(t) = (2t+3, 4t-1) = (2,4)t + (3,-1)$.

A equação acima apresenta uma clara analogia com a função linear $f(x) = \alpha x + \beta$. Mas é necessário frisar que os termos $\overrightarrow{\alpha}$ e $\overrightarrow{\beta}$ são vetores. Portanto $\overrightarrow{\alpha}$ indica a taxa de crescimento da função, mas não há um gráfico que exprima a inclinação em relação ao eixo t. O coeficiente $\overrightarrow{\beta}$ exprime o vator da função em $t = 0$. Lembrando que o produto escalar de 0 com qualquer vetor é o vetor nulo 2.289 então $\overrightarrow{f}(0) = 0\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\mathcal{O}} + \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta}$. No entanto não faz sentido falar do significado gráfico de $\overrightarrow{\beta}$.

A analogia com a reta prossegue. A função vetorial linear 2.305 faz com que o extremo do vetor percorra uma reta no plano xy. O vetor $\overrightarrow{\alpha}t$ varia com o argumento t, mas o vetor $\overrightarrow{\alpha}t$ mantem-se paralelo à $\overrightarrow{\alpha}$. Se t varia de $-\infty$ até $+\infty$ o conjunto de todos os extremos do vetor $\overrightarrow{\alpha}t$ forma uma reta que contem o vetor $\overrightarrow{\alpha}$ e passa pela origem em $t = 0$. Ao somar o vetor $\overrightarrow{\beta}$ em cada vetor $\overrightarrow{\alpha}t$ cria-se uma reta paralela $\overrightarrow{\alpha}t + \overrightarrow{\beta}$.

Outra forma de verificar que a função linear vetorial corresponde a uma reta no plano xy é verificando diretamente as coordemadas do vetor. Partindo de 2.305:

$$x(t) = \alpha_x t + \beta_x \tag{2.182}$$

$$y(t) = \alpha_y t + \beta_y \tag{2.183}$$

Isolando t em 2.308:

$$t = \frac{x(t)}{\alpha_x} - \frac{\beta_x}{\alpha_x}$$

Substiutindo em 2.309:

$$y(t) = \alpha_y \left(\frac{x(t)}{\alpha_x} - \frac{\beta_x}{\alpha_x} \right) + \beta_y$$

$$y(t) = \left(\frac{\alpha_y}{\alpha_x} \right) x(t) + \left(\beta_y - \frac{\beta_x \alpha_y}{\alpha_x} \right)$$

$$y = \left(\frac{\alpha_y}{\alpha_x} \right) x + \left(\beta_y - \frac{\beta_x \alpha_y}{\alpha_x} \right) \tag{2.184}$$

A equação acima é de uma reta com coeficiente angular $\left(\frac{\alpha_y}{\alpha_x}\right)$ e coeficeinte linear $\left(\beta_y - \frac{\beta_x \alpha_y}{\alpha_x}\right)$. É interessante notar que as componentes do vetor $\overrightarrow{\alpha}$ determinam o coeficiente angular da reta mas o coeficiente linear da reta é determinado por $\overrightarrow{\alpha}$ e $\overrightarrow{\beta}$.

As funções 2.308 e 2.309 são denominadas “equações paramétricas da reta".

A reta que aparece no plano xy não deve ser confundida com a própria função linear. Por exemplo, as funções $\overrightarrow{f}(t) = (1,2)t + (0,1)$ e $\overrightarrow{s}(t) = (2,4)t + (2, \frac{1}{2})$ são funções distintas. Basta ver que $\overrightarrow{f}(0) = (0,1) \neq \overrightarrow{s}(0) = (2, \frac{1}{2})$ e $\overrightarrow{f}(1) = (1,3) \neq \overrightarrow{s}(1) = (4, \frac{9}{2})$. No entanto as retas descritas por estas duas funções são iguais. Fica para o leitor a verificação disso através da equação 2.310.

Função quadrática.

A função vetorial quadrática é caracterizada como:

$$\overrightarrow{f}(t) = (\alpha_x t^2 + \beta_x t + \gamma_x, \alpha_y t^2 + \beta_y t + \gamma_y) \tag{2.185}$$

onde α_x, α_y, β_x, β_y e γ_y são números reais. Pelo menos um dos termos α precisam ser diferentes de zero.

Um exemplo da função vetorial linear é $\overrightarrow{f}(t) = (2t+3, 4t^2-t+1)$. Alguns valores para esta função são exibidos à seguir: $\overrightarrow{f}(0) = (3,1)$, $\overrightarrow{f}(1) = (5,4)$, $\overrightarrow{f}(2) = (7,15)$, $\overrightarrow{f}(-1) = (1,6)$, $\overrightarrow{f}(\frac{1}{2}) = (4, \frac{3}{2})$.

[ver figura].

Analogamente ao que foi feito para a função quadrática vetorial pode ser reescrita a partir de 2.311 e das definição de soma vetorial 2.270:

$$\overrightarrow{f}(t) = (\alpha_x t^2 + \beta_x t + \gamma_x, \alpha_y t^2 + \beta_y t + \gamma_y) = (\alpha_x t^2, \alpha_y t^2) + (\beta_x t, \beta_y t) + (\gamma_x, \gamma_y)$$

Com a definição de produto escalar 2.284, o argumento t pode ser tratado como um escalar:

$$\overrightarrow{f}(t) = t^2(\alpha_x, \alpha_y) + t(\beta_x, \beta_y) + (\gamma_x, \gamma_y)$$

Definido os vetores $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y)$, $\overrightarrow{\beta} = (\beta_x, \beta_y)$ e $\overrightarrow{\gamma} = (\gamma_x, \gamma_y)$ substituindo acima:

$$\overrightarrow{f}(t) = t^2\overrightarrow{\alpha} + t\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma} \tag{2.186}$$

Os físicos costumam escrever o produto escalar $t^2\overrightarrow{\alpha}$ como $\overrightarrow{\alpha}t^2$ e $t\overrightarrow{\beta}$ como $\overrightarrow{\beta}t$.

$$\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{\alpha}t^2 + \overrightarrow{\beta}t + \overrightarrow{\gamma} \tag{2.187}$$

Como $\alpha_x \neq 0$ ou $\alpha_y \neq 0$, então $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$.

Por exemplo, a função $\overrightarrow{f}(t) = (2t+3, 4t^2 - t + 1) = (0,4)t^2 + (2,-1)t + (3,1)$.

A equação acima apresenta analogia com a função quadrática $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Novamente é necessário frisar que os termos $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ e $\overrightarrow{\gamma}$ são vetores. Fica a cargo do estudante examinar as analogias entre a função quadrática e a função vetorial quadrática.

A função vetorial quadrática 2.311 faz com que o extremo do vetor percorra uma parábola ou uma reta no plano xy. Caso os vetores $\overrightarrow{\alpha}$ e $\overrightarrow{\beta}$ tenham a mesma direção, a figura do plano xy será uma reta. Caso contrário, será uma parábola. A prova de que a função vetorial quadrática descreve uma parábola ou uma reta é pouco complicada e será omitida. Nem sempre y é uma função de x. As únicas possibilidades de y ser uma função de x é quando a reta não é vertical ou quando há uma parábola com $\overrightarrow{\alpha} = (0, \alpha_y) = \alpha_y(0,1) = \alpha_y \hat{j}$.

É interessante analisar alguns casos particulares da função quadrática. Em primeiro lugar será analisada a condição $\overrightarrow{\alpha} = (0, \alpha_y) = \alpha_y(0,1) = \alpha_y \hat{j}$ com $\beta_x \neq 0$

Verificando diretamente as coordemadas do vetor a partir de 2.311 com $\alpha_x = 0$:

$$x(t) = \beta_x t + \gamma_x \tag{2.188}$$

$$y(t) = \alpha_y t^2 + \beta_y t + \gamma_y \tag{2.189}$$

Isolando t em 2.314:

$$t = \frac{x(t)}{\beta_x} - \frac{\gamma_x}{\beta_x}$$

Substiutindo em 2.315:

$$y(t) = \alpha_y \left(\frac{x(t)}{\beta_x} - \frac{\gamma_x}{\beta_x} \right)^2 + \beta_y \left(\frac{x(t)}{\beta_x} - \frac{\gamma_x}{\beta_x} \right) + \gamma_y$$

$$y(t) = \alpha_y \left(\frac{x^2(t)}{\beta_x^2} - \frac{2x(t)\gamma_x}{\beta_x^2} + \frac{\gamma_x^2}{\beta_x^2} \right) + \beta_y \left(\frac{x(t)}{\beta_x} - \frac{\gamma_x}{\beta_x} \right) + \gamma_y$$

$$y(t) = \left(\frac{\alpha_y}{\beta_x^2} \right) x^2(t) + \left(\frac{\beta_y}{\beta_x} - \frac{2\gamma_x}{\beta_x^2} \right) x(t) + \left(\frac{\alpha_y \gamma_x^2}{\beta_x^2} + \gamma_y \right)$$

$$y = \left(\frac{\alpha_y}{\beta_x^2} \right) x^2 + \left(\frac{\beta_y}{\beta_x} - \frac{2\gamma_x}{\beta_x^2} \right) x + \left(\frac{\alpha_y \gamma_x^2}{\beta_x^2} + \gamma_y \right) \tag{2.190}$$

A equação acima corresponde ao gráfico de uma parábola $y = f(x)$. Se $\left(\frac{\alpha_y}{\alpha_x}\right) > 0$ a concavidade da parábola é para cima. Se $\left(\frac{\alpha_y}{\alpha_x}\right) < 0$ a concavidade da parábola é para baixo.

As funções 2.314 e 2.315 são denominadas “equações paramétricas da parábola".

Outro caso interessante é $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\beta}$ (os vetores são iguais, portanto têm a mesma direção). Substituindo $\alpha_x = \beta_x$ e $\alpha_y = \beta_y$ em 2.311 chega-se à:

$$x(t) = \alpha_x t^2 + \beta_x t + \gamma_x \tag{2.191}$$

$$y(t) = \alpha_x t^2 + \beta_x t + \gamma_y \tag{2.192}$$

Substriando Isolando t em 2.317 de 2.318:

$$x(t) - y(t) = \gamma_x - \gamma_y$$

$$y(t) = x(t) + \gamma_y - \gamma_x$$

$$y = x + (\gamma_y - \gamma_x) \tag{2.193}$$

A equação acima é um tipo particular de equação paramétrica da reta. Neste caso o coefiente angular da reta é 1 e o coeficiente linear, $(\gamma_y - \gamma_x)$.

Em analogia com a função linear, a figura que aparece no plano xy não deve ser confundida com a própria função. Por exemplo, as funções $\overrightarrow{f}(t) = (0,1)t^2 + (1,0)t$ e $\overrightarrow{s}(t) = (0,4)t^2 + (2,0)t$ são funções distintas. Apesar de $\overrightarrow{f}(0) = (0,0) = \overrightarrow{s}(0)$, $\overrightarrow{f}(1) = (1,1) \neq \overrightarrow{s}(1) = (2,4)$. No entanto a mesma parábola é descrita por estas duas funções distintas. Fica para o leitor a verificação disso através da equação 2.316.

O estudante pode estudar em livros de Cálculo Diferencial e Integral e de Geometria Analítica outras funções vetoriais. Outras funções vetoriais serão analisada em capítulos posteriores.

2.9.3 Cálculo Diferencial Vetorial.

A taxa de variação de uma função vetorial geralmente não é usada pelos físicos. Assim este conceito será omitido.

O cálculo diferencial pode ser extendido para funções vetoriais. No capítulo anterior, a derivada de uma função foi definida de várias formas. Uma das formas definidas foi:

$$f'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2.194}$$

A definição de derivada vetorial é análoga. No lugar da função de uma variável se coloca uma função vetorial. O argumento será designado por t.

$$\overrightarrow{f}'(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{f}(t+\Delta t) - \overrightarrow{f}(t)}{\Delta t} \tag{2.195}$$

Há uma diferença radical com a derivada acima. O numerador desta expressão é uma subtração entre vetores. Como o vetor foi dividido por um escalar (ver 2.292), oresultado é outro vetor. Para cada t há um único $\overrightarrow{f}'(t)$. Assim $\overrightarrow{f}'(t)$ também é uma função vetorial.

Outra notação comum para derivada vetorial é dada em analogia com $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$.

$$f'(t) = \frac{d\overrightarrow{s}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{f}(t)}{dt} \tag{2.196}$$

onde $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{f}(t)$.

Uma relação muito importante das derivadas vetoriais que não encontra análogo nas derivadas de funções de uma variável. Da definição 2.321 para a função $f(t) = (g(t), h(t))$:

$$\overrightarrow{f}'(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{(g(t+\Delta t), h(t+\Delta t)) - (g(t), h(t))}{\Delta t}$$

Usando as definições 2.282 e 2.292:

$$\overrightarrow{f}'(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{(g(t+\Delta t) - g(t), h(t+\Delta t) - h(t))}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{f}'(t) = lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right)$$

Como o argumento tende a zero, o limite pode ser aplicado em cada componente em particular:

$$\overrightarrow{f}'(t) = \left(lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}, lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right)$$

$$\overrightarrow{f}'(t) = \left(\frac{dg(t)}{dt}, \frac{dh(t)}{dt} \right) = (g'(t), h'(t)) \tag{2.197}$$

Para ilustrar o conceito de derivada vetorial será dado o exemplo da função vetorial linear 2.305 $\overrightarrow{f}(t) = (\alpha_x t + \beta_x, \alpha_y t + \beta_y)$.

$$\overrightarrow{f}'(t) = ((\alpha_x t + \beta_x)', (\alpha_y t + \beta_y)')$$

No capítulo anterior foi deduzido que $(\alpha x + \beta)' = \alpha$. Aplicando esta relação na expressão acima:

$$\overrightarrow{f}'(t) = (\alpha_x, \alpha_y) = \overrightarrow{\alpha}$$

Reescrevendo a função linear na forma 2.307 $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta}$ a relação acima fica bastante interessante:

$$(\overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta})' = \frac{d(\overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta})}{dt} = \overrightarrow{\alpha} \tag{2.198}$$

A expressão acima reforça a analogia com a derivada da função linear $(\alpha x + \beta)' = \alpha$.

A função vetorial quadrática 2.311 $\overrightarrow{f}(t) = (\alpha_x t^2 + \beta_x t + \gamma_x, \alpha_y t^2 + \beta_y t + \gamma_y)$ também pode ser sua derivada calculada através da propriedade 2.313:

$$\overrightarrow{f}'(t) = ((\alpha_x t + \beta_x t + \gamma_x)', (\alpha_y t^2 + \beta_y t + \gamma_y)')$$

No capítulo anterior foi deduzido que $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = 2\alpha x + \beta$. Aplicando esta relação acima:

$$\overrightarrow{f}'(t) = (2\alpha_x t + \beta_x, 2\alpha_y t + \beta_y)$$

ou desenvolvendo a expressão acima:

$$\overrightarrow{f}'(t) = (2\alpha_x t, 2\alpha_y t) + (\beta_x, \beta_y)$$

$$\overrightarrow{f}'(t) = 2t(\alpha_x, \alpha_y) + (\beta_x, \beta_y)$$

$$\overrightarrow{f}'(t) = 2\overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta}$$

Reescrevendo a relação acima pela relação 2.313:

$$(\overrightarrow{\alpha} t^2 + \overrightarrow{\beta} t + \overrightarrow{\gamma})' = \frac{d(\overrightarrow{\alpha} t^2 + \overrightarrow{\beta} t + \overrightarrow{\gamma})}{dt} = 2\overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta} \tag{2.199}$$

Isso reforça a analogia entre a função vetorial quadrática e a função quadrática ($(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = 2\alpha x + \beta$).

2.9.4 Regras de derivação vetorial.

Nesta subseção serão mostradas algumas regras de derivação de funções vetoriais sem recorrer à provas matemáticas formais. O cálculo da derivada de uma função vetorial $\overrightarrow{f'}(x)$ apresenta analogias com a derivada da função $f'(x)$. Isso já foi visto nos exemplos da função linear e quadrática. Essas analogias serão extendidas para outras funções.

Em primeiro lugar, começa-se com as funções conhecidas. Partindo-se das relações 2.324 repete-se a regra a função vetoriais linear:

$$(\overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta})' = \frac{d(\overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta})}{dt} = \overrightarrow{\alpha} \tag{2.200}$$

Por exemplo, $((1,2)t+(3,4))' = (1,2)$.

A regra 2.326 permite calcular a derivada de uma função vetorial constante. A função constante $\overrightarrow{f}(x) = \overrightarrow{c}$ pode ser reescrita como $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{\mathcal{O}}t + c$. Assim $\overrightarrow{f}(x)$ é uma função linear com $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ e $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{c}$. Substituindo estes valores em 2.326:

$$\frac{d\overrightarrow{c}}{dx} = \overrightarrow{c}' = \overrightarrow{\mathcal{O}} \tag{2.201}$$

Por exemplo $(1,2)' = (0,0)$

As regras que permite escrever a derivada da função vetorial quadrática 2.325 será repetida abaixo:

$$(\overrightarrow{\alpha}t^2 + \overrightarrow{\beta}t + \overrightarrow{\gamma})' = \frac{d(\overrightarrow{\alpha}t^2 + \overrightarrow{\beta}t + \overrightarrow{\gamma})}{dt} = 2\overrightarrow{\alpha}t + \overrightarrow{\beta} \tag{2.202}$$

Por exemplo, $((1,2)t^2 + (5,4)t + (7,0))' = (2,4)t + (5,4)$.

As regras acima referem-se a funções particulares. No capítulo anterior foi dada uma relação particular usada para função de uma variável $f(x)$ multiplicada por uma constante c que está reproduzida abaixo:

$$\frac{d(cf(x))}{dx} = (cf(x))' = c\frac{df(x)}{dx} \tag{2.203}$$

Para extender esta regra para vetores é necessário incluir dois análogos. Ou a constante c é substituida por um vetor constante $\overrightarrow{c}$ ou a função $f(x)$, por $\overrightarrow{f}(x)$.

$$\frac{d(f(t)\overrightarrow{c})}{dt} = (f(t)\overrightarrow{c})' = \overrightarrow{c}\frac{df(t)}{dt} \tag{2.204}$$

Por exemplo, $((3,6)t + (1,2))' = ((1,2)(3t+1))' = (1,2)(3t+1)' = (1,2)3 = (3,6)$. O leitor pode conferir o resultado aplicando diretamente

2.326.

No caso acima há um produto escalar. A função $f(t)$ é o escalar. O caso particular $f(t) = t^n$ ilustra bem esta propriedade.

$$\frac{d(\overrightarrow{\alpha} t^n)}{dt} = \overrightarrow{\alpha} \frac{dt^n}{dt}$$

No capítulo anterior foi visto que $(\frac{dx^n}{dx}) = 1$. Assim:

$$\frac{d(\overrightarrow{\alpha} t^n)}{dt} = nt^{n-1}\overrightarrow{\alpha} \tag{2.205}$$

Por exemplo, $((2,5)t^2)' = 2t(2,5) = (4,10)t$. O leitor pode conferir o resultado acima usando a regra 2.328.

O outro análogo da relação 2.329 é dado por:

$$\frac{d(c\overrightarrow{f}(x))}{dx} = (c\overrightarrow{f}(x))' = c\frac{d\overrightarrow{f}(x)}{dx} \tag{2.206}$$

Por exemplo, $((2,4) + (8,-2)t)' = (2((1,2) + (4,-1)t))' = 2((1,2) + (4,-1)t)' = 2(4,-1)$. O estudante pode conferir o resultado acima pela regra 2.326.

Enfim a regra conhecida como regra da soma:

$$\frac{d\overrightarrow{f}(x)}{dx} + \frac{d\overrightarrow{g}(x)}{dx} = \frac{d(\overrightarrow{f}(x) + \overrightarrow{g}(x))}{dx} \tag{2.207}$$

Neste exemplo será usada a regra 2.333 com 2.331:

$$\frac{d((1,3)t^5 + (4,0)t^3)}{dt} = \frac{d((1,3)t^5)}{dt} + \frac{d((4,0)t^3)}{dt} = 5(1,3)t^4 + 3(4,0)t^2$$

Tomando os vetores constantes $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ e $\overrightarrow{\gamma}$, é possível deduzir a partir de 2.333 , 2.331 e 2.327 as regras 2.326 e 2.328. Para ilustrar isso será feita apenas a dedução de 2.328.

$$(\vec{\alpha}t^2 + \vec{\beta}t + \vec{\gamma})' = (\vec{\alpha}t^2)' + (\vec{\beta}t)' + (\vec{\gamma})'$$

$$(\vec{\alpha}t^2 + \vec{\beta}t + \vec{\gamma})' = 2\vec{\alpha}t + \vec{\beta} + \vec{\mathcal{O}}$$

$$(\vec{\alpha}t^2 + \vec{\beta}t + \vec{\gamma})' = 2\vec{\alpha}t + \vec{\beta}$$

Há inúmeras outras funções e regras de derivação vetoriais que não serão apresentadas neste capítulo. A medida que estas regras e funções se tornarem necessárias, elas serão apresentadas nos próximos capítulos.

2.9.5 Interpretação geométrica da derivada vetorial.

Para funções vetoriais não há um gráfico exibindo $\vec{f}(t)$ e nem $\vec{f}'(t)$. Mas o extremo do vetor $\vec{f}(t)$ deixa um "caminho"no plano xy. Há uma importante relação entre o vetor $\vec{f}'(t)$ e esse caminho.

Partindo da definição da derivada vetorial, o vetor $\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)$ pode ser representado com a origem em $\vec{f}(t)$ e o extremo em $\vec{f}(t+\Delta t)$. A medida que $\Delta t \to 0$, o vetor $\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)$ se aproxima da reta tangente à curva descrita por $\vec{f}(t)$ no plano xy. No entanto, quando $\Delta t \to 0$ o módulo de $\vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)$ tende à 0. Mas como $\vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)$ está dividido por Δt, o módulo da derivada $\vec{f}'(t)$ não vai a zero. Como resultado, o vetor $\vec{f}'(t)$ é tangente à curva descrita em xy.

2.10 Vetor posição como função do tempo.

Nesta seção a cinemática no plano será desenvolvida em analogia com a cinemática na reta. Os aspectos da cinemática vetorial explorados neste capítulo são fundamentais para a compreensão da Mecânica Clássica.

2.10.1 Tempo como parâmetro, posição como função.

No capítulo anterior foi explorado o movimento de um corpo pontual em uma reta espacial. Neste capítulo será explorado o movimento de um corpo pontual em um plano espacial.

Na cinemática da reta, a posição do corpo pontual é uma função do tempo $s = f(t)$. No plano a posição é um vetor $\overrightarrow{s}$. No plano espacial, a posição é uma função vetorial do tempo t.

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{f}(t)$$

A letra t é tanto usada para tempo como para o argumento de uma função vetorial qualquer.

A notação mais usada é:

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s}(t)$$

Analogamente ao movimento em uma dimensão, a função vetorial $\overrightarrow{s}(t)$ também é chamada de movimento.

Para ilustrar que a posição vetorial é função do tempo, mas o tempo não sempre é função da posição será usado um exemplo análogo ao movimento retilíneo. Assim como na reta, no plano espacial um corpo pode sair do ponto A para o ponto B e retornar para A. Observando apenas para o espaço, o corpo deslocou-se $\Delta\overrightarrow{s_{AB}}$ e depois $\Delta\overrightarrow{s_{BA}}$. O deslocamento total foi de $\Delta\overrightarrow{s_{AB}} + \Delta\overrightarrow{s_{BA}} = \Delta\overrightarrow{s_{AA}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Observando o tempo, o corpo saiu do instante t_A para t_B em Δt_{AB}. No entanto, mesmo que o corpo volte ao ponto A, o tempo não retornou para t_A. Assim o instante que o corpo voltou a A não pode ser indexado como t_A. Representando o instante de retorno à A como $t_C > t_A$, chega-se aos intervalos de tempo $\Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} = \Delta t_{AC} > 0$

porque $\Delta t_{AB} > 0$ e $\Delta t_{BC} > 0$. Em suma, $\overrightarrow{s_A}$ está associado a dois instantes dois instantes distintos t_A e t_C. Um corpo não pode ocupar dois lugares ao mesmo tempo, mas pode ocupar dois tempos em um mesmo lugar.

Os pares $(t, \overrightarrow{s}(t))$ que representam as trajetórias dos corpos ao longo do tempo não podem ser representadas em gráficos. Não há um plano cartesiano espaço-temporal. No entanto, a relação entre as coordenadas x e y da função $\overrightarrow{s}(t)$ fica representada no plano espacial xy. Assim, há um plano cartesiano espacial, mas não um gráfico da função.

O caminho percorrido por $\overrightarrow{s}(t)$ no plano xy é a própria trajetória do corpo pontual no plano espacial. É importante enfatizar que o plano espacial não é adimensional. Também é importante ressaltar que o argumento t não será adimensional, mas tem dimensão temporal. Além disso, asssim como no movimento retilíneo, o tempo passa a ser considerado somente após um tempo inicial ($t \geq 0$).

O ponto material com coordenadas $(x(t), y(t))$ tem suas projeções nos eixos x e y. A medida que o corpo se move, suas projeções $x(t)$ e $y(t)$ se movem também. Os movimentos $x(t)$ e $y(t)$ são ambos movimentos retilíneos. Assim o movimento no plano pode ser entendido através de dois movimentos retilíneos. Esta “análise"do movimento no plano foi discutida no capítulo anterior. Agora fica claro ao estudante as vantagens de estudar em pormenores o movimento na reta. Por mais complicado que seja o movimento no plano, sua análise o reduz a dois movimentos retilíneos.

Abaixo há apenas dois exemplos de movimentos. Os nomes dos movimentos farão sentido ao longo do capítulo, mas o estudante já pode esperar as analogias com o movimento em uma dimensão:

- Movimento retilíneo uniforme (MRU) no plano é uma função vetorial linear do tempo $\overrightarrow{s}(t) = \overrightarrow{\alpha}t + \overrightarrow{\beta}$.

- Movimento uniformemente variado (MUV) é uma função quadrática do tempo $\overrightarrow{s}(t) = \overrightarrow{\alpha}t^2 + \overrightarrow{\beta}t + \overrightarrow{\gamma}$. É interessante notar que este movimento não é necessariamente retilíneo.

Assim como no movimento retilíneo, há um significado físico para as constantes acima. Estes significados serão explorados ao longo deste capítulo. As coordenadas das constantes vetoriais deverão ter unidades também.

2.10.2 Análise dimensional da função $\overrightarrow{s}(t)$

A análise dimensional do movimento no plano é análogo àquela da reta.

No MRU $\overrightarrow{s}(t) = \overrightarrow{\alpha}t + \overrightarrow{\beta}$, as constantes $\overrightarrow{\alpha}$ e $\overrightarrow{\beta}$ não são adimensionais. A constante $\overrightarrow{\beta}$ tem a mesma dimensão de espaço. Já $\overrightarrow{\alpha}$ deve ter dimensão de espaço sobre tempo.

No MUV $\overrightarrow{s}(t) = \overrightarrow{\alpha}t^2 + \overrightarrow{\beta}t + \overrightarrow{\gamma}$. A constante $\overrightarrow{\gamma}$ tem dimensão de espaço, $\overrightarrow{\beta}$ tem dimensão de espaço sobre tempo e $\overrightarrow{\alpha}$ tem dimensão de espaço sobre tempo ao quadrado.

Assim como nos movimentos retilíneos, é comum que os livros didáticos omitam as unidades das constantes. Novamente, há algum sistema de unidades implícito. Se o sistema adotado é o SI, $\overrightarrow{\alpha}$ tem dimensão de m/s^2, $\overrightarrow{\beta}$ fica em m/s e $\overrightarrow{\gamma}$ está em m.

2.10.3 Posição inicial

O vetor posição de um corpo começa a ser medido no instante em que o cronômetro é ligado $t = 0$. Através das funções $\overrightarrow{s}(t)$ é possível saber qual a relação entre a posição inicial $\overrightarrow{s}(0) = \overrightarrow{s_0}$ e as constantes que definem o movimento.

No caso do MRU (2.15.1), $\overrightarrow{s}(0) = \overrightarrow{s_0} = \overrightarrow{\beta}$. Isso confirma que $\overrightarrow{\beta}$ tem dimensão de espaço e reforça a analogia com o MRU na reta. O MRU pode ser reescrito como:

$$\overrightarrow{s}(t) = \overrightarrow{\alpha}t + \overrightarrow{s_0} \tag{2.208}$$

Já para o MUV, $\overrightarrow{s}(0) = \overrightarrow{s_0} = \overrightarrow{\gamma}$. Também havia sido previsto que $\overrightarrow{\gamma}$ tem dimensão de espaço. O MRV 2.15.1 pode ser reescrito como:

$$\overrightarrow{s}(t) = \overrightarrow{\alpha}t^2 + \overrightarrow{\beta}t + \overrightarrow{s_0} \tag{2.209}$$

No sistema internacional de unidades, $\overrightarrow{s_0}$ é medido em metros (m).

2.10.4 Velocidade vetorial.

A velocidade média geralmente não é definida no estudo do movimento em uma dimensão. Os problemas que envolvem a velocidade média geralmente estão relacionados ao intervalo de tempo e ao consumo de energia. Ou seja, os problemas estão associados à trajetória do corpo e não apenas à suas posições inicial e final. Por exemplo, se um carro sai do ponto A e chega ao ponto B em linha reta, ele gasta menos combustível do que se o trajeto é circular. O vetor deslocamento constitui uma perda significativa de informação. Assim o que interessa na cinemática do plano é a velocidade vetorial instantânea. Esta velocidade será chamada simplesmente de "velocidade".

A velocidade vetorial é definida como a derivada da função posição vetorial. Partindo da definição 2.321:

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{s}'(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{s}(t + \Delta t) - \overrightarrow{s}(t)}{\Delta t} \tag{2.210}$$

Usando a notação 2.322.

$$\vec{v}(t) = \vec{s}\,'(t) = \frac{d\vec{s}(t)}{dt} \qquad (2.211)$$

E usando a notação 2.323:

$$\vec{s}\,'(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right) = (v_x(t), v_y(t)) \qquad (2.212)$$

onde $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ e $v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$.

A notação acima é extremamente interessante. Cada uma das projeções $x(t)$ e $y(t)$ têm suas próprias velocidades $v_x(t)$ e $v_y(t)$.

Através das regras de derivação, é possível calcular as velocidades em vários tipos de movimento. Para o MRU 2.15.1 aplica-se a regra 2.324:

$$\vec{v}(t) = \frac{d(\vec{\alpha}t + \vec{s_0})}{dt} = \vec{\alpha}$$

Assim, a constante $\vec{\alpha}$ do MRU é a velocidade vetorial constante. Reescrevendo o MRU para $\vec{v}(t) = \vec{\alpha} = \vec{v}$ acima:

$$\vec{s}(t) = \vec{v}t + \vec{s_0}$$

[...]

Para o MRUV 2.335, a velocidade instantânea é dada pela regra 2.61:

$$v(t) = (\alpha t^2 + \beta t + s_0)' = 2\alpha t + \beta$$

Para o MRUV, a velocidade instântanea muda a cada instante. É interessante caracterizar a constante β. A velocidade instantânea inicial é $v(0) = \beta$. Assim $\beta = v_0$ é a velocidade inicial. Anteriormente a dimensão de β já ficara indicada como espaço sobre tempo. O MRUV fica redefinido como:

$$s(t) = \alpha t^2 + v_0 t + s_0 \tag{2.213}$$

e a velocidade do MRUV como:

$$v(t) = 2\alpha t + v_0 \tag{2.214}$$

Enfim, para o movimento de arraste 2.76, a velocidade é dada pelas regras 2.67, **??**, 2.329 e 2.69:

$$v(t) = (s_f - (s_f - s_0)e^{-\beta t})' = (s_f)' + (-(s_f - s_0)e^{-\beta t}))'$$

$$v(t) = 0 - (s_f - s_0)(e^{-\beta t})' = -(s_f - s_0)(-\beta)(e^{-\beta t})$$

$$v(t) = \beta(s_f - s_0)e^{-\beta t} \tag{2.215}$$

A velocidade inicial é dada por $v_0 = v(0) = \beta(s_f - s_0)$, então $\beta = \frac{v_0}{s_f - s_0}$. É interessante notar que a dimensão de β deveria ser de espaço sobre tempo. A divisão de velocidade (espaço sobre tempo) por um espaço tem dimensão de 1 sobre o tempo, o que confirma a previsão. Reescrevendo a posição 2.76 e a velocidade 2.341 com a definição de $\beta = \frac{v_0}{s_f - s_0}$:

$$s(t) = s_f - (s_f - s_0)e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.216}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.217}$$

É interessante ressaltar que no limite em que o tempo vai a infinito, a exponencial $e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}$ tende a 0. Assim, a velocidade no movimento de arraste tende a zero.

A definição $v(t) = s'(t)$ pode ser substituída no teorema fundamental do cálculo 2.71:

$$\int_{t_1}^{t_2} s'(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1) \tag{2.218}$$

Esta relação será analisada em casos posteriores. A principal utilidade desta expressão é identificar a variação de espaço $s(t_2) - s(t_1)$ a partir de gráficos de $v(t)$.

Os exemplos abaixo ilustram bem os cálculos de velocidade instântanea:

- Um MRU com função $s(t) = 4t + 3$ tem velocidade instantanea em qualquer instante de tempo de $v(t) = 4m/s$ de acordo com a relação 2.86.

- Um corpo arremessado para cima com velocidade de $40m/s$ tem as posições dadas pelo MRUV $s(t) = -5t^2 + 40$. De acordo com 2.339, a velocidade instantânea é de $v(t) = -10t + 40$. Acompanhando o movimento a cada $1s$, as posições e as velocidades até o retorno do corpo ao solo ficam:

$s(t)$	$v(t)$
$s(0) = 0$	$v(0) = 40m/s$
$s(1s) = 35m$	$v(1s) = 30m/s$
$s(2s) = 60m$	$v(2s) = 20m/s$
$s(3s) = 75m$	$v(3s) = 10m/s$
$s(4s) = 80m$	$v(4s) = 0$
$s(5s) = 75m$	$v(5s) = -10m/s$
$s(6s) = 60m$	$v(6s) = -20m/s$
$s(7s) = 35m$	$v(7s) = -30m/s$
$s(8s) = 0$	$v(8s) = -40m/s$

- Uma lancha que navega no mar tem MA dado por $s(t) = 20-10e^{-t}$. De acordo com a relação 2.343, a velocidade instantânea é de $v(t) = 10e^{-t}$. As posições e velocidades nos primeiros quatro segundos e em um tempo infinitamente longo são de:

$s(t)$	$v(t)$
$s(0) = 10m$	$v(0) = 10m/s$
$s(1s) = 16,32m$	$v(1s) = 3,68m/s$
$s(2s) = 18,65m$	$v(2s) = 1,35m/s$
$s(3s) = 19,50m$	$v(3s) = 0,50m/s$
$s(4s) = 19,82m$	$v(4s) = 0,18m/s$
$s(t \to \infty) = 20m$	$v(t \to \infty) = 0$

2.10.5 Aceleração.

A variação da velocidade apresenta propriedades físicas muito importantes. Estas propriedades serão vistas posteriormente. Por isso, é importante definir a derivada da velocidade. Esta derivada é chamada de aceleração. Usando a notação 2.322.

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

A dimensão da aceleração é de velocidade sobre tempo, ou equivalentemente, espaço sobre tempo ao quadrado. No SI a unidade de aceleração é m/s^2. A aceleração m/s^2 corresponde a um aumento de velocidade de $1m/s$ a cada $1s$, ou seja, $(m/s)/s = m/s^2$. Por exemplo, uma aceleração $10m/s^2$ corresponde a um aumento de velocidade de $10m/s$ a cada $1s$.

Outra unidade muito usada é o km/hs. Esta unidade corresponde a um aumento de $1km/h$ na velocidade a cada $1s$, ou seja, $(km/h)/s = km/hs$. Para converter esta aceleração em m/s^2 o procedimento é análogo ao que foi feito para conversão de velocidade.

$$\frac{km}{hs} = \frac{1.000m}{3600s^2} = \left(\frac{1}{3,6}\right)\frac{m}{s^2}$$

O fator de conversão de km/hs para m/s^2 é o mesmo de km/h para m/s

.

Usando as definições de derivada 2.48, 2.49 e 2.50, a aceleração pode ser definida como:

$$a(t) = v'(t) = lim_{t_m \to t}\frac{v(t_m) - v(t)}{t_m - t}$$

$$a(t) = v'(t) = lim_{\Delta t \to 0}\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$a(t) = v'(t) = lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

A aceleração de um MRU é dada pela regra **??** na derivada da velocidade 2.86:

$$a(t) = v'(t) = (v)' = 0 \tag{2.219}$$

Assim o MRU é caracterizado pela aceleração nula.

No caso do MRUV, a aceleração é dada pelas regra 2.58 na velocidade 2.340:

$$a(t) = \frac{d(2\alpha t + v_0)}{dt} = 2\alpha$$

onde o coeficiente linear acima é 2α, não α.

A aceleração no MRUV é constante. É por isso que ele é chamado de MRUV. Há uma variação uniforme na velocidade. Por ser uma função constante, $a(t)$ pode ser designada simplesmente por $a(t) = a$. Então $2\alpha = a$, logo $\alpha = \frac{a}{2}$. A previsão inicial de que a unidade de α era espaço sobre tempo ao quadrado fica confirmada. Substituindo $\alpha = \frac{a}{2}$ nas expressões de $s(t)$ 2.339 e $v(t)$ 2.340 chega-se a:

$$s(t) = \left(\frac{a}{2}\right) t^2 + v_0 t + s_0 \tag{2.220}$$

$$v(t) = at + v_0 \tag{2.221}$$

$$a(t) = a \tag{2.222}$$

Caso a aceleração seja nula ($a = 0$) as equações do MRUV reduzem-se ao MRU com $v_0 = v$. Assim o MRU pode ser considerado um caso particular de MRUV.

No caso do movimento de arraste, a aceleração é dada pelas regras 2.329 e 2.69 na velocidade 2.343:

$$a(t) = \frac{d(v_0 e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t})}{dx} = v_0 \frac{d(e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t})}{dx}$$

$$a(t) = v_0 \left(-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)\right) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}$$

$$a(t) = -\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.223}$$

Quando $a(t) > 0$ e $v(t) > 0$, a velocidade está aumentando porque $a(t)$ é a derivada de $v(t)$. Além disso, o módulo da velocidade $|v(t)|$ está aumentando. Já para $a(t) > 0$ e $v(t) < 0$, a velocidade está aumentando, mas o módulo está diminuindo porque o corpo está indo de uma velocidade negativa para o repouso. Analogamente, para $a(t) < 0$ e $v(t) > 0$, a velocidade está diminuindo e o módulo da velocidade também. Enfim, se $a(t) < 0$ e $v(t) < 0$, a velocidade está diminuindo, mas o módulo da velocidade aumenta. Movimentos onde o módulo da velocidade aumenta ou diminui são classificados respectivamente como acelerados ou retardados. Em resumo:

- Movimento acelerado $\frac{v(t)}{a(t)} > 0$
- Movimento retardado $\frac{v(t)}{a(t)} < 0$

Analogamente ao que foi feito com a velocidade, a definição $a(t) = v'(t)$ pode ser substituída no teorema fundamental do cálculo 2.71:

$$\int_{t_1}^{t_2} v'(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1) \tag{2.224}$$

Esta relação será analisada em casos posteriores. A principal utilidade desta expressão é identificar a variação de espaço $v(t_2) - v(t_1)$ a partir de gráficos de $a(t)$.

É interessante ilustrar alguns exemplos de aceleração instantânea:

- O movimento $s(t) = 118t + 345$ é um MRU, então de acordo com 2.345 a aceleração é $a(t) = 0$
- Um corpo lançado em queda livre de uma altura de $20m$ descreve um MRUV $s(t) = -5t^2 + 20$. De acordo com 2.348 a aceleração do corpo é constante $a(t) = -10m/s^2$.

- Usando o mesmo movimento de arraste da seção anterior ($s(t) = 20 - 10e^{-t}$ e $v(t) = 10e^{-t}$), a relação 2.349, a aceleração é de $a(t) = -10e^{-t}$. Comparando posição, velocidade e aceleração nos quatro primeiros segundos e em um tempo infinitamente longo:

$s(t)$	$v(t)$	$a(t)$
$s(0) = 10m$	$v(0) = 10m/s$	$a(0) = -10m/s^2$
$s(1s) = 16,32m$	$v(1s) = 3,68m/s$	$a(0) = -3,68m/s^2$
$s(2s) = 18,65m$	$v(2s) = 1,35m/s$	$a(0) = -1,35m/s^2$
$s(3s) = 19,50m$	$v(3s) = 0,50m/s$	$a(0) = -0,50m/s^2$
$s(4s) = 19,82m$	$v(4s) = 0,18m/s$	$a(0) = -0,18m/s^2$
$s(t \to \infty) = 20m$	$v(t \to \infty) = 0$	$a(t \to \infty) = 0$

2.10.6 Comentários sobre o movimento retilíneo uniforme.

O movimento retilíneo uniforme (MRU) pode ser reconhecido tanto pelas equações da posição, velocidade e aceleração como pelos gráficos correspondentes. Reescrevendo 2.81, 2.86 e 2.345:

$$s(t) = vt + s_0 \tag{2.225}$$

$$v(t) = v \tag{2.226}$$

$$a(t) = 0 \tag{2.227}$$

Se $v > 0$, o movimento é progressivo. Caso $v < 0$, o movimento é retrógrado. Enfim, se $v = 0$ o corpo está em repouso. Não se trata de um repouso instantâneo, mas permanente.

O instante que o corpo em MRU cruza a origem $s(t) = 0$ é dado pela raíz da função linear 2.33 com $\alpha = v$ e $\beta = s_0$.

$$t_{\mathcal{O}} = -\frac{s_0}{v} \tag{2.228}$$

onde $t_{\mathcal{O}}$ não é o instante inicial, mas àquele em que o corpo cruza a origem.

Como os instantes considerados na cinemática são sempre positivos, então $\frac{s_0}{v}$ deve ser negativo ou nulo. Assim há apenas quatro possibilidades:

- $s_0 > 0$ e $v < 0$: neste caso o corpo tem posição positiva e o movimento é retrógrado, de modo que o corpo cruzará a origem. Caso $s_0 > 0$ e $v > 0$ o corpo apenas se afasta da origem rumo a $+\infty$

- $s_0 < 0$ e $v > 0$: neste caso o corpo tem posição negativa e o movimento é progressivo, de modo que o corpo cruzará a origem. Caso $s_0 < 0$ e $v < 0$ o corpo apenas se afasta da origem rumo a $-\infty$

- $s_0 = 0$ e $v < 0$ ou $v > 0$: neste caso o corpo partiu da própria origem, cruzando-a no intante $t = 0$. O próprio resultado 2.354 confirma isso: $t_{\mathcal{O}} = 0$

- $s_0 = 0$ e $v = 0$: neste caso o corpo está em repouso na própria origem, em todos os instantes de tempo ($s(t) = 0$). A expressão 2.354 não pode ser aplicada porque redunda em indeterminação. Na descrição da função linear já havia sido previsto que uma função constante nula tem como raíz todo o eixo x.

Identificando o MRU pelos gráficos, a função $s(t)$ aparece como uma reta. O ponto em que a reta cruza o eixo s é o coeficiente linear. Logo, o ponto em que a reta cruza o eixo s é a posição inicial s_0. O coeficiente linear é a velocidade v. Se a inclinação da reta é positiva,o movimento é progressivo. Analogamente, se a inclinação da reta é negativa,o movimento é retrógrado. Enfim, se a reta é horizontal, há repouso.

[desenhar 3figuras: $v > 0$,$v < 0$ e $v = 0$]

As possibilidades do instante em que o corpo cruza a origem podem ser reinterpretadas geometricamente.

- $s_0 < 0$ e $v > 0$: neste caso a reta começa na parte positiva do eixo s, mas com a inclinação negativa, a reta encontra o eixo t no instante dado por 2.354. Caso $s_0 < 0$ e $v < 0$, a reta só poderá cruzar o eixo t na parte negativa deste eixo, o que está sendo excluído

- $s_0 > 0$ e $v < 0$: neste caso a reta começa na parte negativa do eixo s, mas com a inclinação positiva, a reta encontra o eixo t no instante dado por 2.354. Caso $s_0 > 0$ e $v > 0$, a reta só poderá cruzar o eixo t na parte negativa deste eixo, o que está sendo excluído

- $s_0 = 0$ e $v < 0$ ou $v > 0$: neste caso a reta cruza o próprio cruzamento dos eixos s e t. Assim o instante do cruzamento é o próprio $t = 0$.

- $s_0 = 0$ e $v = 0$: neste caso a reta do movimento coincide com o eixo t. Em todos os instantes de tempo o corpo está na posição s_0.

A função $v(t) = v$ do MRU é uma função constante. O gráfico de $v(t)$ é uma reta horizontal. Se o movimento é progressivo $(v > 0)$, a reta horizontal fica acima do eixo t. Já se o movimento é retrógrado $(v < 0)$, a reta horizontal fica abaixo do eixo t. Enfim, se o corpo está em repouso $(v = 0)$, a reta do movimento coincide com o eixo t.

[desenhar gráficos de $v(t)$].

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

Caso o movimento seja progressivo, a superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente acima do eixo t. Assim a integral acima é positiva ($s(t_2) - s(t_1) > 0$) e consequentemente $s(t_2) > s(t_1)$. Inversamente, se o movimento é retrógrado, a reta fica abaixo do eixo t, a integral é negativa e $s(t_2) > s(t_1)$. Enfim, se $v = 0$, a reta concide com o eixo t, não tendo área abaixo e nem acima. Assim a integral é nula e $s(t_2) - s(t_1) = 0$, logo $s(t_2) = s(t_1)$.

Também é interessante calcular a integral 2.344 a partir de 2.81.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = vt_2 + s_0 - (s(t_1) + s_0)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = vt_2 + s_0 - vt_1 - s_0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = v(t_2 - t_1)$$

A fórmula acima confirma toda a interpretação do gráfico de $v(t)$.

Enfim $a(t) = 0$ é uma função constante. O gráfico de $a(t) = 0$ é uma reta que coincide com o eixo t. Geralmente este gráfico não costuma ser representado.

Eis dois exemplos de aplicação do MRU:

- Um home com paraquedas aberto cai em linha reta com velocidade constante a partir de uma altura de $200m$ com velocidade constante de aproximadamente $8m/s$. Em quanto tempo o homem atinge o solo?

Existem duas formas de resolver este problema. A primeira forma consiste em colocar a origem no solo e o sentido positivo para cima. Assim $s_0 = 200m$ e $v = -8m/s$ porque o corpo cai de cima para baixo. A equaçõa horária pode ser escrita como:

$$s(t) = -8t + 200$$

Como o solo é a origem da reta, o momento que o corpo atinge o solo é a raíz da função 2.354:

$$t = -\frac{s_0}{v_0} = -\frac{200}{(-8)} = 25$$

Resp.: $t = 25s$

A outra forma de resolver o problema consiste em colocar o sentido positivo da reta de cima para baixo e a origem do sistema, o local onde o corpo se encontra. Assim $s_0 = 0$ e $v = 8m/s$. A equação horária fica:

$$s(t) = 8t$$

A posição do solo fica $s(t) = 200m$. Assim é necessário encontrar o instante em que $s(t) = 200$.

$$200 = 8t \Rightarrow t = \frac{200}{8} = 25$$

O instante é o mesmo, como era de se esperar.

- Um carro sai do $km - 80$ de uma estrada com uma velocidade média de $72km/h$ e anda estrada à frente. Onde estará o carro após meia hora?

O carro não tem velocidade constante. No entanto, com as acelerações e desacelerações ao longo do tempo, o modelo para descrever movimento do carro pode ser o de uma velocidade constante. Além disso, a estrada não é necessariamente reta. Mas como o problema não envolve os típicos problemas de movimento curvo (como a aceleração centrípeta), a estrada será aproximada por uma reta. Não é conveniente colocar a origem da reta espacial no carro no momento de sua partida. O sistema de localização da estrada é feito através de placas fixadas na estrada. Colocar a origem da reta espacial $km - 80$ é um desperdício de informação espacial. Ao deixar a origem no $km - 0$, o carro poderá ser localizado através das placas da estrada. Com $s_0 = 80km$ e $v = 72km/h$, a equação horária do movimento em unidades de km e h é

$$s(t) = 72t + 80 \quad (km; h)$$

após meia hora o carro estará em

$$s(0,5) = 72(0,5) + 80 = 36 + 80 = 116$$

o carro se encontrará em $s(0,5h) = 116km$, ou na linguagem rodoviária, no $km - 116$.

O problema pode ser reescrito em SI. Convertendo $s_0 = 80km = 80.000m$ e $v = 72km/h = 20m/s$, a equação horária fica:

$$s(t) = 20t + 80.000$$

após meia hora ($t = 0,5h = 1.800s$) o carro estará em

$$s(0,5) = 20(1.800) + 80.000 = 36.000 + 80.000 = 116.000$$

o carro estará em $s(1.800s) = 116.000m$, o que coincide com a resposta em km.

2.10.7 Comentários sobre movimento retilíneo uniformemente variado.

O movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) pode ser reconhecido tanto pelas equações da posição, velocidade e aceleração como pelos gráficos correspondentes. Reescrevendo 2.346, 2.347 e 2.348:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0 \tag{2.229}$$

$$v(t) = at + v_0 \tag{2.230}$$

$$a(t) = a \tag{2.231}$$

Há uma relação importante entre a posição e a velocidade. Isolando o tempo em 2.356:

$$t = \frac{v(t) - v_0}{a}$$

Substituindo o tempo acima em 2.355:

$$s(t) = \frac{a}{2}\left(\frac{(v(t) - v_0)}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{(v(t) - v_0)}{a}\right) + s_0$$

$$s(t) = \frac{v^2(t) - 2v(t)v_0 + v_0^2}{2a} + \frac{(v_0 v(t) - v_0^2)}{a} + s_0$$

$$s(t) = \frac{v^2(t) - 2v(t)v_0 + v_0^2 + 2v_0 v(t) - 2v_0^2}{2a} + s_0$$

$$s(t) = \frac{v^2(t) - v_0^2}{2a} + s_0$$

Para cada instante de tempo t, há uma única posição $s(t)$ para cada $v(t)$. Assim a posição no MRUV é uma função da velocidade: $s = s(v)$. Reescrevendo a relação acima:

$$s(v) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} + s_0 = \left(\frac{1}{2a}\right) v^2 - \frac{v_0^2}{2a} + s_0 \tag{2.232}$$

A relação acima é denominada "relação de Torricceli"embora a forma acima não seja muito popular. Isolando v na relação acima (omitindo que s é função de v):

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) \tag{2.233}$$

esta é a forma mais comum da relação de Torricceli. É interessante notar que para cada s há duas velocidades $\pm v$ correspondentes, de modo que a velocidade não é função da posição. Em suma, para cada velocidade, há uma única posição, mas para uma posição podem haver duas velocidades. O significado físico desta relação é que no MRUV, o corpo poderá passar duas vezes pelo menos ponto s com velocidades opostas $\pm\sqrt{v_0^2 + 2a(s - s_0)}$.

Os gráficos de $s(t)$ será uma parábola, cuja a concavidade depende de a. Já o gráfico de $v(t)$ é uma reta cujo coeficiente linear é a velocidade inicial v_0 e o coeficiente angular é a. Enfim, o gráfico de $a(t)$ é uma reta horizontal na altura a. O gráfico de $s(v)$ é uma parábola cuja concavidade depende de $\frac{1}{2a}$.

[desenhar os gráficos descritos acima].

Um instante de muito interesse no MRUV é aquele em que o corpo está em repouso instantâneo. Conforme a relação 2.57 a derivada no vértice da função quadrática é nula. Como a derivada da posição é a velocidade, a velocidade no vértice é nula. Analisando o vértice da função quadrática,

$\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = v_0$ e $\gamma = s_0$. Assim o vértice das expressões 2.35 e 2.36 ficam respectivamente:

$$t_v = -\frac{v_0}{a} \tag{2.234}$$

$$s_v = s(-\frac{v_0}{a}) = -\frac{v_0^2}{2a} + s_0 \tag{2.235}$$

Como o tempo na cinemática só é considerado para $t > 0$, o vértice só será atingido se $t_v \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{v_0}{a}\right) \leq 0$. Assim o corpo só atingirá o vértice se o movimento começa retardado ou em repouso. O significado físico desta conclusão é interessante. O vértice do MRUV corresponde ao instante onde o corpo está em repouso. Se o movimento é retardado o corpo entrará em repouso. No caso do MRUV este repouso será apenas no único instante t_v. Se o corpo começa a partir do repouso ($v_0 = 0$),o instante em que o corpo está em repouso é o próprio $t = 0$ ($t_v = -\frac{0}{a} = 0$). Mas se o corpo começa acelerado, o módulo da velocidade só aumenta e o corpo não atinge o repouso.

O instante que o corpo em MRUV cruza a origem $s(t) = 0$ depende do valor das constantes da funções quadrática. Neste caso $\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = v_0$ e $\gamma = s_0$. De acordo com 2.4.3, 2.4.3 e 2.4.3 os instantes em que o corpo cruza a origem são:

- se $v_0^2 - 2as_0 > 0$, há duas raízes: $t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2as_0}}{2\alpha}$
- se $v_0^2 - 2as_0 = 0$, há uma única raíz que coincide com o vértice: $t = \frac{v_0}{2\alpha}$
- se $v_0^2 - 2as_0 < 0$, não há raízes reais

Como os instantes considerados na cinemática são sempre positivos, então há uma série de restrições em relação à t_0. As possibilidades são tantas que uma análise similar a que foi feita para o MRU não poderá ser feita. Assim, para ilustrar o MRUV serão usados alguns exemplos genéricos.

Movimento de saída de um corpo a partir do repouso.

A aceleração de um atleta na saída da corrida ou de um veículo automotor pode ser descrita por um MRUV nos primeiros instantes da arrancada. O corpo não poderá acelerar indefinidamente, o que torna a descrição do MRUV inadequada para longos intervalos de tempo. A posição inicial do corpo pontual é identificada com a origem da reta espacial ($s_0 = 0$). No instante zero o corpo ainda está em repouso, logo $v_0 = 0$. A aceleração é positiva $a > 0$. Substituindo estas relações em 2.355, 2.356, 2.357 e 2.358 em chega-se a:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 \tag{2.236}$$

$$v(t) = at \tag{2.237}$$

$$a(t) = a \tag{2.238}$$

$$s(v) = \frac{v^2}{2a} \tag{2.239}$$

Como o movimento é acelerado ($\frac{v_0}{a} > 0$) o corpo não entra em repouso. Observando as condições 2.15.7, 2.15.7 e 2.15.7, $v_0^2 - 2as_0 = 0 - 0 = 0$, o corpo cruza a origem uma única vez no instante $t_{\mathcal{O}} = \frac{-v_0}{a} = 0$. Assim o corpo só cruza a origem no instante extato de sua saída $t = 0$. O movimento pode ser visualizado através dos gráficos:

[desenhar os gráficos: $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ e $s(v)$]

Por exemplo, um carro hipotético é projetado para ter aceleração de $2m/s^2$. O físico poderá fazer três tipos de testes diferentes para a aceleração:

1. O primeiro teste consiste em acelerar o carro e comparar a distância que o carro andou com a velocidade fornecida pelo velocímetro. A relação entre velocidade e posição é 2.365. Se o carro tem aceleração de $2m/s^2$ a relação será $s(v) = \frac{v^2}{4}$. Por exemplo, quando a velocidade atingir $30m/s$, a posição do carro deverá ser $s = 225m$. A única coisa que o físico deverá ficar atento é que o velocímetro do carro indica a velocidade em km/h. Assim a velocidade que o físico deverá ver no velocímetro será $30m/s = 30 * 3,6km/h = 108km/h$.

2. O segundo teste consiste em observar o velocímetro e um cronômetro durante a aceleração do carro. A relação 2.363 indica que para $a = 2m/s^2$ vale $v(t) = 2t$. Novamente o físico deverá ficar atento à conversão de unidades entre km/h e m/s. Por exemplo, em $10s$, o carro deverá ter velocidade de $v(10s) = (2m/s^2)(10s) = 20m/s = 20 * 3,6km/h = 72km/h$.

3. O terceiro teste é adequado para um observador exter ao carro sem acesso ao velocímetro. Ele consiste em comparar a distância que o carro andou com o tempo registrado em um cronômetro. A relação 2.362 para $a = 2m/s^2$ fica $s(t) = t^2$. Por exemplo, após $5s$ o carro deverá estar na posição $s(5s) = 25m$.

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente acima do eixo t. Assim a integral é positiva ($s(t_2) - s(t_1) > 0$) e consequentemente $s(t_2) > s(t_1)$. O movimento é progressivo. A superfície é um triângulo retângulo caso $t_1 = 0$, caso contrário ela é um paralelograma.

Também é interessante calcular a integral 2.344 a partir de 2.362.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \frac{a}{2}t_2^2 - \frac{a}{2}t_1^2$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \frac{a}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

A fórmula acima confirma toda a interpretação do gráfico de $v(t)$. Como $t_2 > t_1$, a integral é positiva. Se $t_1 = 0$ a integral é igual à área de um triângulo retângulo com catetos a e t_2. Já se $t_1 \neq 0$, a integral é a área de um paralelograma de bases t_1 e t_2 e altura a.

Tomando agora a integral 2.350:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente acima do eixo t. Assim a integral é positiva ($v(t_2) - v(t_1) > 0$) e consequentemente $v(t_2) > v(t_1)$. O movimento é acelerado. A superfície é um retângulo.

Para calcular a integral 2.350 a partir de 2.363 basta.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = at_2 - at_1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = a\,(t_2 - t_1)$$

Como $t_2 > t_1$, a integral é positiva. A integral é igual à área de um retângulo com base $(t_2 - t_1)$ e altura a.

É importante frisar que o MRUV não poderá descrever este tipo de movimento infinitamente. Quando o tempo cresce infinitamente, as expressões 2.362 e 2.363 indicam posição e velocidade infinitas.

Freamento de um corpo.

Outra situação descrita pelo MRUV é o freamento de algum objeto sobre o solo através do atrito. Após entrar atingir o repouso, o corpo deixa de cumprir um MRUV, assumindo um repouso permanente. É por isso que descrição do MRUV é inadequada para descrever o freamento após a parada do corpo. A posição inicial do corpo pontual é identificada com a origem da reta espacial ($s_0 = 0$). No instante zero o corpo começa a frear e tem velocidade positiva $v_0 > 0$. A aceleração é negativa $a < 0$ porque para que o movimento seja retardado $\frac{v_0}{a} < 0$. Substituindo estas relações em 2.355, 2.356, 2.357 e 2.358 em chega-se a:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t \tag{2.240}$$

$$v(t) = at + v_0 \tag{2.241}$$

$$a(t) = a \qquad (2.242)$$

$$s(v) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \qquad (2.243)$$

Como o movimento é retardado ($\frac{v_0}{a} < 0$) o corpo entra em repouso, o que já era esperado de antemão. O instante t_f e a posição s_f em que o corpo entra em repouso são dados pelas relações 2.360 e 2.361. Como $s_0 = 0$ as relações ficam:

$$t_f = -\frac{v_0}{a} \qquad (2.244)$$

$$s_f = -\frac{v_0^2}{2a} \qquad (2.245)$$

O MRUV não poderá descrever o freamento para $t > t_f$ porque para além dele o corpo passa a descrever uma função constante $s(t) = s_f$. As próprias relações 2.366, 2.367 e 2.368 só tem validade para $0 < t < t_f$.

Observando as condições 2.15.7, 2.15.7 e 2.15.7, $v_0^2 - 2as_0 = v_0^2 > 0$, o corpo cruza a origem duas vezes nos instantes $t_{\mathcal{O}} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2}}{a} = \frac{-v_0 \pm |v_0|}{a} = \frac{-v_0 \pm v_0}{a}$. Assim o corpo cruza a origem nos instantes $t = 0$ (começo do freamento) e em $t = -\frac{2v_0}{a} > 0$ (porque $a < 0$). Este segundo instante será excluído porque $t = -\frac{2v_0}{a} > -\frac{2v_0}{a} = t_f$. O movimento pode ser visualizado através dos gráficos. É importante ressaltar que a parábola descrita por $s(t)$ é incompleta, começando na origem do plano e acabando no vértice. Isso se deve ao fato de que não se usa o MRUV para $t > t_f$. As curvas dos gráficos de $v(t)$ e $a(t)$ também são interrompidos.

[desenhar os gráficos: $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ e $s(v)$]

Por exemplo, dois freios hipotéticos devem frear um carro com um deslisamento máximo de $5m$ a uma velocidade de $54km/h$. Em outras palavras, após o motorista pisar no pedal o carro só poderá andar por $30m$. Um freio tem de modo que após pisar no pedal é projetado para ter aceleração de $-3m/s^2$. Um segundo freio deixa o carro em repouso em $3s$. Algum dos dois freios atenderá a exigência? Qual o freio mais eficiente?

1. O primeiro freio tem a informação da aceleração. A relação expressão que relaciona o deslizamento do carro e a aceleração é 2.371. O físico só deve se precaver em fazer as conversões de unidade. Usando $a = -3m/s^2$ e $v_0 = 54km/h = (54/3,6)m/s = 15m/s$ na relação 2.371 chega-se a $s = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{225}{(-6)} = 37,5$. Assim o veículo só entrará em repouso em $s = 37,5m$. O freio não passou no teste.

2. O segundo freio contêm informações do tempo de freagem. O tempo de freagem é $t_f = 3s$. Substituindo os dados em 2.370: $t_f = -\frac{v_0}{a} \Rightarrow a = -\frac{v_0}{t_f} = -\frac{15}{3} = -5$. Assim a aceleração de freamento é $a = -5m/s^2$. Usando este dado em 2.369: $s_f = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{225}{(-10)} = 22,5$. O segundo freio passou no teste porque o carro deslizou $s_f = 22,5m < 30m$ para frear

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

onde $t_2 < t_f$.

A superfície entre a reta $v(t)$ e o eixo t fica inteiramente acima do eixo t. Assim a integral é positiva ($s(t_2) - s(t_1) > 0$) e consequentemente $s(t_2) > s(t_1)$. O movimento é progressivo. A superfície é um paralelogramo.

Tomando agora a integral 2.350:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente abaixo do eixo t porque $a < 0$. Assim a integral é negativa ($v(t_2) - v(t_1) < 0$) e consequentemente $v(t_2) < v(t_1)$. O movimento é retardado. A superfície é um retângulo abaixo do eixo t.

[desenhar gráficos de $v(t)$ e $a(t)$ com as integrais]

Queda livre.

O exemplo mais comum de MRUV é o movimento de um corpo após ser largado em repouso ou ser arremessado verticalmente. Este tipo de movimento é chamado de queda livre. As limitações do modelo de MRUV para descrever a queda livre são três.

1. Em primeiro lugar, o atrito com o ar complica bastante a descrição do movimento, alterando radicalmente $s(t)$. Por exemplo, o atrito com o ar faz com que uma pessoa de paraquedas caia em MRU.

2. Após atingir o solo, o corpo para de acelerar verticalmente para baixo e entra em repouso ou ricochoteia o solo.

3. Em grandes altitudes a aceleração da gravidade apresenta variações significaticas, excluindo por definição uma descrição do movimento com aceleração constante. A altitude onde a aprximação do MRUV é “boa"é da ordem de alguns quilômetros acima do solo.

Assim a aproximação de MRUV para queda livre é restrita para situações onde o atrito com o ar é desprezível, antes que o solo seja atingido e para as proximidades da crosta terrestre. A reta espacial é vertical com o sentido para cima como positivo. O ponto em que a reta espacial toca o solo é a origem da reta espacial $s_{\mathcal{O}} = 0$. A posição inicial do corpo pontual s_0 é identificada com a altura a partir do qual o corpo é arremessado. O corpo pode ser arremessado do solo ou acima dele, então $s_0 \geq 0$. O corpo pode ser arremessado para cima ($v_0 > 0$) ou para baixo ($v_0 < 0$), ou ainda largado a partir do repouso ($v_0 = 0$). A aceleração é negativa $a < 0$ porque o movimento seja retardado quando o corpo está subindo ($\frac{v}{a} < 0 \Rightarrow v > 0$) e acelerado quando está caindo ($\frac{v}{a} > 0 \Rightarrow v < 0$) . Para facilitar a interpretação da aceleração negativa, os físicos definem a aceleração de queda livre como $a = -g$ onde $g > 0$ é denominada "aceleração da gravidade". O valor da aceleração da gravidade é de aproximadamente $g \approx 9,8 m/s^2$. Para facilitar cálculos, os livros didáticos geralmente usam o valor $g = 10 m/s^2$. Substituindo estes valores em 2.355, 2.356, 2.357 e 2.358 em chega-se a:

$$s(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + s_0 \qquad (2.246)$$

$$v(t) = -gt + v_0 \qquad (2.247)$$

$$a(t) = -g \qquad (2.248)$$

$$s(v) = -\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2g}\right) + s_0 \qquad (2.249)$$

Se o corpo é arremessado para cima ($v_0 > 0$), o movimento é retardado ($\frac{v_0}{a} < 0$) o corpo entra em repouso. O instante t_{api} e a posição s_{api} em que o corpo entra em repouso são dados pelas relações 2.360 e 2.361:

$$t_{api} = -\frac{v_0}{a} \tag{2.250}$$

$$s_{api} = -\frac{v_0^2}{2a} + s_0 \tag{2.251}$$

A posição que o corpo entre em repouso s_{api} é a maior distância que o corpo atinge do solo. Assim s_{api} é a altura máxima que um corpo arremessado para cima atinge.

Caso o corpo seja largado em repouso ($v_0 = 0$) o instante de repouso é o próprio instante zero $t_{api} = 0$. A altura máxima será o próprio $s_{api} = s_0$.

Se o corpo é arremessado para baixo ($v_0 < 0$) o movimento é acelerado. O corpo não atingirá o repouso. A maior altura possível é s_0 mas o corpo não estará em repouso nesta posição.

Observando as condições 2.15.7, 2.15.7 e 2.15.7, $v_0^2 - 2as_0 = v_0^2 + 2gs_0 > 0$, o corpo cruza a origem duas vezes nos instantes $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 + 2gs_0}}{g}$. A análise merece ser dividida em duas situações especiais: $s_0 = 0$ e $s_0 > 0$.

Caso o corpo seja arremessado a partir do solo ($s_0 = 0$) para baixo ($v_0 < 0$) ou em repouso ($v_0 = 0$) o corpo não poderá cair livremente. Assim para um arremesso a partir do solo, necessariamente a velocidade inicial é positiva ($v_0 > 0$). Os instantes em que o corpo tocará o solo serão $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2}}{g}$, ou seja, $t_{\mathcal{O}} = 0$ (momento do arremesso) e $t = \frac{2v_0}{g} > 0$. Assimo corpo sai do solo em $t = 0$, atinge a altura máxima em $t_{api} = \frac{v_0}{g}$ e retorna ao solo em $t = \frac{2v_0}{g}$. O tempo que corpo leva para subir é igual ao de queda.

O movimento pode ser visualizado através dos gráficos:

[desenhar os gráficos: $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ e $s(v)$ p/ queda a partir de $s_0 = 0$].

Para $s_0 > 0$, os instantes em que o corpo tocariam o solo seriam $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 + 2gs_0}}{g}$. No entanto, o corpo não tocará o solo no primeiro instante porque $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2+2gs_0}}{g} < 0$. No entanto o corpo atingirá o solo no segundo instante $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0+\sqrt{v_0^2+2gs_0}}{g} > 0$. Se $v_0 > 0$, o corpo sai do solo em $t = 0$, atinge a altura máxima em $t_{api} = \frac{v_0}{g}$ e retorna ao solo em $t = \frac{v_0+\sqrt{v_0^2+2gs_0}}{g}$. O tempo que corpo leva para subir é menor do que aquele de queda. Caso $v_0 \leq 0$, o corpo não subirá, mas também atingirá o solo em $t = \frac{v_0+\sqrt{v_0^2+2gs_0}}{g}$.

O intervalo de tempo não nulo que o corpo toca o solo será designado por t_q, tempo de queda.

$$t_q = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gs_0}}{g}$$

A expressão acima vale tanto para $s_0 > 0$ como para $s_0 = 0$.

O MRUV não poderá descrever a queda para $t > t_q$ porque para além dele o corpo passa a descrever uma função constante $s(t) = 0$. As próprias relações 2.372, 2.373 e 2.374 só tem validade para $0 < t < t_q$.

Caso um corpo esteja subindo, ele atingirá o ápice e retornará. Assim o corpo passará novamente pelas posições que ele subiu. De acordo com a relação de Torriccelli 2.375, se um corpo passou pela primeira vez no ponto com velocidade v, ele deverá passar pela segunda vez com uma velocidade de $\pm v$. Como o corpo está descendo, a velocidade será $-v$. Esta propriedade da queda dos corpos tem consequeências importantes que serão discutidas em outros capítulos.

Serão tomados 4 exemplos de queda de corpos. Em todos os exemplos a aceleração da gravidade foi aproximada para $g = 10m/s^2$.

1. O primeiro exemplo é o movimento da tabela 2.15.4. O corpo foi ar-

remessado a partir do solo com $v_0 = 40m/s$. O tempo de subida e o tempo de queda foram iguais ($4s$). Para uma mesma posição, a velocidade de subida e de descida tiveram sinais opostos.

2. O segundo exemplo é de um corpo arremessado para cima com velocidade inicial $v_0 = 20m/s$ a partir da altura $s_0 = 60m$. O movimento será dado pela equação $s(t) = -5t^2 + 20t + 60$. Fica ao estudante o exercício de construir uma tabela com intervalos de $1s$. Compare esta tabela com 2.15.4. Verifique a relação entre as posições e as velocidades. Verifique se é válida a relação 2.375.

3. O terceiro exemplo é de um corpo largado a partir do repouso de uma altura $s_0 = 80m$. O movimento será dado pela equação $s(t) = -5t^2 + 80$. Fica ao estudante o exercício de construir uma tabela com intervalos de $1s$. Compare esta tabela com 2.15.4.

4. O quarto exemplo é de um corpo lançado para baixo com $v = -10m/s$ a partir do repouso de uma altura $s_0 = 75m$. O movimento será dado pela equação $s(t) = -5t^2 + 75$. Fica ao estudante o exercício de construir uma tabela com intervalos de $1s$. Compare esta tabela com 2.15.4.

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

onde $t_2 < t_q$.

Se $v_0 > 0$, parte da superfície entre a reta $v(t)$ e o eixo t fica acima do eixo t, parte fica abaixo. Assim a integral pode ser positiva ou negativa. O movimento pode ser progressivo ou retrógrado. A superfície pode ser um trapézio, um triângulo retângulo ou dois triângulos retângulos (um abaixo e outro acima do eixo t).

Para $v_0 > 0$ há uma relação interessante. Se os intervalos de tempo forem simétricos em relação ao tempo do ápice $t_{api} = \frac{v_0}{g}$, a integral é zero. A superfície são dois triângulos retângulos de mesma área, um abaixo e outro acima do eixo t.

$$\int\limits_{t-t_{api}}^{t+t_{api}} v(t)dt = 0 = s(t_2) - s(t_1) \Rightarrow s(t_1) = s(t_2)$$

Assim, no intervalo de tempo $[t-t_{api}, t+t_{api}]$ o corpo subiu e desceu para o mesmo lugar, fazendo com que $s(t_1) = s(t_2)$.

Se $v_0 \leq 0$, a superfície entre a reta $v(t)$ e o eixo t fica abaixo do eixo t. Assim a integral é negativa. O movimento pode é retrógrado porque $s(t_2) - s(t_1) \leq 0 \Rightarrow s(t_2) < s(t_1)$. A superfície pode ser um trapézio ou um triângulo retângulo, ambos abaixo do eixo t.

Tomando agora a integral 2.350:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente abaixo do eixo t porque $a < 0$. Assim a integral é negativa ($v(t_2) - v(t_1) < 0$) e consequentemente $v(t_2) < v(t_1)$. O movimento é retardado. A superfície é um retângulo abaixo do eixo t.

[desenhar gráficos de $v(t)$ e $a(t)$ com as integrais]

2.11 Comentários sobre movimento de arraste.

O movimento de arraste (MA) é muito específico. Ele descreve o movimento de objetos que bóiam em um líquido e tem uma velocidade v_0. O atrito do líquido com o corpo que bóia não é descrito pelo MRUV, mas pelo MA. Para simplificar a análise do MA, a velocidade inicial, e as posições inicial e final são consideredas positivas ($v_0 \geq 0$, $s_0 \geq 0$ e $s_f \geq 0$). Reescrevendo as equações do MA 2.342, 2.343 e 2.349.

$$s(t) = s_f - (s_f - s_0)e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.252}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.253}$$

$$a(t) = -\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.254}$$

Há uma relação importante entre a velocidade e a aceleração. Dividindo a aceleração 2.380 pela velocidade 2.379:

$$\frac{v(t)}{a(t)} = -\frac{v_0 e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}}{\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}} = -\frac{v_0}{\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right)}$$

$$\frac{v(t)}{a(t)} = -\frac{(s_f - s_0)}{v_0} \tag{2.255}$$

Para cada instante de tempo t, há uma única posição $v(t)$ para cada $a(t)$ e vice-versa. Assim a velocidade no MA é uma função da aceleração ($v = v(a)$) e vice-versa ($a = a(v)$). A relação pode ser expressa de duas formas:

$$v(a) = -\frac{(s_f - s_0)}{v_0} a$$

ou

$$a(v) = -\frac{v_0}{(s_f - s_0)}v$$

As funções $v(a)$ e $a(v)$ são extremamente simples. Elas são retas que passam pela origem.

Se $v_0 > 0$ então o movimento começou progressivo. Desta forma a posição final é maior do que a inicial ($s_f > s_0$, logo $s_f > 0$). Então:

$$\beta = \frac{v_0}{(s_f - s_0)} > 0$$

esta conclusão é coerente com $\beta > 0$ imposto em seções anteriores. A consequência da desigualdade acima é que na relação 2.381:

$$\frac{v}{a} = -\frac{(s_f - s_0)}{v_0} < 0$$

Assim o movimento de arraste é sempre retardado.

O instante que o corpo intercepta a origem do sistema $s(t) = 0$ é dado pela relação 2.378:

$$0 = s_f - (s_f - s_0)e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}$$

$$s_f = (s_f - s_0)e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}$$

$$\frac{s_f}{(s_f - s_0)} = e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}$$

A exponencial $e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \leq 1$ sendo o $e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} = 1$ apenas para $t = 0$. Para que $\frac{s_f}{(s_f - s_0)} \leq 1$, é necessário que $s_f \leq s_f - s_0 \Rightarrow s_0 \leq 0$. Como foi proposto que $s_0 \geq 0$, a única possibilidade do corpo cruzar a origem no MA é $s_0 = 0$, ou seja, o corpo sai da origem. O único instante em que a posição é nula é $t = 0$. Os gráficos à seguir ilustram bem esta situação.

[desenhar gráficos do MA $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$].

Como a exponencial envolvida nas relações 2.378, 2.379 e 2.380 fica no intervalo $0 \leq e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \leq 1$ (lembrando que a função é descrescente), as três função ficam restritas aos intervalos:

$$s_0 \leq s(t) < s_f$$

$$0 < v(t) \leq v_0$$

$$-\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right) \leq a(t) < 0$$

O corpo sai de s_0 e se aproxima infinitamente de s_f. A velocidade começa com v_0 e cai infinitamente, aproximando-se infinitamente do zero. A aceleração (negativa) aproxima-se do zero. Na prática, um velocímetro registraria a velocidade nula após a velocidade do corpo ficar abaixo da precisão do aparelho.

O único exemplo de MA apresentado é aquele da tabela 2.15.4.

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

A superfície entre a reta $v(t)$ e o eixo t fica acima do eixo t. Assim a integral é positiva. O movimento é progressivo porque $s(t_2) - s(t_1) > 0 \Rightarrow s(t_2) > s(t_1)$.

Tomando agora a integral 2.350:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente abaixo do eixo t porque $a(t) < 0$. Assim a integral é negativa ($v(t_2) - v(t_1) < 0$) e consequentemente $v(t_2) < v(t_1)$. O movimento é retardado.

[desenhar gráficos de $v(t)$ e $a(t)$ com as integrais].

Cinemática em duas dimensões com trajetórias abertas e o cálculo vetorial

Introdução.

No capítulo anterior foram analisadas as ferramentas matemáticas usadas para descrever o movimento retilíneo de um corpo pontual. No mesmo capítulo anterior, foi proposta uma alternativa para associar posições à linhas não retilíneas, descrevendo o movimento nestes contextos. A descrição das trajetórias não retilíneas apresentou alguns problemas:

- Para linhas abertas, o procedimento adotado foi associar um dos pontos da linha à origem $\mathcal{O}$. Um dos lados da linha foi escolhido como sentido positivo. Adotando uma unidade de medida u, "caminhando" pela linha, o ponto atingido após um caminho de comprimento desta unidade foi a posição $1u$. Todos os outros pontos ficaram associados à posições específicas. Surgiu um problema geométrico: a distância entre dois pontos será o comprimento da linha reta que une estes dois pontos ou corresponderá à distância em linha reta? Embora a métrica adotada dependa do problema, neste capítulo será adotado uma métrica espcífica.

- Além da ambiguidade de métricas, foi citado que movimentos não-retilíneos envolve algo chamado de "aceleração centrípeta".

- A descrição de trajetórias que cruzam a si mesmas apresentou problemas para atribuir uma origem $\mathcal{O}$ à trajetória, dificuldade em atribuir valores positivos e negativos às posições e ainda ambiguidade de métrica.

Neste capítulo será abordado o movimento contido em um plano com uma abordagem diferente da apresentada no capítulo anterior. A complexidade do movimento não retilíneo será analisada, ou seja, compreendida como a combinação de simplicidades. Em outras palavras, o movimento do corpo pontual no plano será descrito como a combinação de dois movimentos retilíneos.

O caso particular dos movimentos não retilíneos com trajetória fechada será abordado no próximo capítulo. A aceleração centrípeta também será descrita no próximo capítulo.

Para estudar o movimento do corpo no plano, será necessário introduzir uma nova ferramente matemática: o vetor.

Antes de estudar este capítulo, o estudante deverá dominar os conteúdos do capítulo anterior.

2.12 Vetores

2.12.1 Retas, semirretas e segmentos de reta no plano cartesiano.

O plano cartesiano foi definido no capítulo anterior.

Há infinitas retas no plano cartesiano. Duas retas podem coincidir (ou seja, há apenas uma reta), ser concorrentes ou paralelas.

Cada reta pode ser dividida em duas semirretas através de um único ponto. Por exemplo, se o ponto A pertence à reta r, há infinitos pontos de cada lado específico de A. Cada conjunto destes que se estende infinitamente é denominado semirreta. Por exemplo, o eixo do tempo é uma semirreta formada a partir da origem para o futuro.

Através da equação da reta, é possível descrever a semirreta matematicamente. Por exemplo, o ponto $A = (1, 5)$ pertence a reta com equação $y = 2x + 3$. O ponto A divide esta reta em duas semirretas: $y = 2x + 3$ para $x \geq 1$ e $y = 2x + 3$ para $x \leq 1$. Outro exemplo é a reta vertical (que não é função) $x = 2$. O ponto $B = (2, 5)$ divide esta reta vertical duas semirretas: $x = 2$ para $y \geq 5$ e $x = 2$ para $y \leq 5$.

Há infinitas retas que passam por um único ponto. Por exemplo, o ponto $C = (2, 7)$ faz parte de infinitas retas, incluindo a reta vertical $x = 2$, a reta horizontal $y = 7$ e a reta $y = 2x + 3$. Assim, um mesmo ponto divide diferentes retas em semirretas distintas. A reta $x = 2$ fica dividida nas semirretas $x = 2$ para $y \geq 7$ e $x = 2$ para $y \leq 7$. Já a reta horizontal fica dividida nas semirretas $y = 7$ para $x \geq 2$ e $y = 7$ para $x \leq 2$. Enfim, a reta $y = 2x + 3$ fica dividida em $y = 2x + 3$ para $x \geq 2$ e $y = 2x + 3$ para $x \leq 2$.

Um segmento de reta é formado por todos os pontos de uma reta localizados entre dois pontos distintos da reta. Por exemplo, se dois pontos distintos A e B pertencem à reta r, todos os pontos da reta r localizados entre A e B (incluindo estes dois pontos) formam um segmento de reta. O segmento de reta localizado entre A e B é representado por $\overline{AB}$.

O segmento de reta também pode ser descrito matematicamente. Por exemplo, os pontos $A = (1, 5)$ e $B = (2, 7)$ pertencem à reta $y = 2x + 3$. O segmento $\overline{AB}$ é descrito matematicamente como $y = 2x + 3$ para $1 \leq x \leq 2$.

Há uma única reta que passa por dois pontos distintos. Assim, não é necessário especificar qual a reta que passa pelos dois pontos porque ela é única. Por exemplo, a única reta que liga $C = (1, 2)$ e $D = (2, 3)$ é $y = x + 1$. Assim a descrição matemática do segmento $\overline{CD}$ só pode ser $y = x + 1$ para $1 \leq x \leq 2$.

O conjunto de pontos localizados entre A e B ou entre B e A são os mesmos. Assim, $\overline{AB}$=$\overline{BA}$.

2.12.2 Distância entre dois pontos do plano cartesiano.

No capítulo anterior foi definida uma distância entre números e entre posições. A distância entre dois pontos distintos do plano cartesiano será definida como o comprimento do segmento de reta que liga estes dois pontos. Já a distância de um ponto a ele mesmo é definida como 0. Assim a distância entre A e B é o comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$ caso $A \neq B$ e 0 caso contrário.

A distância entre dois pontos A e B (designada por $d(A, B)$ ou por d_{AB}) obedece uma métrica, ou seja, segue as 3 propriedades à seguir:

1. A distância entre um ponto e ele mesmo é zero pela própria definição acima ($d(A, A) = 0$) e a distância entre dois pontos distintos é um número positivo ($d(A, B) > 0$ se $A \neq B$) porque o comprimento do segmento $\overline{AB}$ é um número positivo.

2. A distância entre dois pontos não depende da ordem entre eles, ou seja, a distância de A até B é a mesma distância de B até A ($d(A, B) =$

$d(B, A)$). No caso de pontos distintos $d(A, B) = d(B, A)$ porque $\overline{AB}$=$\overline{BA}$. Já para pontos iguais, $d(A, A) = d(A, A) = 0$.

3. A soma das distâncias entre dois pontos e um terceiro é maior ou igual a distância entre os dois elementos ($d(A, B) \leq d(A, C)+d(B, C)$). Esta relação é denominada "desigualdade triangular". Há razões geométricas para esta denominação que serão discutidas a seguir.

Se os três pontos são iguais ($A = B = C$), então $d(A, B) = d(A, C) = d(B, C) = 0$. Logo $d(A, B) = d(A, C) + d(B, C)$ porque $0 = 0$. Se $A = B$ mas $A \neq C$, então $d(A, B) = 0$, $d(A, C) = d(B, C) = d > 0$. Logo $d(A, B) < d(A, C) + d(B, C)$ porque $0 < d + d$. Já se $A \neq B$ mas $A = C$ então $d(A, B) = d(B, C) > 0$ e $d(A, C) = 0$. Logo $d(A, B) = d(A, C) + d(B, C)$ porque $d = 0 + d$. Se $A \neq B$ mas $B = C$ então $d(A, B) = d(A, C) = d > 0$ e $d(B, C) = 0$. Logo $d(A, B) = d(A, C) + d(B, C)$ porque $d = d + 0$. Enfim, resta a situação mais geral: os três pontos são distintos ($A \neq B$ e $A \neq C$ e $B \neq C$).

Para três pontos distintos, há ainda duas situações: os pontos podem ser parte da mesma reta ou não. Se o ponto C faz parte da mesma reta entre A e B, e ainda, C está entre A e B, então geometricamente $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \Rightarrow d(A, B) = d(A, C) + d(B, C)$. Já se o ponto C faz parte da mesma reta que A e B, mas não está entre eles, então $d(A, B) = d(A, C) - d(B, C) < d(A, C) + d(B, C)$ ou $d(A, B) = d(B, C) - d(A, C) < d(B, C)+d(A, C)$. Em suma, se os três pontos estão alinhados vale $d(A, B) < d(B, C)+d(A, C)$. Para os três pontos distintos e não alinhados forma-se um triângulo $\widehat{ABC}$. Na linguagem popular, "o caminho mais curto entre dois pontos é a reta". Assim, o comprimento de A até B é menor do que a soma dos comprimentos de A até C mais o de C até A. Enfim, neste triângulo vale $d(A,B) < d(B,C) + d(A,C)$. É desta figura que vem o nome "desigualdade triângular".

Com todas as possibilidades exploradas, conclui-se que no plano cartesiano:

$$d(A,B) \leq d(B,C) + d(A,C) \tag{2.256}$$

Como cada ponto do plano cartesiano é associado a um par de números reais, é possível expressar a distância através destes números reais. Se o segmento é horizontal, então o segmento pode ser projetado no eixo x. Neste caso, o problema é equivalente à distância entre dois números reais. Assim os pontos $A = (x_1, c)$ e $B = (x_2, c)$ ambos pertencentes à reta $y = c$ tem distância igual a dos números reais x_1 e x_2. Consultando o capítulo anterior.

$$d(A,B) = |x_1 - x_2| \tag{2.257}$$

Analogamente, dois pontos $A = (c, y_1)$ e $B = (c, y_2)$ que pertençam à mesma reta vertical $x = c$ tem distância dada por :

$$d(A,B) = |y_1 - y_2| \tag{2.258}$$

Enfim, se os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ não estão alinhados nem vertical e nem horizontalmente, então as relações acima não se aplicam. O ponto $C = (x_A, y_B)$ faz parte da mesma reta vertical de A e da mesma reta vertical de B. Assim o triângulo $\widehat{ABC}$ é um triângulo retângulo cujo o ângulo reto está em C. A hipotenusa é o segmento $\overline{AB}$, o cateto horizontal é $\overline{BC}$ e o cateto vertical, $\overline{AC}$. Usando o teorema de Pitágoras:

$$d(A,B)^2 = d(A,C)^2 + d(B,C)^2$$

Como o segmento $\overline{BC}$ é horizontal, então por 2.257 $d(B,C) = |x_B - x_A|$. Já o segmento $\overline{AC}$ é vertical, então por 2.258 $d(A,C) = |y_B - y_A|$. Substituindo acima:

$$d(A,B)^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

Aplicando acima a identidade $|x|^2 = x^2$ então:

$$d(A,B)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \tag{2.259}$$

A fórmula acima implica que com as coordenadas dos dois pontos, é possível calcular a distância entrer eles ao invés de medi-la em uma figura.

A fórmula dispensa o uso das relações 2.257 e 2.258. Se os pontos A e B estão alinhados horizontalmente, então $y_A = y_B$. Substituindo em 2.259 chega-se a $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2} = |x_B - x_A|$. Já o alinhamento vertical $(x_A = x_B)$ em 2.259 implica em $d(A,B) = \sqrt{(y_B - y_A)^2} = |y_B - y_A|$.

Por exemplo, os pontos $A = (1,2)$ e $B = (4,6)$ tem distância $d(A,B) = \sqrt{(1-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. Já o ponto $(1,2)$ e a origem $(0,0)$ tem distância $d(A,B) = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

2.12.3 Definição de vetor.

Em Matemática Pura, vetor é definido como um objeto matemático de um conjunto dotado de uma álgebra vetorial. O conjunto é denominado "espaço vetorial". Tal noção é muito abstrata e vai além dos objetivos deste capítulo. Assim, neste capítulo será definido apenas vetor no plano cartesiano.

A definição de vetor no plano cartesiano é um pouco abstrata, embora não seja um conceito difícil. Vetor pode ser definido provisoriamente como um par ordenado de pontos onde um é classificado como origem e outro como extremo. Por exemplo, no par de pontos distintos A e B, A pode ser escolhido como origem e B como extremo. Neste caso fica definido o vetor reprsentado como $\overrightarrow{AB}$. No plano cartesiano o vetor $\overrightarrow{AB}$ pode ser representado como o segmento $\overline{AB}$ onde no extremo é colocado o símbolo de uma flecha. Esta representação pictórica não significa que o vetor seja o conjunto de todos os pontos entre A e B, mas sim que existe uma ordenação de A para B. Inversamente, o ponto B poderia ser escolhido como origem e A, como extremo. Neste caso o vetor seria diferente de $\overrightarrow{AB}$ e sua representação seria $\overrightarrow{BA}$.

O vetor cuja origem coincide com o extremo é denominado "vetor nulo". Por exemplo, se o ponto A é origem e extremo do vetor, o símbolo fica $\overrightarrow{AA}$. A representação pictórica do vetor nulo não é uma flecha, mas apenas o ponto onde está o origem e o extremo.

O módulo de um número real é um número positivo associado a este número. Analogamente, o módulo de um vetor é um número positivo associado a este deslocamento. O módulo do vetor é definido como a distância entre a origem e o extremo. O símbolo de módulo do vetor usado neste livro será o mesmo do módulo de um número.

$$|\overrightarrow{AB}| = d(A, B) \tag{2.260}$$

É interessante notar que se $A \neq B$, então $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$, mas $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$ porque $d(A, B) = d(B, A)$. Também é interessante notar que o vetor nulo tem módulo zero: $|\overrightarrow{AA}| = d(A, A) = 0$.

Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{AB}$ onde $A = (1, 2)$ e $B = (2, 3)$ tem módulo $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$.

O vetor tem uma direção. Direção é um conjunto de retas paralelas. Para ilustrar o conceito de direção, definem-se os pontos $A = (1, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (-1, -2)$ e $D = (2, 4)$. O vetor $\overrightarrow{AB}$ está sobre a reta $y = 2x+1$ enquanto $\overrightarrow{CD}$ está sobre a reta $y = 2x$. Ambos estão sobre retas com coeficiente angular 2. Retas com o mesmo coeficiente angular são paralelas. Então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm a mesma direção. O vetor $\overrightarrow{BC}$ está sobre a reta $y = \frac{7}{3}x + \frac{1}{3}$. O coeficiente angular desta reta é $\frac{7}{3}$, logo o vetor $\overrightarrow{BC}$ não tem a mesma direção de $\overrightarrow{AB}$ e nem de $\overrightarrow{CD}$. O vetor $\overrightarrow{AD}$ está sobre a reta $y = x + 2$. Como o coeficiente angular da reta é 1, o vetor $\overrightarrow{AD}$ não tem a mesma direção de $\overrightarrow{AB}$, nem $\overrightarrow{CD}$ e nem de $\overrightarrow{BC}$.

[desenhar figura com os pontos A, B, C e D e seus respectivos vetores].

Se A e B são quaisquer dois pontos distintos, então os vetores distintos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ estão sobre a mesma reta. Logo, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ têm a mesma direção.

O vetor nulo $\overrightarrow{AA}$ é um ponto. Por um ponto, passam infinitas retas, com infinitos coeficientes angulares, além da reta vertical. Assim, o vetor nulo tem infinitas direções. Consequentemente, o vetor nulo tem a mesma direção de qualquer vetor. Usando os mesmos quatro pontos $A = (1, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (-1, -2)$ e $D = (2, 4)$, o vetor $\overrightarrow{AA}$ está sobre as retas $y = 2x + 1$, $y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ e $y = x + 2$. Estas retas passam respectivamente pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$. Como toda reta é paralela a si mesma, o vetor nulo tem a mesma direção de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$. O vetor $\overrightarrow{BD}$ está sobre a reta $y = 2x$. Como a reta com mesmo coeficiente angular $y = 2x + 1$ passa sobre o vetor $\overrightarrow{AA}$, então este vetor e $\overrightarrow{BD}$ têm a mesma direção.

Uma forma mais prática de verificar se dois vetores tem a mesma direção é verificar diretamente o coeficiente angular da reta que passa pelos dois pontos. Um vetor com a origem em $A = (x_A, y_A)$ e extremo $B = (x_B, y_B)$ está sobre uma reta com um certo coeficiente angular α e coeficiente linear β. Escrevendo a equação da reta com os pontos dados: $y_A = \alpha x_A + \beta$ e $y_B = \alpha x_B + \beta$. Substraindo as equações:

$$y_A - y_B = \alpha(x_A - x_B)$$

$$\alpha = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Se um vetor é representado pela origem $C = (x_C, y_C)$ e extremo em $D = (x_D, y_D)$, o coeficiente angular deverá ser:

$$\alpha = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D}$$

Assim, o teste para verificar se dois vetores não nulos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm a mesma direção é validade da relação

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} \tag{2.261}$$

Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ (novamente com os pontos $A = (1, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (-1, -2)$ e $D = (2, 4)$) são paralelos porque seguem o critério 2.261.

Além de módulo e sentido, o vetor possui um sentido. Sentidos são as duas possibilidades de "movimento" que existe em um conjunto de retas paralelas. Na reta dos reais, os números positivos e negativos expressam esta dualidade. Em uma reta genérica, nem sempre existe uma convenção de qual dos dois sentidos será chamado de positivo. Uma vez que um sentido é positivo, o sentido oposto é negativo e vice-versa. Em um conjunto de retas paralelas, a mesma convenção de sentido deverá ser repetida para as demais retas. Por exemplo, em um conjunto de retas horizontais, se o sentido positivo é da esquerda para a direita em uma das retas, em todas as demais esta convenção será adotada. Já em um conjunto infinito de retas verticais, se o sentido de baixo para cima foi adotado em uma delas, todas elas deverão seguir a mesma convenção.

Dois vetores que não têm a mesma direção, não podem ter o mesmo sentido. Dois vetores não nulos que tem a mesma direção podem ter o mesmo sentido ou sentido oposto. Vetores com o mesmo sentido são denominados "vetores paralelos". Já dois vetores com sentidos opostos são denominados "vetores antiparalelos". Por definição, todo vetor é paralelo a si mesmo porque todo o vetor tem a mesma direção de si mesmo e está no mesmo sentido.

O vetor nulo não representa nem um movimento para um sentido e nem para o oposto. Assim o vetor nulo é classificado como "vetor sem sentido". Apesar disso, o vetor nulo é classificado como "paralelo" a todos os demais vetores.

Para ilustrar o conceito de sentido, serão usados os mesmos pontos $A = (1,3)$, $B = (2,5)$, $C = (-1,-2)$ e $D = (2,4)$. Dentre todos os vetores não nulos que se pode construir com estes pontos, apenas quatro têm a mesma direção: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DC}$. Os vetor $\overrightarrow{AB}$ é paralelo ao próprio $\overrightarrow{AB}$ e à $\overrightarrow{CD}$, mas é antiparalelo à $\overrightarrow{BA}$ e à $\overrightarrow{DC}$. Analogamente, o vetor $\overrightarrow{CD}$ é paralelo ao próprio $\overrightarrow{CD}$ e à $\overrightarrow{AB}$, mas é antiparalelo à $\overrightarrow{BA}$ e à $\overrightarrow{DC}$. Todos estes vetores são paralelos aos vetores nulos $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$ e $\overrightarrow{DD}$.

A definição acima foi provisória porque um vetor não é apenas um par ordenado de pontos. Um vetor pode ser definido todos os pares ordenados de pontos que possuem o mesmo módulo, direção e sentido. Em outras palavras, dois vetores são iguais quando são paralelos e têm o mesmo módulo.

Um vetor é igual a si mesmo por definição porque ele possui o mesmo módulo, direção e sentido de si mesmo.

Para ilustrar o conceito de vetores iguais, serão escolhidos cinco pontos: os quatro primeiros já escolhidos ($A = (1,3)$, $B = (2,5)$, $C = (-1,-2)$ e $D = (2,4)$) e um quinto ponto, a origem $O = (0,0)$. O vetor $\overrightarrow{AB}$ é paralelo à $\overrightarrow{CD}$ mas não tem o mesmo módulo. Basta usar a definição 2.260: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{5}$ enquanto $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9 * 5} = 3\sqrt{5}$. O vetor $\overrightarrow{AB}$ também é paralelo a $\overrightarrow{CO}$ porque eles pertencem às retas respectivas $y = 2x+1$ e $y = 2x$ e têm o mesmo sentido. Estes dois vetores também têm o mesmo módulo: $|\overrightarrow{CO}| = \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$. Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CO}$ têm o mesmo módulo e são paralelos, eles são iguais: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CO}$. Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OC}$ têm o mesmo módulo e são antiparalelos, logo eles são diferentes: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{OC}$.O leitor pode resolver como exercícios a verificação de que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.

Há uma forma prática de verificar se dois vetores são iguais. Dois vetores não nulos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se e somente se:

$$x_A - x_B = x_C - x_D \tag{2.262}$$

$$y_A - y_B = y_C - y_D \tag{2.263}$$

Fica para o estudante o exercício de provar que a relação acima inclui o paralelismo 2.261 e a igualdade de módulos em 2.260.

Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CO}$ (com os mesmos pontos $A = (1,3)$, $B = (2,5)$, $C = (-1,-2)$ e $O = (0,0)$) são iguais, confirmando a relação acima.

Quando dois vetores "localizados" em locais distintos do plano cartesiano são iguais, fica claro que o vetor não está em um lugar específico. Antes, o vetor expressa uma relação entre pontos. Para distinguir o vetor dos pontos onde ele está representado, os matemáticos e os físicos usam uma letra minúscula acrescida do símbolo $\rightarrow$ acima da letra. Por exemplo, as representações $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CO}$ do mesmo vetor podem deixar a falsa impressão de que este vetor esteja localizado nos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CO}$. Representando o vetor como $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CO}$, a não localização fica mais clara.

Todos os vetores nulos são iguais entre si porque possuem o mesmo módulo (zero), a mesma direções (as infinitas direções) e o mesmo sentido (não há sentido). Assim $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = ...$ Em outras palavras, todos os vetores nulos são um único vetor nulo. O símbolo adotado para o vetor nulo é $\overrightarrow{\mathcal{O}}$.

No lugar de verificar se dois vetores são iguais, o estudante pode fazer o processo inverso. Dado um vetor $\overrightarrow{AB}$, ele procura o mesmo vetor em outra localização $\overrightarrow{CD}$. O processo é conhecido como "transporte do vetor". Basta que os novos pontos sigam as relações 2.262 e 2.263.

Para transportar um vetor, é necessário manter o paralelismo e o módulo do vetor.

2.12.4 Transporte do vetor e representação do vetor em coordenadas cartesianas.

No lugar de verificar se dois vetores são iguais, o estudante pode fazer o processo inverso. Dado um vetor $\overrightarrow{AB}$, ele procura o mesmo vetor em outra localização $\overrightarrow{CD}$. O processo é conhecido como "transporte do vetor". Basta que os novos pontos sigam as relações 2.262 e 2.263.

Por exemplo, dados os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ será transportado para a origem $C = (x_C, y_C)$. Em outras palavras, a nova representação do vetor será $\overrightarrow{CD}$. Qual a coordenada de D? Seguindo a as relações 2.262 e 2.263:

$$D = (x_C + x_B - x_A, y_C + y_B - y_A) \tag{2.264}$$

Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{AB}$ com $A = (2, 4)$ e $B = (3, 2)$ pode ser transportado de modo que a origem fique em $C = (4, 5)$. Então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se $D = (5, 3)$.

Para não precisar indicar a coordenadas dos dois pontos, há uma convenção. Caso as coordenadas da origem sejam omitidas, a origem do vetor é transportada para a origem do plano cartesiano $O = (0, 0)$. Nesta convenção, as coordenadas do extremo do vetor identificam o próprio vetor. O vetor é representado apenas pela letra minúscula e pelas coordenadas do extremos. Usando a relação 2.264, o vetor $\overrightarrow{AB}$ com coordenadas $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ fica representado como:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \tag{2.265}$$

Geralmente os vetores são representados simplesmente como:

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y) \tag{2.266}$$

onde o vetor $\overrightarrow{a}$ tem origem em $(0, 0)$ e extremo em (a_x, a_y).

Nesta notação o vetor nulo pode ser obtido pela relação 2.265. Para um ponto A qualquer, o vetor nulo pode ser expresso por $\overrightarrow{AA}$. Usando a relação 2.265 para $x_A = x_B$ e $y_A = y_B$, o vetor nulo fica:

$$\overrightarrow{\mathcal{O}} = (0, 0)$$

O módulo do vetor $\overrightarrow{a}$ pela expressão 2.260 é a distancia entre a origem $\mathcal{O}$ e o ponto (a_x, a_y) fica:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(a_x - 0)^2 + (a_y - 0)^2}$$

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{2.267}$$

Da relação acima, o estudante pode concluir novamente que o módulo do vetor nulo é zero: $|\overrightarrow{\mathcal{O}}| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

Os físicos costumam representar o módulo do vetor $\overrightarrow{a}$ pela mesma letra sem o símbolo de vetor encima:

$$|\overrightarrow{a}| = a \tag{2.268}$$

O vetor representado na forma 2.266 pode ser transportado para qualquer origem. Combinando as expressões 2.266 e 2.264, colocando a origem do vetor $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$ no ponto $A = (x_A, y_A)$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ terá como ponto B as coordenadas:

$$B = (a_x + x_A, a_y + y_A)$$

Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{a} = (1, 2)$ com a origem em $A = (3, 5)$ ficará representado como vetor $\overrightarrow{AB}$ com $B = (4, 7)$.

É interessante notar que na nova representação, fica mais fácil verificar se dois vetores estão na mesma direção. Lembrando que as origens dos vetores estão na origem $(0,0)$ e aplicando 2.261, os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ não nulos têm a mesma direção se e somente se:

$$\frac{a_y}{a_x} = \frac{b_y}{b_x} \tag{2.269}$$

Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{a} = (1,3)$ e $\overrightarrow{b} = (2,6)$ obedecem a relação acima, logo eles tem a mesma direção. Já os vetores $\overrightarrow{a} = (1,3)$ e $\overrightarrow{b} = (2,7)$ não têm a mesma direção.

2.12.5 Soma vetorial.

A soma entre dois vetores é uma operação análoga à soma entre números reais. Assim como a soma de dois números reais associa um par de números a um terceiro, a soma entre dois vetores associa dois vetores a um terceiro.

Dois vetores $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$ e $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y)$ somados resultam em:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y) \tag{2.270}$$

A soma de dois números reais possui quatro propriedades. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$:

1. Propriedade comutativa: $a + b = b + a$

2. Propriedade associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$

3. Existe um elemento neutro $0 \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a$

4. Para todo a existe um elemento inverso $(-a) \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

A soma vetorial também segue estas quatro propriedades. Usando a definição 2.270, a propriedade comutativa está provada abaixo:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y) = (b_x + a_x, b_y + a_y)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{2.271}$$

Por exemplo, $(1, 2) + (3, -1) = (3, -1) + (1, 2) = (4, 1)$.

A soma vetorial também segue a propriedade associativa. Partindo de 2.270:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y) + (c_x, c_y) =$$

$$= ((a_x + b_x) + c_x, (a_y + b_y) + c_y) =$$

$$= (a_x + (b_x + c_x), a_y + (b_y + c_y)) \Rightarrow$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{2.272}$$

Por exemplo, $((1, 2) + (3, -1)) + (4, 0) = (4, 1) + (4, 0) = (8, 1)$ e $(1, 2) + ((3, -1) + (4, 0)) = (1, 2) + (7, -1) = (8, 1)$.

O elemento neutro no plano cartesiano não é o número 0, mas o vetor nulo $\vec{\mathcal{O}}$. Usando a definição 2.270:

$$\vec{a} + \vec{\mathcal{O}} = (a_x + 0, a_y + 0) = (a_x, a_y) = \vec{a}$$

$$\vec{a} + \vec{\mathcal{O}} = \vec{\mathcal{O}} + \vec{a} = \vec{a} \tag{2.273}$$

O elemento inverso de $\overrightarrow{a}$ é definido de acordo com a interpretação do sinal "$-$" dado na capítulo anterior. Em outras palavras, $(-\overrightarrow{a})$ é o vetor que somado com $\overrightarrow{a}$ resulta no elemento neutro $\overrightarrow{\mathcal{O}}$. O vetor $(-\overrightarrow{a})$ é dado pelas coordenadas:

$$(-\overrightarrow{a}) = (-a_x, -a_y) \tag{2.274}$$

de modo que o sinal "-" inverte o sinal das coordenadas:

$$-(a_x, a_y) = (-a_x, -a_y) \tag{2.275}$$

Por exemplo, $-(3,2) = (-3,-2)$.

Neste caso também vale a relação de que o inverso do inverso de algo é ele mesmo. Partindo da definição acima:

$$-(-\overrightarrow{a}) = -(-a_x, -a_y) = (-(-a_x), -(-a_y)) = (a_x, a_y)$$

$$-(-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a} \tag{2.276}$$

Usando a definição de soma 2.270 e a definição 2.274:

$$\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = (a_x, a_y) + (-a_x, -a_y) =$$

$$= (a_x + (-a_x), a_y + (-a_y)) = (0,0) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = (-\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathcal{O}} \tag{2.277}$$

Uma relação interessante surge das relações 2.265 e 2.275:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (-(x_A - x_B), -(y_A - y_B))$$

$$\overrightarrow{AB} = -(x_A - x_B, y_A - y_B)$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \tag{2.278}$$

Assim a inversão da ordem dos pontos implica que o vetor muda para seu elemento inverso.

Outra relação interessante é a comparação dos módulos do vetor $\overrightarrow{a}$ com o elemento inverso $(-\overrightarrow{a})$. Usando as relações 2.267 e 2.274:

$$|-a| = \sqrt{(-a_x)^2 + (-a_y)^2} = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$$

$$|-a| = |a|$$

A soma entre vetores pode ser expressa geometricamente de duas formas. Em primeiro lugar, a origem de um dos vetores pode ser transportada para o extremo do outro. Por exemplo, o extremo do vetor $\overrightarrow{AB}$ é o ponto B. Se um segundo vetor for transportado para ter sua origem em B, o vetor será escrito na forma $\overrightarrow{BC}$. Usando a relação 2.265 e a definição de soma 2.270 chega-se à soma de $\overrightarrow{AB}$ com $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (x_B - x_A, y_B - y_A) + (x_C - x_B, y_C - y_B) =$$

$$(x_C - x_A, y_C - y_A) = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \tag{2.279}$$

Caso os vetores não sejam paralelos, a relação acima pode ser representada por um triângulo de lados $\widehat{ABC}$. Já se os vetores são paralelos, a soma dos vetores também será paralela, não havendo um triângulo.

Fazendo uma analogia do vetor com um deslocamento, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é como um deslocamento do ponto A para o ponto B, $\overrightarrow{BC}$ é como o deslocamento de B para C. A soma dos vetores é como se fosse o deslocamento final. Algo que se deslocou de A para B e de B para C, deslocou-se de A para C. Esta analogia será importante para descrever deslocamentos espaciais.

A figura acima pode ser relacionada com a desigualdade triângular. Partindo da desigualdade 2.256, usando a definição de módulo 2.260 e 2.270:

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$$

$$|\overrightarrow{AC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$$

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| \tag{2.280}$$

Assim como para números reais, o módulo da soma é menor do que a soma dos módulos. A igualdade só se verifica para se os vetores forem paralelos. Reescrevendo a relação acima com $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$ chega-se à

$$|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| \leq |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$$

A relação do módulo da soma com os módulos dos vetores será retomada no próximo capítulo.

Por exemplo $(1,-1)+(2,3)=(3,2)$ e os módulos ficam $|(3,2)|=\sqrt{13}$ e $|(1,-1)|+|(2,3)|=\sqrt{2}+\sqrt{13}>\sqrt{13}=|(3,2)|$, logo, $|(1,-1)|+|(2,3)|>|(3,2)|$.

Há outra forma geométrica de somar vetores. No lugar de colocar a origem de um vetor no extremo de outro, colocam-se as origens dos dois vetores no mesmo ponto. Por exemplo, a origem do vetor $\overrightarrow{AB}$ é o ponto B. Se um segundo vetor for transportado para ter sua origem em A, o vetor será escrito na forma $\overrightarrow{AC}$. Deixando-se a origem do vetor soma no ponto A chega-se ao vetor $\overrightarrow{AD}$. Assim:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$$

Da relação 2.279 chega-se a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$. Comparando com a relação acima, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Ainda usando 2.279, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$. Então $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Como vetores iguais são paralelos e têm o mesmo módulo, a figura $\overline{ABCD}$ é um paralelograma. Assim, o vetor soma $\overrightarrow{AD}$ esta na diagonal de um paralelograma desenhado a partir dos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AC}$. Este método de soma vetorial é denominado método do paralelograma. A desvantagem deste método é para vetores paralelos, o paralelograma fica degenerado.

Na representação dos vetores com a origem em $\mathcal{O}$, a soma vetorial acaba sendo representada pela regra do paralelograma.

2.12.6 Substração vetorial.

A operação de subtração vetorial é análoga à subtração entre números reais. Para números reais vale a definição:

$$a-b=a+(-b)$$

Analogamente, a subtração vetorial é definida como:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b}) \tag{2.281}$$

Usando as definições 2.274 e 2.270 na definição acima:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b}) = (a_x, a_y) + (-b_x, -b_y) =$$

$$= (a_x + (-b_x), a_y + (-b_y))$$

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y) \tag{2.282}$$

Geometricamente, a subtração vetorial pode ser representada transportando as origens dos dois vetores para o mesmo ponto. Os vetores podem ser escritos como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. A primeira forma consiste em usar a relação 2.278 e 2.281:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$$

$$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \tag{2.283}$$

Assim, o vetor subtração $\overrightarrow{CB}$ tem origem no extremo do vetor subtraido $\overrightarrow{AC}$ (ponto C) e o extremo no extremo do vetor $\overrightarrow{AB}$ (ponto B). Caso os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não tenham a mesma direção, forma-se um triângulo $\widehat{ABC}$.

[desenhar figura.].

É interessante notar que a soma e a subtração dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ podem ser representadas em um paralelogramo $\overline{ABCD}$. As diagonais do paralelogramo são $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. A soma dos vetores $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ fica representada na diagonal $\overline{AD}$. Já a subtração vetorial $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ fica sobre a diagonal $\overline{BC}$. É interessante notar que a subtração invertida $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ também fica representada na diagonal $\overline{BC}$.

2.12.7 Produto por escalar.

O conceito de escalar é um pouco complicado e vai além dos objetivos deste curso introdutório de Física. Neste contexto bem específico, o escalar será tomado como sinônimo de número real.

O termo "escalar" vem da palavra escala. Um número real pode ser colocado em uma escala, a reta dos reais.

As coordenadas do vetor são dois números reais. Logo, as coordenadas são dois escalares.

O produto por escalar é uma operação análoga ao produto entre dois números reais. Mas há diferenças profundas entre estes dois produtos. O produto entre dois números reais é a associação de dois números com um terceiro. Já o produto por escalar é a associação de um escalar e um vetor com um vetor. Neste segundo produto, os termos envolvidos na operação são dois objetos matemáticos diferentes: um escalar e um vetor.

A definição do produto do escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ pelo vetor $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y)$ é dada por:

$$\lambda\overrightarrow{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y) \tag{2.284}$$

O produto de dois números reais possui quatro propriedades. Dados

$a, b, c \in \mathbb{R}$:

1. Propriedade comutativa: $ab = ba$

2. Propriedade associativa: $(ab)c = a(bc)$

3. Existe um elemento neutro $0 \in \mathbb{R} : a1 = 1a = a$

4. Para todo $a \neq 0$ existe um elemento inverso $(\frac{1}{a}) \in \mathbb{R}$ tal que $a(\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a})a = 1$

Além disso, há uma propriedade distributiva que relaciona soma e produto:

$$c(a + b) = (a + b)c = ac + bc$$

A propriedade comutativa não faz sentido para o produto por escalar. Mesmo trocando a ordem entre o escalar e o vetor, a distinção entre os objetos multiplicados permanece. Para deixar clara esta diferença, se o produto entre naturais é definido como uma sucessão de somas, $2{*}3 = 2{+}2{+}2$ e $3{*}2 = 3{+}3$. Embora $2*3 = 3*2$, as operações são distintas. Caso se escreva $\overrightarrow{a}\lambda$ no lugar de $\lambda\overrightarrow{a}$, a operação não mudou.

O produto por escalar segue uma propriedade análoga à associativa. Se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, pela definição:

$$\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = \lambda(\mu a_x, \mu a_y) = (\lambda\mu a_x, \lambda\mu a_y) =$$

$$= \lambda\mu(a_x, a_y) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$$

$$\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a} \tag{2.285}$$

Há uma diferença profunda entre a propriedade acima e a associativa entre números. No primeiro caso, o produto entre o primeiro e o segundo fator ou entre o segundo e o terceiro resultam em números. Já no caso acima, o produto entre o segundo e o terceiro fator é um vetor, enquanto entre o primeiro e o segundo é um número. Por exemplo, $2(3(4,5)) = 2(12,15) = (24,30) = 6(4,5) = (2*3)(4,5)$.

O escalar "1" atua como um análogo do elemento neutro. Partindo de 2.284:

$$1\overrightarrow{a} = (1a_x, 1a_y) = (a_x, a_y)$$

$$1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \tag{2.286}$$

É importante frisar que o escalar 1 não está sendo operado em outro escalar, mas em um vetor.

Não faz sentido falar de um elemento inverso no produto por escalar. Não existe um análogo do número 1 para vetores.

Como escalares são diferentes de vetores, há duas propriedades distributivas: uma para soma dos escalares e outra para soma de vetores.

$$(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = (\lambda + \mu)(a_x, a_y) =$$

$$= ((\lambda + \mu)a_x, (\lambda + \mu)a_y) = (\lambda a_x + \mu a_x, \lambda a_y + \mu a_y) =$$

$$= ((\lambda + \mu)a_x, (\lambda + \mu)a_y) = (\lambda a_x, \lambda a_y) + (\mu a_x, \mu a_y) =$$

$$= \lambda(a_x, a_y) + \mu(a_x, a_y)$$

$$(\lambda+\mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a} \tag{2.287}$$

Por exemplo, $(2+3)(4,5) = 5(4,5) = (20,25) = (8,10)+(12,15) = 2(4,5)+3(4,5)$.

$$\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda(a_x+b_x, a_y+b_y) =$$

$$= (\lambda(a_x+b_x), \lambda(a_y+b_y)) = (\lambda a_x + \lambda b_x, \lambda a_y + \lambda b_y) =$$

$$= (\lambda a_x, \lambda a_y) + (\lambda b_x, \lambda b_y) = \lambda(a_x, a_y) + \lambda(b_x, b_y)$$

$$\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b} \tag{2.288}$$

Por exemplo, $2((4,5)+(3,-1)) = 2(7,4) = (14,8) = (8,10)+(6,-2) = 2(4,5)+2(3,-1)$.

Se $\lambda = 0$, há uma relação análoga ao produto do número 0 com outros números. Partindo de 2.284:

$$0\overrightarrow{a} = 0(a_x, a_y) = (0a_x, 0a_y) = (0,0)$$

$$0\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathcal{O}} \tag{2.289}$$

Enquanto o número 0 multiplicado por outro número resulta em 0, o número 0 multiplicado por um vetor resulta no vetor nulo $\overrightarrow{\mathcal{O}}$. Por outro lado, um escalar qualquer multiplicado pelo vetor nulo resulta em vetor nulo. Partindo de 2.284:

$$\lambda\overrightarrow{\mathcal{O}} = \lambda(0,0) = (\lambda * 0, \lambda * 0) = (0,0)$$

$$\lambda\overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

Assim como qualquer número multiplicado por 0 resulta em 0, qualquer número multiplicado pelo vetor nulo resulta no vetor nulo.

O produto do número (-1) com um número a resulta em $(-a)$. Para vetores há uma relação análoga. Partindo da definição 2.284 e 2.274:

$$(-1)\overrightarrow{a} = (-1)(a_x, a_y) = ((-1)a_x, (-1)a_y) = (-a_x, -a_y)$$

$$(-1)\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a} \tag{2.290}$$

Novamente é necessário frisar que o produto acima é entre um número e um vetor.

A semelhança do comportamento do vetor nulo com o número 0 no produto por escalar não deve levar o estudante a achar que o número zero é igual ao vetor nulo. Muitos livros didáticos apresentam a identidade $0 = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Neste livro esta identidade não será usada. Ao contrário, a distinção entre 0 e $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ será enfatizada.

É interessante averiguar as relações entre os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\lambda\overrightarrow{a}$. Se $\lambda = 0$ então o vetor $\lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Neste caso, o vetor $\lambda\overrightarrow{a}$ é parelelo a $\overrightarrow{a}$ porque o vetor nulo é paralelo a qualquer outro. Se $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, o vetor $\lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{a}$ coincide com $\overrightarrow{a}$. Para $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$ e $\lambda \neq 0$, a relação 2.269 junto com 2.284 indica que os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\lambda\overrightarrow{a}$ têm a mesma direção.

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{\lambda a_x}{\lambda a_y}$$

Se $\lambda > 0$, o vetor $\overrightarrow{a}$ é paralelo a $\lambda\overrightarrow{a}$. Já se $\lambda < 0$, o vetor $\overrightarrow{a}$ é antiparalelo a $\lambda\overrightarrow{a}$.

Resta a relação entre os módulos de $\overrightarrow{a}$ e $\lambda\overrightarrow{a}$. Usando as relações 2.267 e 2.284:

$$|\lambda\overrightarrow{a}| = \sqrt{\lambda^2 a_x^2 + \lambda^2 a_y^2} = \sqrt{\lambda^2(a_x^2 + a_y^2)} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$|\lambda\overrightarrow{a}| = |\lambda||\overrightarrow{a}| \tag{2.291}$$

Com as relações acima é possível construir geometricamente o vetor $\lambda\overrightarrow{a}$ a partir de $\overrightarrow{a}$. O módulo de $\lambda\overrightarrow{a}$ é $|\lambda|$ vezes o módulo de $\overrightarrow{a}$. Se $\lambda > 0$, os vetores são paralelos. Caso $\lambda < 0$, os vetores são antiparalelos. Para $\lambda = 0$ ou $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, o vetor $\lambda\overrightarrow{a}$ é apenas um ponto, o vetor nulo.

2.12.8 Divisão por escalar

O termo divisão por escalar geralmente não aparece nos livros de matemática. Mas a operação é feita em livros de Física, mesmo sem uma definição formal.

A divisão de um vetor por um escalar é dada por:

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{a} \tag{2.292}$$

onde $\lambda \neq 0$.

Usando a definição 2.284 chega-se a outra definição:

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)(a_x, a_y) = \left(\left(\frac{1}{\lambda}\right)a_x, \left(\frac{1}{\lambda}\right)a_y)\right)$$

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)(a_x, a_y) = \left(\frac{a_x}{\lambda}, \frac{a_y}{\lambda}\right) \tag{2.293}$$

Por exemplo, $\frac{(3,4)}{2} = (\frac{3}{2}, 2)$

Da propriedade 2.291 aplicada em 2.292 chega-se a:

$$|\frac{\overrightarrow{a}}{\lambda}| = |\left(\frac{1}{\lambda}\right)||\overrightarrow{a}|$$

$$|\frac{\overrightarrow{a}}{\lambda}| = \frac{|\overrightarrow{a}|}{|\lambda|} \tag{2.294}$$

O vetor $\frac{\overrightarrow{a}}{\lambda}$ tem a mesma direção de $\overrightarrow{a}$. Se $\lambda > 0$, os vetores são paralelos, mas se $\lambda < 0$, os vetores são antiparalelos.

2.12.9 Versores

Versor e um vetor de módulo 1. Os versores são representados com um "^" acima da letra minúscula no lugar do símbolo $\rightarrow$. Assim o versor pode ser definido em função de seu módulo como:

$$|\hat{a}| = 1$$

Alguns versores são tão usuais que há símbolos especiais para eles. Os versores definidos abaixo são os mais usados.

$$\hat{i} = (1, 0) \tag{2.295}$$

$$\hat{j} = (0, 1) \tag{2.296}$$

Fica como exercício para o estudante usar a definição 2.267.

A partir de qualquer vetor não nulo é possível "construir" um versor. Basta dividir um vetor pelo seu próprio módulo.

$$\hat{a} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} \tag{2.297}$$

Para verificar que o versor acima tem realmente módulo 1, basta usar a propriedade 2.294:

$$|\hat{a}| = |\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}| = \frac{|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|}$$

Por exemplo, o versor construido a partir de $(1, 1)$ é dado por:

$$\hat{a} = \frac{(1,1)}{|(1,1)|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Qualque vetor pode ser reescrito na forma de um versor multiplicado pelo módulo do vetor:

$$\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \left(\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} \right) = |\overrightarrow{a}|\hat{a}$$

Por exemplo, o vetor $(1, 2)$ pode ser reescrito como:

$$(1,2) = |(1,2)| \left(\frac{(1,2)}{|(1,2)|} \right) = \sqrt{5}\frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

onde $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ é um versor.

2.12.10 Decomposição de vetores

Os vetores podem ser escritos como somas de outros vetores. Este processo é conhecido como decomposição.

A decomposição mais comum é aquela dada em termos de vetores nos eixos x e y. Um vetor qualquer $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$ fica decomposto como:

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y) = (a_x, 0) + (0, a_y)$$

[fazer figura.].

O vetor $(a_x, 0)$ está no eixo x e $(0, a_y)$, no eixo y.

Através da definição 2.284, os vetores acima podem ser reescritos como:

$$\overrightarrow{a} = a_x(1, 0) + a_y(0, 1)$$

Com as definições dos versores $\hat{i}$ e $\hat{j}$ a expressão acima fica:

$$\overrightarrow{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \tag{2.298}$$

Por exemplo, $(1, 3) = 1\hat{i} + 3\hat{j}$

A soma vetorial 2.270 reescrita em termos destes versores fica:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j}$$

É como se a componente de cada vetor fosse somada independetemente da outra. Analogamente, o produto por escalar 2.284 atua em cada componente independentemente.

$$\lambda\overrightarrow{a} = \lambda a_x\hat{i} + \lambda a_y\hat{j}$$

Uma decomposição geral do vetor $\overrightarrow{a}$ é dada pela definição de subtração de vetores 2.281:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b}) + \overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{b} \qquad (2.299)$$

Por exemplo, o vetor $(3,7)$ pode ser decomposto como $(3,7) = ((3,7) - (1,1)) + (1,1) = (2,6) + (1,1)$.

Embora seja possível escrever o vetor nulo $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ como soma de dois vetores opostos (ver 2.277) não é usual decompor este vetor.

2.13 Posição de um corpo pontual em um plano espacial.

O problema tratado nesta seção é a localização de um corpo pontual em um plano espacial.

O corpo pontual localizado em um plano espacial ocupará um único ponto em cada instante de tempo. Cada ponto do plano pode ser localizado através de um par de números reais. Mas no lugar de apenas pontos, os corpos pontuais serão localizados com vetores.

2.13.1 Plano Espacial.

Os eixos do plano cartesiano são duas retas reais perpendiculares. As localizações são adimensionais. Já em um plano espacial há a dimensão "espaço". No lugar das retas reais, os eixos x e y são retas espaciais. Caso o leitor não se lembre das diferenças entre a reta real e a reta espacial, é necssário consultar o capítulo anterior.

Os físicos não representam uma posição como um simples ponto $P = (x, y)$. Eles representam a posição como um vetor que tem origem na origem do plano espacial $O = (0, 0)$ e tem extremo na própria posição $P = (x, y)$. Em outras palavras, a posição que corresponde ao corpo no ponto P é $\overrightarrow{s} = (x, y)$ É importante enfatizar que este vetor não é adimensional, mas suas coordenadas tem dimensão de espaço.

[ver figura.].

Há inúmeras vantagens de se atribuir um vetor à localização no lugar de apenas um ponto. A velocidade é definida como uma divisão de uma variação de posição por variação de tempo. Pontos no plano não podem ser somados ou subtraidos, mas os vetores $\overrightarrow{s}$ podem. Então, os conceitos de velocidade e aceleração poderão ser definidos para o plano.

Para não se confundir o vetor nulo do plano cartesiano $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ com o vetor nulo do plano espacial, usa-se o termo $\overrightarrow{s_{\mathcal{O}}} = (0, 0)$ onde as componentes não são os números 0 , mas as posições 0.

O módulo do vetor posição é definido de acordo com 2.267:

$$|\overrightarrow{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \tag{2.300}$$

onde este módulo tem dimensão espacial.

Por exemplo, $|(1m, 2m)| = \sqrt{5}m$, $|(1cm, 2cm)| = \sqrt{5}cm$, $|(1m, 50cm)| = |(1m, 0, 5m)| = \sqrt{1, 25}m$, etc.

2.13.2 Grandezas escalares e vetoriais.

O conceito detalhado de grandeza escalar está além dos objetivos deste curso. No contexto da Mecânica Clássica, uma grandeza escalar pode ser definida como aquela que pode ser representada por um escalar (número real) seguido de alguma unidade.

Por exemplo, a posição de um corpo em uma reta espacial é uma grandeza escalar. Cada posição é representada por um número real seguido de uma unidade espacial (por exemplo, $s = 2m$). O tempo também é uma grandeza escalar porque pode ser representado por um número real seguido de uma unidade temporal (como em $t = 3s$). Massa é uma grandeza escalar (como em $m = 4kg$). Na reta, velocidade e aceleração também são grandezas escalares.

Grandeza vetorial é aquela que pode ser representada como uma sequência de escalares em uma certa ordem. No caso particular do plano, uma grandeza vetorial é aquela que precisa de um par de números reais para ser representada. O nome grandeza vetorial se deve ao fato de que qualquer par de números reais pode ser associado a um vetor com a origem em $\mathcal{O}$.

No plano, a posição não pode ser considerada uma grandeza escalar. São necessários dois números reais para localizar um ponto no plano. Assim, a posição de um corpo no plano é uma grandeza vetorial. Este par de números reais é associado a um vetor com estas mesmas coordenadas. Velocidade e aceleração no plano também são grandezas vetoriais.

2.13.3 Distância entre duas posições no plano espacial

A distância entre duas posições $\overrightarrow{s_A}$ e $\overrightarrow{s_B}$ no plano espacial é a associação deste par de pontos com um número positivo. Inspirado na definição da distância entre números no capítulo anterior:

$$d(\overrightarrow{s_A}, \overrightarrow{s_B}) = |\overrightarrow{s_A} - \overrightarrow{s_B}| \tag{2.301}$$

O módulo da posição coincide com a distância da posição $\overrightarrow{s_A}$ até a origem $(0, 0)$.

$$d(\overrightarrow{s_A}, \overrightarrow{s_O}) = |\overrightarrow{s_A} - \overrightarrow{s_O}| = |\overrightarrow{s_A}|$$

Substituindo a relação de subtração entre vetores em 2.282 acima:

$$d(\overrightarrow{s_A}, \overrightarrow{s_B}) = |(s_{Ax} - s_{Bx}, s_{Ay} - s_{By})|$$

$$d(\overrightarrow{s_A}, \overrightarrow{s_B}) = \sqrt{(s_{Ax} - s_{Bx})^2 + (s_{Ay} - s_{By})^2} \tag{2.302}$$

Esta definição coincide com a distância entre pontos 2.259. Assim a distância entre pontos no plano espacial segue a métrica usual.

Por exemplo, a distância entre um ponto $\overrightarrow{s_A} = (1m, 2m)$ e $\overrightarrow{s_B} = (2m, 1m)$ é de:

$$d(\overrightarrow{s_A}, \overrightarrow{s_B}) = |\overrightarrow{s_A} - \overrightarrow{s_B}| = |(-1m, 1m)| = \sqrt{2}m$$

2.13.4 Deslocamentos entre duas posições.

Quando um corpo pontual desloca-se posição $\overrightarrow{s_A}$ para a posição $\overrightarrow{s_B}$, o deslocamento é definido como.

$$\Delta\overrightarrow{s_{AB}} = \overrightarrow{s_B} - \overrightarrow{s_A} \tag{2.303}$$

Por exemplo, o deslocamento da posição $\overrightarrow{s_A} = (5cm, 2cm)$ para $\overrightarrow{s_B} = (7cm, 9cm)$ é $\Delta\overrightarrow{s_{AB}} = (7cm, 9cm) - (5cm, 2cm) = (2cm, 7cm)$. Já o deslocamento de $\overrightarrow{s_B} = (7cm, 9cm)$ para $\overrightarrow{s_c} = (2cm, 2cm)$ é $\Delta\overrightarrow{s_{BC}} = (-5cm, -7cm)$.

Se $\overrightarrow{s_A} = \overrightarrow{s_B}$, o deslocamento é nulo.

$\Delta\overrightarrow{s_{AA}} = \overrightarrow{s_A} - \overrightarrow{s_A} = \overrightarrow{s_O}$.

Assim como o deslocamento na reta, o deslocamento entre duas posições no plano é anticomutativo.

$$\Delta\overrightarrow{s_{AB}} = \overrightarrow{s_B} - \overrightarrow{s_A} = -(\overrightarrow{s_A} - \overrightarrow{s_B}) = -\Delta\overrightarrow{s_{BA}}$$

Usando ainda o exemplo das posições $\overrightarrow{s_A} = (5cm, 2cm)$ e $\overrightarrow{s_B} = (7cm, 9cm)$ então $\Delta\overrightarrow{s_{AB}} = (7cm, 9cm) - (5cm, 2cm) = (2cm, 7cm)$ e $\Delta\overrightarrow{s_{BA}} = (5cm, 2cm) - (7cm, 9cm) = (-2cm, -7cm) = -(2cm, 7cm)$.

Caso sejam feitos dois deslocamentos sucessivos, o deslocamento final será a soma dos dois deslocamentos. Em outras palavras, um deslocamento de A para B seguido de outro deslocamento de B para C equivale a um único deslocamento de A para C.

$$\Delta\overrightarrow{s_{AB}} + \Delta\overrightarrow{s_{BC}} = (\overrightarrow{s_B} - \overrightarrow{s_A}) + (\overrightarrow{s_C} - \overrightarrow{s_B})$$

$$\Delta\overrightarrow{s_{AB}} + \Delta\overrightarrow{s_{BC}} = \overrightarrow{s_B} - \overrightarrow{s_A} + \overrightarrow{s_C} - \overrightarrow{s_B} = \overrightarrow{s_C} - \overrightarrow{s_A}$$

$$\Delta\overrightarrow{s_{AB}} + \Delta\overrightarrow{s_{BC}} = \Delta\overrightarrow{s_{AC}} \tag{2.304}$$

Fica confirmada a analogia do vetor e do deslocamento comentada na seção anterior (ver 2.279). A soma vetorial representa o deslocamento total.

[ver figura]

Por exemplo, para as mesmas posições $\overrightarrow{s_A} = (5cm, 2cm)$, $\overrightarrow{s_B} = (7cm, 9cm)$ e $\overrightarrow{s_c} = (2cm, 2cm)$ os deslocamentos entre os 3 pontos ficam: $\Delta\overrightarrow{s_{AB}} = (2cm, 7cm)$,$\Delta\overrightarrow{s_{BC}} = (-5cm, -7cm)$ e $\Delta\overrightarrow{s_{AC}} = (-3cm, 0)$. A soma dos deslocamentos sucessivos de A para B e de B para C é igual ao deslocamento de A para C: $\Delta\overrightarrow{s_{AB}} + \Delta\overrightarrow{s_{BC}} = (-3cm, 0) = \Delta\overrightarrow{s_{AC}}$.

2.14 Funções Vetoriais

2.14.1 Conceito de função aplicado ao vetor.

Neste capítulo, é necessário dominar apenas um tipo de função: funções que associam um número real a um vetor. Estas funções são chamadas de "funções vetoriais".

"Uma função vetorial é uma relação de um número real $t \in \mathbb{R}$ com um único vetor com coordenadas $\overrightarrow{f}(t) = (g(t), h(t)) \in \mathbb{R}^2$ onde $g(t)$ e $h(t)$ são funções de uma variável real". Geralmente ela é representada como $\overrightarrow{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

A função abaixo ilustra bem o conceito.

$$\overrightarrow{f}(t) = (2t + 3, t^2)$$

A função que associa t à coordenada x é $g(t) = 2t + 3$. Já a função que associa t à coordenada y é $h(t) = t^2$. O número 0 é real. Assim, $\overrightarrow{f}(0) = (g(0), h(0)) = (3, 0)$, é um vetor. O único vetor relacionado ao 0 pela função $\overrightarrow{f}(t) = (2t + 3, t^2)$ é $(3, 0)$. Da mesma forma $\overrightarrow{f}(\frac{1}{2}) = (4, \frac{1}{4})$, ou seja, o único vetor relacionado à $\frac{1}{2}$ pela função $\overrightarrow{f}(t) = (2t + 3, t^2)$ é $(4, \frac{1}{4})$.

O número t que será associado à outro também é denominado "argumento da função". O argumento da função não será designado por x ou por y porque esta letra designa o eixo das abcissas. Outras letras podem ser usadas para representar o argumento da função, desde que a transformação seja mantida, mas é importante reservar as letras x e y para os eixos. Por exemplo, a função acima poderia ser representada por:

$$\overrightarrow{f}(u) = (2u + 3, u^2)$$

Para ilustrar que a função será a mesma, basta usar os dois exemplos anteriores: se $u = 0$ então $\overrightarrow{f}(0) = (3,0)$ e se $u = \frac{1}{2}$, $\overrightarrow{f}(\frac{1}{2}) = (4, \frac{1}{4})$.

Também neste caso, cada número real está associado a um único vetor, mas dois números reais podem ser associados ao mesmo vetor. Por exemplo, para a função $\overrightarrow{f}(t) = (t^2, t^4)$, segue que $-1 \neq 1$ mas $\overrightarrow{f}(-1) = \overrightarrow{f}(1)$.

Analogamente ao que ocorre para funções de uma variável, é possível definir uma "função constante".

$$f(t) = \overrightarrow{c}$$

onde $\overrightarrow{c}$ é um vetor qualquer. Por exemplo, a função constante poderia ser $f(t) = (2,3)$.

Uma função constante que tem importância particular é $f(x) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Ela também é conhecida como função nula.

Não existe para funções vetoriais um análogo da função identidade $f(x) = x$. Um escalar jamais é igual um vetor.

As analogias entre funções vetoriais segue adiante. Quando há mais de uma função em uma determinada oração, a notação $\overrightarrow{f}(x)$ pode apresentar ambiguidade. Por exemplo, se $\overrightarrow{f}(t) = (2t+1, t^2)$ e $\overrightarrow{f}(x) = (t^2, 2^t)$ há duas funções distintas sendo representadas pela mesma letra $\overrightarrow{f}$. Nestes casos, é importante usar outras letras minúsculas para representar as outras funções. Não é conveniente usar as letras $\overrightarrow{g}$ ou $\overrightarrow{h}$ porque elas são usadas para representar as funções espcíficas em x e y. No exemplo citado, as funções poderiam ser representadas por $\overrightarrow{s}(t) = (2t+1, t^2)$ e $\overrightarrow{v}(x) = (t^2, 2^t)$.

As funções vetoriais não são representadas através de gráficos. Para cada valor de t não há um número, mas um vetor $(x = g(t), y = h(t))$. Apesar disso, os pontos formados pelo rastro do extremo do vetor $(x = g(t), y =$

$h(t)$) formam curvas no plano xy. Estas curvas são chamadas de "curvas parametrizadas". No lugar de escrever uma relação valores de x e y, escolhe-se um terceiro valor t para fornecer $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

A seguir serão colocados alguns exemplos de funções. Foram escolhidas as funções mais usadas ao longo deste livro.

2.14.2 Exemplos de funções vetoriais.

Os exemplos de funções vetoriais são restritos, mas ilustrativos.

Cada componente da função vetorial é uma função linear.

A função vetorial linear é caracterizada como:

$$\overrightarrow{f}(t) = (\alpha_x t + \beta_x, \alpha_y t + \beta_y) \tag{2.305}$$

onde α_x, α_y, β_xe β_y são números reais.

Um exemplo da função vetorial linear é $\overrightarrow{f}(t) = (2t + 3, 4t - 1)$. Alguns valores para esta função são exibidos à seguir: $\overrightarrow{f}(0) = (3, -1)$, $\overrightarrow{f}(1) = (5, 3)$, $\overrightarrow{f}(2) = (7, 7)$, $\overrightarrow{f}(-1) = (1, -5)$, $\overrightarrow{f}(\frac{1}{2}) = (4, 2)$.

[ver figura].

A função linear vetorial pode ser reescrita a partir de 2.305 e das definição de soma vetorial 2.270:

$$\overrightarrow{f}(t) = (\alpha_x t + \beta_x, \alpha_y t + \beta_y) = (\alpha_x t, \alpha_y t) + (\beta_x, \beta_y)$$

Com a definição de produto escalar 2.284, o argumento t pode ser tratado como um escalar:

$$\overrightarrow{f}(t) = t(\alpha_x, \alpha_y) + (\beta_x, \beta_y)$$

Definido os vetores $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y)$ e $\overrightarrow{\beta} = (\beta_x, \beta_y)$ e substituindo acima:

$$\overrightarrow{f}(t) = t\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} \tag{2.306}$$

Os físicos costumam escrever o produto escalar $t\overrightarrow{\alpha}$ como $\overrightarrow{\alpha}t$.

$$\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{\alpha}t + \overrightarrow{\beta} \tag{2.307}$$

Por exemplo, a função $\overrightarrow{f}(t) = (2t+3, 4t-1) = (2,4)t + (3,-1)$.

A equação acima apresenta uma clara analogia com a função linear $f(x) = \alpha x + \beta$. Mas é necessário frisar que os termos $\overrightarrow{\alpha}$ e $\overrightarrow{\beta}$ são vetores. Portanto $\overrightarrow{\alpha}$ indica a taxa de crescimento da função, mas não há um gráfico que exprima a inclinação em relação ao eixo t. O coeficiente $\overrightarrow{\beta}$ exprime o vator da função em $t = 0$. Lembrando que o produto escalar de 0 com qualquer vetor é o vetor nulo 2.289 então $\overrightarrow{f}(0) = 0\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\mathcal{O}} + \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta}$. No entanto não faz sentido falar do significado gráfico de $\overrightarrow{\beta}$.

A analogia com a reta prossegue. A função vetorial linear 2.305 faz com que o extremo do vetor percorra uma reta no plano xy. O vetor $\overrightarrow{\alpha}t$ varia com o argumento t, mas o vetor $\overrightarrow{\alpha}t$ mantem-se paralelo à $\overrightarrow{\alpha}$. Se t varia de $-\infty$ até $+\infty$ o conjunto de todos os extremos do vetor $\overrightarrow{\alpha}t$ forma uma reta que contem o vetor $\overrightarrow{\alpha}$ e passa pela origem em $t = 0$. Ao somar o vetor $\overrightarrow{\beta}$ em cada vetor $\overrightarrow{\alpha}t$ cria-se uma reta paralela $\overrightarrow{\alpha}t + \overrightarrow{\beta}$.

Outra forma de verificar que a função linear vetorial corresponde a uma reta no plano xy é verificando diretamente as coordemadas do vetor. Partindo de 2.305:

$$x(t) = \alpha_x t + \beta_x \tag{2.308}$$

$$y(t) = \alpha_y t + \beta_y \tag{2.309}$$

Isolando t em 2.308:

$$t = \frac{x(t)}{\alpha_x} - \frac{\beta_x}{\alpha_x}$$

Substiutindo em 2.309:

$$y(t) = \alpha_y \left(\frac{x(t)}{\alpha_x} - \frac{\beta_x}{\alpha_x} \right) + \beta_y$$

$$y(t) = \left(\frac{\alpha_y}{\alpha_x} \right) x(t) + \left(\beta_y - \frac{\beta_x \alpha_y}{\alpha_x} \right)$$

$$y = \left(\frac{\alpha_y}{\alpha_x} \right) x + \left(\beta_y - \frac{\beta_x \alpha_y}{\alpha_x} \right) \tag{2.310}$$

A equação acima é de uma reta com coeficiente angular $\left(\frac{\alpha_y}{\alpha_x}\right)$ e coeficeinte linear $\left(\beta_y - \frac{\beta_x \alpha_y}{\alpha_x}\right)$. É interessante notar que as componentes do vetor $\overrightarrow{\alpha}$ determinam o coeficiente angular da reta mas o coeficiente linear da reta é determinado por $\overrightarrow{\alpha}$ e $\overrightarrow{\beta}$.

As funções 2.308 e 2.309 são denominadas "equações paramétricas da reta".

A reta que aparece no plano xy não deve ser confundida com a própria função linear. Por exemplo, as funções $\overrightarrow{f}(t) = (1,2)t + (0,1)$ e $\overrightarrow{s}(t) = (2,4)t + (2, \frac{1}{2})$ são funções distintas. Basta ver que $\overrightarrow{f}(0) = (0,1) \neq \overrightarrow{s}(0) = (2, \frac{1}{2})$ e $\overrightarrow{f}(1) = (1,3) \neq \overrightarrow{s}(1) = (4, \frac{9}{2})$. No entanto as retas descritas por estas duas funções são iguais. Fica para o leitor a verificação disso através da equação 2.310.

Função quadrática.

A função vetorial quadrática é caracterizada como:

$$\overrightarrow{f}(t) = (\alpha_x t^2 + \beta_x t + \gamma_x, \alpha_y t^2 + \beta_y t + \gamma_y) \qquad (2.311)$$

onde α_x, α_y, β_x, β_y e γ_y são números reais. Pelo menos um dos termos α precisam ser diferentes de zero.

Um exemplo da função vetorial linear é $\overrightarrow{f}(t) = (2t+3, 4t^2-t+1)$. Alguns valores para esta função são exibidos à seguir: $\overrightarrow{f}(0) = (3,1)$, $\overrightarrow{f}(1) = (5,4)$, $\overrightarrow{f}(2) = (7,15)$, $\overrightarrow{f}(-1) = (1,6)$, $\overrightarrow{f}(\frac{1}{2}) = (4, \frac{3}{2})$.

[ver figura].

Analogamente ao que foi feito para a função quadrática vetorial pode ser reescrita a partir de 2.311 e das definição de soma vetorial 2.270:

$$\overrightarrow{f}(t) = (\alpha_x t^2 + \beta_x t + \gamma_x, \alpha_y t^2 + \beta_y t + \gamma_y) = (\alpha_x t^2, \alpha_y t^2) + (\beta_x t, \beta_y t) + (\gamma_x, \gamma_y)$$

Com a definição de produto escalar 2.284, o argumento t pode ser tratado como um escalar:

$$\overrightarrow{f}(t) = t^2(\alpha_x, \alpha_y) + t(\beta_x, \beta_y) + (\gamma_x, \gamma_y)$$

Definido os vetores $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y)$, $\overrightarrow{\beta} = (\beta_x, \beta_y)$ e $\overrightarrow{\gamma} = (\gamma_x, \gamma_y)$ substituindo acima:

$$\overrightarrow{f}(t) = t^2\overrightarrow{\alpha} + t\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma} \qquad (2.312)$$

Os físicos costumam escrever o produto escalar $t^2\overrightarrow{\alpha}$ como $\overrightarrow{\alpha}t^2$ e $t\overrightarrow{\beta}$ como $\overrightarrow{\beta}t$.

$$\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{\alpha}t^2 + \overrightarrow{\beta}t + \overrightarrow{\gamma} \qquad (2.313)$$

Como $\alpha_x \neq 0$ ou $\alpha_y \neq 0$, então $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$.

Por exemplo, a função $\overrightarrow{f}(t) = (2t+3, 4t^2 - t + 1) = (0,4)t^2 + (2,-1)t + (3,1)$.

A equação acima apresenta analogia com a função quadrática $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Novamente é necessário frisar que os termos $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ e $\overrightarrow{\gamma}$ são vetores. Fica a cargo do estudante examinar as analogias entre a função quadrática e a função vetorial quadrática.

A função vetorial quadrática 2.311 faz com que o extremo do vetor percorra uma parábola ou uma reta no plano xy. Caso os vetores $\overrightarrow{\alpha}$ e $\overrightarrow{\beta}$ tenham a mesma direção, a figura do plano xy será uma reta. Caso contrário, será uma parábola. A prova de que a função vetorial quadrática descreve uma parábola ou uma reta é pouco complicada e será omitida. Nem sempre y é uma função de x. As únicas possibilidades de y ser uma função de x é quando a reta não é vertical ou quando há uma parábola com $\overrightarrow{\alpha} = (0, \alpha_y) = \alpha_y(0,1) = \alpha_y\hat{j}$.

É interessante analisar alguns casos particulares da função quadrática. Em primeiro lugar será analisada a condição $\overrightarrow{\alpha} = (0, \alpha_y) = \alpha_y(0,1) = \alpha_y\hat{j}$ com $\beta_x \neq 0$

Verificando diretamente as coordemadas do vetor a partir de 2.311 com $\alpha_x = 0$:

$$x(t) = \beta_x t + \gamma_x \tag{2.314}$$

$$y(t) = \alpha_y t^2 + \beta_y t + \gamma_y \tag{2.315}$$

Isolando t em 2.314:

$$t = \frac{x(t)}{\beta_x} - \frac{\gamma_x}{\beta_x}$$

Substiutindo em 2.315:

$$y(t) = \alpha_y \left(\frac{x(t)}{\beta_x} - \frac{\gamma_x}{\beta_x} \right)^2 + \beta_y \left(\frac{x(t)}{\beta_x} - \frac{\gamma_x}{\beta_x} \right) + \gamma_y$$

$$y(t) = \alpha_y \left(\frac{x^2(t)}{\beta_x^2} - \frac{2x(t)\gamma_x}{\beta_x^2} + \frac{\gamma_x^2}{\beta_x^2} \right) + \beta_y \left(\frac{x(t)}{\beta_x} - \frac{\gamma_x}{\beta_x} \right) + \gamma_y$$

$$y(t) = \left(\frac{\alpha_y}{\beta_x^2} \right) x^2(t) + \left(\frac{\beta_y}{\beta_x} - \frac{2\gamma_x}{\beta_x^2} \right) x(t) + \left(\frac{\alpha_y \gamma_x^2}{\beta_x^2} + \gamma_y \right)$$

$$y = \left(\frac{\alpha_y}{\beta_x^2} \right) x^2 + \left(\frac{\beta_y}{\beta_x} - \frac{2\gamma_x}{\beta_x^2} \right) x + \left(\frac{\alpha_y \gamma_x^2}{\beta_x^2} + \gamma_y \right) \tag{2.316}$$

A equação acima corresponde ao gráfico de uma parábola $y = f(x)$. Se $\left(\frac{\alpha_y}{\alpha_x}\right) > 0$ a concavidade da parábola é para cima. Se $\left(\frac{\alpha_y}{\alpha_x}\right) < 0$ a concavidade da parábola é para baixo.

As funções 2.314 e 2.315 são denominadas "equações paramétricas da parábola".

Outro caso interessante é $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\beta}$ (os vetores são iguais, portanto têm a mesma direção). Substituindo $\alpha_x = \beta_x$ e $\alpha_y = \beta_y$ em 2.311 chega-se à:

$$x(t) = \alpha_x t^2 + \beta_x t + \gamma_x \tag{2.317}$$

$$y(t) = \alpha_x t^2 + \beta_x t + \gamma_y \tag{2.318}$$

Substriando Isolando t em 2.317 de 2.318:

$$x(t) - y(t) = \gamma_x - \gamma_y$$

$$y(t) = x(t) + \gamma_y - \gamma_x$$

$$y = x + (\gamma_y - \gamma_x) \tag{2.319}$$

A equação acima é um tipo particular de equação paramétrica da reta. Neste caso o coefiente angular da reta é 1 e o coeficiente linear, $(\gamma_y - \gamma_x)$.

Em analogia com a função linear, a figura que aparece no plano xy não deve ser confundida com a própria função. Por exemplo, as funções $\overrightarrow{f}(t) = (0,1)t^2 + (1,0)t$ e $\overrightarrow{s}(t) = (0,4)t^2 + (2,0)t$ são funções distintas. Apesar de $\overrightarrow{f}(0) = (0,0) = \overrightarrow{s}(0)$, $\overrightarrow{f}(1) = (1,1) \neq \overrightarrow{s}(1) = (2,4)$. No entanto a mesma parábola é descrita por estas duas funções distintas. Fica para o leitor a verificação disso através da equação 2.316.

O estudante pode estudar em livros de Cálculo Diferencial e Integral e de Geometria Analítica outras funções vetoriais. Outras funções vetoriais serão analisada em capítulos posteriores.

2.14.3 Cálculo Diferencial Vetorial.

A taxa de variação de uma função vetorial geralmente não é usada pelos físicos. Assim este conceito será omitido.

O cálculo diferencial pode ser extendido para funções vetoriais. No capítulo anterior, a derivada de uma função foi definida de várias formas. Uma das formas definidas foi:

$$f'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2.320}$$

A definição de derivada vetorial é análoga. No lugar da função de uma variável se coloca uma função vetorial. O argumento será designado por t.

$$\overrightarrow{f}'(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{f}(t + \Delta t) - \overrightarrow{f}(t)}{\Delta t} \tag{2.321}$$

Há uma diferença radical com a derivada acima. O numerador desta expressão é uma subtração entre vetores. Como o vetor foi dividido por um escalar (ver 2.292), oresultado é outro vetor. Para cada t há um único $\overrightarrow{f}'(t)$. Assim $\overrightarrow{f}'(t)$ também é uma função vetorial.

Outra notação comum para derivada vetorial é dada em analogia com $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$.

$$f'(t) = \frac{d\overrightarrow{s}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{f}(t)}{dt} \tag{2.322}$$

onde $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{f}(t)$.

Uma relação muito importante das derivadas vetoriais que não encontra análogo nas derivadas de funções de uma variável. Da definição 2.321 para a função $f(t) = (g(t), h(t))$:

$$\overrightarrow{f}'(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{(g(t + \Delta t), h(t + \Delta t)) - (g(t), h(t))}{\Delta t}$$

Usando as definições 2.282 e 2.292:

$$\overrightarrow{f}'(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{(g(t + \Delta t) - g(t), h(t + \Delta t) - h(t))}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{f}'(t) = lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right)$$

Como o argumento tende a zero, o limite pode ser aplicado em cada componente em particular:

$$\overrightarrow{f}'(t) = \left(lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right)$$

$$\overrightarrow{f}'(t) = \left(\frac{dg(t)}{dt}, \frac{dh(t)}{dt} \right) = (g'(t), h'(t)) \tag{2.323}$$

Para ilustrar o conceito de derivada vetorial será dado o exemplo da função vetorial linear 2.305 $\overrightarrow{f}(t) = (\alpha_x t + \beta_x, \alpha_y t + \beta_y)$.

$$\overrightarrow{f}'(t) = ((\alpha_x t + \beta_x)', (\alpha_y t + \beta_y)')$$

No capítulo anterior foi deduzido que $(\alpha x + \beta)' = \alpha$. Aplicando esta relação na expressão acima:

$$\overrightarrow{f}'(t) = (\alpha_x, \alpha_y) = \overrightarrow{\alpha}$$

Reescrevendo a função linear na forma 2.307 $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta}$ a relação acima fica bastante interessante:

$$(\overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta})' = \frac{d(\overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta})}{dt} = \overrightarrow{\alpha} \tag{2.324}$$

A expressão acima reforça a analogia com a derivada da função linear $(\alpha x + \beta)' = \alpha$.

A função vetorial quadrática 2.311 $\overrightarrow{f}(t) = (\alpha_x t^2 + \beta_x t + \gamma_x, \alpha_y t^2 + \beta_y t + \gamma_y)$ também pode ser sua derivada calculada através da propriedade 2.313:

$$\overrightarrow{f}'(t) = ((\alpha_x t + \beta_x t + \gamma_x)', (\alpha_y t^2 + \beta_y t + \gamma_y)')$$

No capítulo anterior foi deduzido que $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = 2\alpha x + \beta$. Aplicando esta relação acima:

$$\overrightarrow{f}'(t) = (2\alpha_x t + \beta_x, 2\alpha_y t + \beta_y)$$

ou desenvolvendo a expressão acima:

$$\overrightarrow{f}'(t) = (2\alpha_x t, 2\alpha_y t) + (\beta_x, \beta_y)$$

$$\overrightarrow{f}'(t) = 2t(\alpha_x, \alpha_y) + (\beta_x, \beta_y)$$

$$\overrightarrow{f}'(t) = 2\overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta}$$

Reescrevendo a relação acima pela relação 2.313:

$$(\overrightarrow{\alpha} t^2 + \overrightarrow{\beta} t + \overrightarrow{\gamma})' = \frac{d(\overrightarrow{\alpha} t^2 + \overrightarrow{\beta} t + \overrightarrow{\gamma})}{dt} = 2\overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta} \tag{2.325}$$

Isso reforça a analogia entre a função vetorial quadrática e a função quadrática ($(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = 2\alpha x + \beta$).

2.14.4 Regras de derivação vetorial.

Nesta subseção serão mostradas algumas regras de derivação de funções vetoriais sem recorrer à provas matemáticas formais. O cálculo da derivada de uma função vetorial $\overrightarrow{f'}(x)$ apresenta analogias com a derivada da função $f'(x)$. Isso já foi visto nos exemplos da função linear e quadrática. Essas analogias serão extendidas para outras funções.

Em primeiro lugar, começa-se com as funções conhecidas. Partindo-se das relações 2.324 repete-se a regra a função vetoriais linear:

$$(\overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta})' = \frac{d(\overrightarrow{\alpha} t + \overrightarrow{\beta})}{dt} = \overrightarrow{\alpha} \tag{2.326}$$

Por exemplo, $((1,2)t + (3,4))' = (1,2)$.

A regra 2.326 permite calcular a derivada de uma função vetorial constante. A função constante $\overrightarrow{f}(x) = \overrightarrow{c}$ pode ser reescrita como $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{\mathcal{O}}t + c$. Assim $\overrightarrow{f}(x)$ é uma função linear com $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ e $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{c}$. Substituindo estes valores em 2.326:

$$\frac{d\overrightarrow{c}}{dx} = \overrightarrow{c}' = \overrightarrow{\mathcal{O}} \tag{2.327}$$

Por exemplo $(1,2)' = (0,0)$

As regras que permite escrever a derivada da função vetorial quadrática 2.325 será repetida abaixo:

$$(\overrightarrow{\alpha}t^2 + \overrightarrow{\beta}t + \overrightarrow{\gamma})' = \frac{d(\overrightarrow{\alpha}t^2 + \overrightarrow{\beta}t + \overrightarrow{\gamma})}{dt} = 2\overrightarrow{\alpha}t + \overrightarrow{\beta} \tag{2.328}$$

Por exemplo, $((1,2)t^2 + (5,4)t + (7,0))' = (2,4)t + (5,4)$.

As regras acima referem-se a funções particulares. No capítulo anterior foi dada uma relação particular usada para função de uma variável $f(x)$ multiplicada por uma constante c que está reproduzida abaixo:

$$\frac{d(cf(x))}{dx} = (cf(x))' = c\frac{df(x)}{dx} \tag{2.329}$$

Para extender esta regra para vetores é necessário incluir dois análogos. Ou a constante c é substituida por um vetor constante $\overrightarrow{c}$ ou a função $f(x)$, por $\overrightarrow{f}(x)$.

$$\frac{d(f(t)\overrightarrow{c})}{dt} = (f(t)\overrightarrow{c})' = \overrightarrow{c}\frac{df(t)}{dt} \tag{2.330}$$

Por exemplo, $((3,6)t + (1,2))' = ((1,2)(3t+1))' = (1,2)(3t+1)' = (1,2)3 = (3,6)$. O leitor pode conferir o resultado aplicando diretamente

2.326.

No caso acima há um produto escalar. A função $f(t)$ é o escalar. O caso particular $f(t) = t^n$ ilustra bem esta propriedade.

$$\frac{d(\overrightarrow{\alpha} t^n)}{dt} = \overrightarrow{\alpha}\frac{dt^n}{dt}$$

No capítulo anterior foi visto que $(\frac{dx^n}{dx}) = 1$. Assim:

$$\frac{d(\overrightarrow{\alpha} t^n)}{dt} = nt^{n-1}\overrightarrow{\alpha} \tag{2.331}$$

Por exemplo, $((2,5)t^2)' = 2t(2,5) = (4,10)t$. O leitor pode conferir o resultado acima usando a regra 2.328.

O outro análogo da relação 2.329 é dado por:

$$\frac{d(c\overrightarrow{f}(x))}{dx} = (c\overrightarrow{f}(x))' = c\frac{d\overrightarrow{f}(x)}{dx} \tag{2.332}$$

Por exemplo, $((2,4) + (8,-2)t)' = (2((1,2) + (4,-1)t))' = 2((1,2) + (4,-1)t)' = 2(4,-1)$. O estudante pode conferir o resultado acima pela regra 2.326.

Enfim a regra conhecida como regra da soma:

$$\frac{d\overrightarrow{f}(x)}{dx} + \frac{d\overrightarrow{g}(x)}{dx} = \frac{d(\overrightarrow{f}(x) + \overrightarrow{g}(x))}{dx} \tag{2.333}$$

Neste exemplo será usada a regra 2.333 com 2.331:

$$\frac{d((1,3)t^5 + (4,0)t^3)}{dt} = \frac{d((1,3)t^5)}{dt} + \frac{d((4,0)t^3)}{dt} = 5(1,3)t^4 + 3(4,0)t^2$$

Tomando os vetores constantes $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ e $\overrightarrow{\gamma}$, é possível deduzir a partir de 2.333 , 2.331 e 2.327 as regras 2.326 e 2.328. Para ilustrar isso será feita apenas a dedução de 2.328.

$$(\vec{\alpha}t^2 + \vec{\beta}t + \vec{\gamma})' = (\vec{\alpha}t^2)' + (\vec{\beta}t)' + (\vec{\gamma})'$$

$$(\vec{\alpha}t^2 + \vec{\beta}t + \vec{\gamma})' = 2\vec{\alpha}t + \vec{\beta} + \vec{\mathcal{O}}$$

$$(\vec{\alpha}t^2 + \vec{\beta}t + \vec{\gamma})' = 2\vec{\alpha}t + \vec{\beta}$$

Há inúmeras outras funções e regras de derivação vetoriais que não serão apresentadas neste capítulo. A medida que estas regras e funções se tornarem necessárias, elas serão apresentadas nos próximos capítulos.

2.14.5 Interpretação geométrica da derivada vetorial.

Para funções vetoriais não há um gráfico exibindo $\vec{f}(t)$ e nem $\vec{f}'(t)$. Mas o extremo do vetor $\vec{f}(t)$ deixa um "caminho" no plano xy. Há uma importante relação entre o vetor $\vec{f}'(t)$ e esse caminho.

Partindo da definição da derivada vetorial, o vetor $\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)$ pode ser representado com a origem em $\vec{f}(t)$ e o extremo em $\vec{f}(t+\Delta t)$. A medida que $\Delta t \to 0$, o vetor $\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)$ se aproxima da reta tangente à curva descrita por $\vec{f}(t)$ no plano xy. No entanto, quando $\Delta t \to 0$ o módulo de $\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)$ tende à 0. Mas como $\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)$ está dividido por Δt, o módulo da derivada $\vec{f}'(t)$ não vai a zero. Como resultado, o vetor $\vec{f}'(t)$ é tangente à curva descrita em xy.

2.15 Vetor posição como função do tempo.

Nesta seção a cinemática no plano será desenvolvida em analogia com a cinemática na reta. Os aspectos da cinemática vetorial explorados neste capítulo são fundamentais para a compreensão da Mecânica Clássica.

2.15.1 Tempo como parâmetro, posição como função.

No capítulo anterior foi explorado o movimento de um corpo pontual em uma reta espacial. Neste capítulo será explorado o movimento de um corpo pontual em um plano espacial.

Na cinemática da reta, a posição do corpo pontual é uma função do tempo $s = f(t)$. No plano a posição é um vetor $\overrightarrow{s}$. No plano espacial, a posição é uma função vetorial do tempo t.

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{f}(t)$$

A letra t é tanto usada para tempo como para o argumento de uma função vetorial qualquer.

A notação mais usada é:

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s}(t)$$

Analogamente ao movimento em uma dimensão, a função vetorial $\overrightarrow{s}(t)$ também é chamada de movimento.

Para ilustrar que a posição vetorial é função do tempo, mas o tempo não sempre é função da posição será usado um exemplo análogo ao movimento retilíneo. Assim como na reta, no plano espacial um corpo pode sair do ponto A para o ponto B e retornar para A. Observando apenas para o espaço, o corpo deslocou-se $\Delta\overrightarrow{s_{AB}}$ e depois $\Delta\overrightarrow{s_{BA}}$. O deslocamento total foi de $\Delta\overrightarrow{s_{AB}} + \Delta\overrightarrow{s_{BA}} = \Delta\overrightarrow{s_{AA}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Observando o tempo, o corpo saiu do instante t_A para t_B em Δt_{AB}. No entanto, mesmo que o corpo volte ao ponto A, o tempo não retornou para t_A. Assim o instante que o corpo voltou a A não pode ser indexado como t_A. Representando o instante de retorno à A como $t_C > t_A$, chega-se aos intervalos de tempo $\Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} = \Delta t_{AC} > 0$

porque $\Delta t_{AB} > 0$ e $\Delta t_{BC} > 0$. Em suma, $\overrightarrow{s_A}$ está associado a dois instantes dois instantes distintos t_A e t_C. Um corpo não pode ocupar dois lugares ao mesmo tempo, mas pode ocupar dois tempos em um mesmo lugar.

Os pares $(t, \overrightarrow{s}(t))$ que representam as trajetórias dos corpos ao longo do tempo não podem ser representadas em gráficos. Não há um plano cartesiano espaço-temporal. No entanto, a relação entre as coordenadas x e y da função $\overrightarrow{s}(t)$ fica representada no plano espacial xy. Assim, há um plano cartesiano espacial, mas não um gráfico da função.

O caminho percorrido por $\overrightarrow{s}(t)$ no plano xy é a própria trajetória do corpo pontual no plano espacial. É importante enfatizar que o plano espacial não é adimensional. Também é importante ressaltar que o argumento t não será adimensional, mas tem dimensão temporal. Além disso, asssim como no movimento retilíneo, o tempo passa a ser considerado somente após um tempo inicial $(t \geq 0)$.

O ponto material com coordenadas $(x(t), y(t))$ tem suas projeções nos eixos x e y. A medida que o corpo se move, suas projeções $x(t)$ e $y(t)$ se movem também. Os movimentos $x(t)$ e $y(t)$ são ambos movimentos retilíneos. Assim o movimento no plano pode ser entendido através de dois movimentos retilíneos. Esta "análise" do movimento no plano foi discutida no capítulo anterior. Agora fica claro ao estudante as vantagens de estudar em pormenores o movimento na reta. Por mais complicado que seja o movimento no plano, sua análise o reduz a dois movimentos retilíneos.

Abaixo há apenas dois exemplos de movimentos. Os nomes dos movimentos farão sentido ao longo do capítulo, mas o estudante já pode esperar as analogias com o movimento em uma dimensão:

- Movimento retilíneo uniforme (MRU) no plano é uma função vetorial linear do tempo $\vec{s}(t) = \vec{\alpha}t + \vec{\beta}$.

- Movimento uniformemente variado (MUV) é uma função quadrática do tempo $\vec{s}(t) = \vec{\alpha}t^2 + \vec{\beta}t + \vec{\gamma}$. É interessante notar que este movimento não é necessariamente retilíneo.

Assim como no movimento retilíneo, há um significado físico para as constantes acima. Estes significados serão explorados ao longo deste capítulo. As coordenadas das constantes vetoriais deverão ter unidades também.

2.15.2 Análise dimensional da função $\vec{s}(t)$

A análise dimensional do movimento no plano é análogo àquela da reta.

No MRU $\vec{s}(t) = \vec{\alpha}t + \vec{\beta}$, as constantes $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ não são adimensionais. A constante $\vec{\beta}$ tem a mesma dimensão de espaço. Já $\vec{\alpha}$ deve ter dimensão de espaço sobre tempo.

No MUV $\vec{s}(t) = \vec{\alpha}t^2 + \vec{\beta}t + \vec{\gamma}$. A constante $\vec{\gamma}$ tem dimensão de espaço, $\vec{\beta}$ tem dimensão de espaço sobre tempo e $\vec{\alpha}$ tem dimensão de espaço sobre tempo ao quadrado.

Assim como nos movimentos retilíneos, é comum que os livros didáticos omitam as unidades das constantes. Novamente, há algum sistema de unidades implícito. Se o sistema adotado é o SI, $\vec{\alpha}$ tem dimensão de m/s^2, $\vec{\beta}$ fica em m/s e $\vec{\gamma}$ está em m.

2.15.3 Posição inicial

O vetor posição de um corpo começa a ser medido no instante em que o cronômetro é ligado $t = 0$. Através das funções $\vec{s}(t)$ é possível saber qual a relação entre a posição inicial $\vec{s}(0) = \vec{s_0}$ e as constantes que definem o movimento.

No caso do MRU (2.15.1), $\overrightarrow{s}(0) = \overrightarrow{s_0} = \overrightarrow{\beta}$. Isso confirma que $\overrightarrow{\beta}$ tem dimensão de espaço e reforça a analogia com o MRU na reta. O MRU pode ser reescrito como:

$$\overrightarrow{s}(t) = \overrightarrow{\alpha}t + \overrightarrow{s_0} \tag{2.334}$$

Já para o MUV, $\overrightarrow{s}(0) = \overrightarrow{s_0} = \overrightarrow{\gamma}$. Também havia sido previsto que $\overrightarrow{\gamma}$ tem dimensão de espaço. O MRV 2.15.1 pode ser reescrito como:

$$\overrightarrow{s}(t) = \overrightarrow{\alpha}t^2 + \overrightarrow{\beta}t + \overrightarrow{s_0} \tag{2.335}$$

No sistema internacional de unidades, $\overrightarrow{s_0}$ é medido em metros (m).

2.15.4 Velocidade vetorial.

A velocidade média geralmente não é definida no estudo do movimento em uma dimensão. Os problemas que envolvem a velocidade média geralmente estão relacionados ao intervalo de tempo e ao consumo de energia. Ou seja, os problemas estão associados à trajetória do corpo e não apenas à suas posições inicial e final. Por exemplo, se um carro sai do ponto A e chega ao ponto B em linha reta, ele gasta menos combustível do que se o trajeto é circular. O vetor deslocamento constitui uma perda significativa de informação. Assim o que interessa na cinemática do plano é a velocidade vetorial instantânea. Esta velocidade será chamada simplesmente de "velocidade".

A velocidade vetorial é definida como a derivada da função posição vetorial. Partindo da definição 2.321:

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{s}'(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{s}(t + \Delta t) - \overrightarrow{s}(t)}{\Delta t} \tag{2.336}$$

Usando a notação 2.322.

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{s}'(t) = \frac{d\overrightarrow{s}(t)}{dt} \tag{2.337}$$

E usando a notação 2.323:

$$\overrightarrow{s}'(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right) = (v_x(t), v_y(t)) \tag{2.338}$$

onde $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ e $v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$.

A notação acima é extremamente interessante. Cada uma das projeções $x(t)$ e $y(t)$ têm suas próprias velocidades $v_x(t)$ e $v_y(t)$.

Através das regras de derivação, é possível calcular as velocidades em vários tipos de movimento. Para o MRU 2.15.1 aplica-se a regra 2.324:

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d(\overrightarrow{\alpha}t + \overrightarrow{s_0})}{dt} = \overrightarrow{\alpha}$$

Assim, a constante $\overrightarrow{\alpha}$ do MRU é a velocidade vetorial constante. Reescrevendo o MRU para $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{v}$ acima:

$$\overrightarrow{s}(t) = \overrightarrow{v}t + \overrightarrow{s_0}$$

[...]

Para o MRUV 2.335, a velocidade instantânea é dada pela regra 2.61:

$$v(t) = (\alpha t^2 + \beta t + s_0)' = 2\alpha t + \beta$$

Para o MRUV, a velocidade instântanea muda a cada instante. É interessante caracterizar a constante β. A velocidade instantânea inicial é $v(0) = \beta$. Assim $\beta = v_0$ é a velocidade inicial. Anteriormente a dimensão de β já ficara indicada como espaço sobre tempo. O MRUV fica redefinido como:

$$s(t) = \alpha t^2 + v_0 t + s_0 \tag{2.339}$$

e a velocidade do MRUV como:

$$v(t) = 2\alpha t + v_0 \tag{2.340}$$

Enfim, para o movimento de arraste 2.76, a velocidade é dada pelas regras 2.67, **??**, 2.329 e 2.69:

$$v(t) = (s_f - (s_f - s_0)e^{-\beta t})' = (s_f)' + (-(s_f - s_0)e^{-\beta t}))'$$

$$v(t) = 0 - (s_f - s_0)(e^{-\beta t})' = -(s_f - s_0)(-\beta)(e^{-\beta t})$$

$$v(t) = \beta(s_f - s_0)e^{-\beta t} \tag{2.341}$$

A velocidade inicial é dada por $v_0 = v(0) = \beta(s_f - s_0)$, então $\beta = \frac{v_0}{s_f - s_0}$. É interessante notar que a dimensão de β deveria ser de espaço sobre tempo. A divisão de velocidade (espaço sobre tempo) por um espaço tem dimensão de 1 sobre o tempo, o que confirma a previsão. Reescrevendo a posição 2.76 e a velocidade 2.341 com a definição de $\beta = \frac{v_0}{s_f - s_0}$:

$$s(t) = s_f - (s_f - s_0)e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.342}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.343}$$

É interessante ressaltar que no limite em que o tempo vai a infinito, a exponencial $e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}$ tende a 0. Assim, a velocidade no movimento de arraste tende a zero.

A definição $v(t) = s'(t)$ pode ser substituída no teorema fundamental do cálculo 2.71:

$$\int_{t_1}^{t_2} s'(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1) \tag{2.344}$$

Esta relação será analisada em casos posteriores. A principal utilidade desta expressão é identificar a variação de espaço $s(t_2) - s(t_1)$ a partir de gráficos de $v(t)$.

Os exemplos abaixo ilustram bem os cálculos de velocidade instântanea:

- Um MRU com função $s(t) = 4t + 3$ tem velocidade instantanea em qualquer instante de tempo de $v(t) = 4m/s$ de acordo com a relação 2.86.

- Um corpo arremessado para cima com velocidade de $40m/s$ tem as posições dadas pelo MRUV $s(t) = -5t^2 + 40$. De acordo com 2.339, a velocidade instantânea é de $v(t) = -10t + 40$. Acompanhando o movimento a cada $1s$, as posições e as velocidades até o retorno do corpo ao solo ficam:

$s(t)$	$v(t)$
$s(0) = 0$	$v(0) = 40m/s$
$s(1s) = 35m$	$v(1s) = 30m/s$
$s(2s) = 60m$	$v(2s) = 20m/s$
$s(3s) = 75m$	$v(3s) = 10m/s$
$s(4s) = 80m$	$v(4s) = 0$
$s(5s) = 75m$	$v(5s) = -10m/s$
$s(6s) = 60m$	$v(6s) = -20m/s$
$s(7s) = 35m$	$v(7s) = -30m/s$
$s(8s) = 0$	$v(8s) = -40m/s$

- Uma lancha que navega no mar tem MA dado por $s(t) = 20 - 10e^{-t}$. De acordo com a relação 2.343, a velocidade instantânea é de $v(t) = 10e^{-t}$. As posições e velocidades nos primeiros quatro segundos e em um tempo infinitamente longo são de:

$s(t)$	$v(t)$
$s(0) = 10m$	$v(0) = 10m/s$
$s(1s) = 16,32m$	$v(1s) = 3,68m/s$
$s(2s) = 18,65m$	$v(2s) = 1,35m/s$
$s(3s) = 19,50m$	$v(3s) = 0,50m/s$
$s(4s) = 19,82m$	$v(4s) = 0,18m/s$
$s(t \to \infty) = 20m$	$v(t \to \infty) = 0$

2.15.5 Aceleração.

A variação da velocidade apresenta propriedades físicas muito importantes. Estas propriedades serão vistas posteriormente. Por isso, é importante definir a derivada da velocidade. Esta derivada é chamada de aceleração. Usando a notação 2.322.

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

A dimensão da aceleração é de velocidade sobre tempo, ou equivalentemente, espaço sobre tempo ao quadrado. No SI a unidade de aceleração é m/s^2. A aceleração m/s^2 corresponde a um aumento de velocidade de $1m/s$ a cada $1s$, ou seja, $(m/s)/s = m/s^2$. Por exemplo, uma aceleração $10m/s^2$ corresponde a um aumento de velocidade de $10m/s$ a cada $1s$.

Outra unidade muito usada é o km/hs. Esta unidade corresponde a um aumento de $1km/h$ na velocidade a cada $1s$, ou seja, $(km/h)/s = km/hs$. Para converter esta aceleração em m/s^2 o procedimento é análogo ao que foi feito para conversão de velocidade.

$$\frac{km}{hs} = \frac{1.000m}{3600s^2} = \left(\frac{1}{3,6}\right)\frac{m}{s^2}$$

O fator de conversão de km/hs para m/s^2 é o mesmo de km/h para m/s
.

Usando as definições de derivada 2.48, 2.49 e 2.50, a aceleração pode ser definida como:

$$a(t) = v'(t) = lim_{t_m \to t}\frac{v(t_m) - v(t)}{t_m - t}$$

$$a(t) = v'(t) = lim_{\Delta t \to 0}\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$a(t) = v'(t) = lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

A aceleração de um MRU é dada pela regra **??** na derivada da velocidade 2.86:

$$a(t) = v'(t) = (v)' = 0 \tag{2.345}$$

Assim o MRU é caracterizado pela aceleração nula.

No caso do MRUV, a aceleração é dada pelas regra 2.58 na velocidade 2.340:

$$a(t) = \frac{d(2\alpha t + v_0)}{dt} = 2\alpha$$

onde o coeficiente linear acima é 2α, não α.

A aceleração no MRUV é constante. É por isso que ele é chamado de MRUV. Há uma variação uniforme na velocidade. Por ser uma função constante, $a(t)$ pode ser designada simplesmente por $a(t) = a$. Então $2\alpha = a$, logo $\alpha = \frac{a}{2}$. A previsão inicial de que a unidade de α era espaço sobre tempo ao quadrado fica confirmada. Substituindo $\alpha = \frac{a}{2}$ nas expressões de $s(t)$ 2.339 e $v(t)$ 2.340 chega-se a:

$$s(t) = \left(\frac{a}{2}\right) t^2 + v_0 t + s_0 \tag{2.346}$$

$$v(t) = at + v_0 \tag{2.347}$$

$$a(t) = a \tag{2.348}$$

Caso a aceleração seja nula ($a = 0$) as equações do MRUV reduzem-se ao MRU com $v_0 = v$. Assim o MRU pode ser considerado um caso particular de MRUV.

No caso do movimento de arraste, a aceleração é dada pelas regras 2.329 e 2.69 na velocidade 2.343:

$$a(t) = \frac{d(v_0 e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t})}{dx} = v_0 \frac{d(e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t})}{dx}$$

$$a(t) = v_0 \left(-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)\right) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}$$

$$a(t) = -\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.349}$$

Quando $a(t) > 0$ e $v(t) > 0$, a velocidade está aumentando porque $a(t)$ é a derivada de $v(t)$. Além disso, o módulo da velocidade $|v(t)|$ está aumentando. Já para $a(t) > 0$ e $v(t) < 0$, a velocidade está aumentando, mas o módulo está diminuindo porque o corpo está indo de uma velocidade negativa para o repouso. Analogamente, para $a(t) < 0$ e $v(t) > 0$, a velocidade está diminuindo e o módulo da velocidade também. Enfim, se $a(t) < 0$ e $v(t) < 0$, a velocidade está diminuindo, mas o módulo da velocidade aumenta. Movimentos onde o módulo da velocidade aumenta ou diminui são classificados respectivamente como acelerados ou retardados. Em resumo:

- Movimento acelerado $\frac{v(t)}{a(t)} > 0$
- Movimento retardado $\frac{v(t)}{a(t)} < 0$

Analogamente ao que foi feito com a velocidade, a definição $a(t) = v'(t)$ pode ser substituída no teorema fundamental do cálculo 2.71:

$$\int_{t_1}^{t_2} v'(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1) \tag{2.350}$$

Esta relação será analisada em casos posteriores. A principal utilidade desta expressão é identificar a variação de espaço $v(t_2) - v(t_1)$ a partir de gráficos de $a(t)$.

É interessante ilustrar alguns exemplos de aceleração instantânea:

- O movimento $s(t) = 118t + 345$ é um MRU, então de acordo com 2.345 a aceleração é $a(t) = 0$
- Um corpo lançado em queda livre de uma altura de $20m$ descreve um MRUV $s(t) = -5t^2 + 20$. De acordo com 2.348 a aceleração do corpo é constante $a(t) = -10m/s^2$.

- Usando o mesmo movimento de arraste da seção anterior ($s(t) = 20 - 10e^{-t}$ e $v(t) = 10e^{-t}$), a relação 2.349, a aceleração é de $a(t) = -10e^{-t}$. Comparando posição, velocidade e aceleração nos quatro primeiros segundos e em um tempo infinitamente longo:

$s(t)$	$v(t)$	$a(t)$
$s(0) = 10m$	$v(0) = 10m/s$	$a(0) = -10m/s^2$
$s(1s) = 16,32m$	$v(1s) = 3,68m/s$	$a(0) = -3,68m/s^2$
$s(2s) = 18,65m$	$v(2s) = 1,35m/s$	$a(0) = -1,35m/s^2$
$s(3s) = 19,50m$	$v(3s) = 0,50m/s$	$a(0) = -0,50m/s^2$
$s(4s) = 19,82m$	$v(4s) = 0,18m/s$	$a(0) = -0,18m/s^2$
$s(t \to \infty) = 20m$	$v(t \to \infty) = 0$	$a(t \to \infty) = 0$

2.15.6 Comentários sobre o movimento retilíneo uniforme.

O movimento retilíneo uniforme (MRU) pode ser reconhecido tanto pelas equações da posição, velocidade e aceleração como pelos gráficos correspondentes. Reescrevendo 2.81, 2.86 e 2.345:

$$s(t) = vt + s_0 \tag{2.351}$$

$$v(t) = v \tag{2.352}$$

$$a(t) = 0 \tag{2.353}$$

Se $v > 0$, o movimento é progressivo. Caso $v < 0$, o movimento é retrógrado. Enfim, se $v = 0$ o corpo está em repouso. Não se trata de um repouso instantâneo, mas permanente.

O instante que o corpo em MRU cruza a origem $s(t) = 0$ é dado pela raíz da função linear 2.33 com $\alpha = v$ e $\beta = s_0$.

$$t_{\mathcal{O}} = -\frac{s_0}{v} \tag{2.354}$$

onde $t_{\mathcal{O}}$ não é o instante inicial, mas àquele em que o corpo cruza a origem.

Como os instantes considerados na cinemática são sempre positivos, então $\frac{s_0}{v}$ deve ser negativo ou nulo. Assim há apenas quatro possibilidades:

- $s_0 > 0$ e $v < 0$: neste caso o corpo tem posição positiva e o movimento é retrógrado, de modo que o corpo cruzará a origem. Caso $s_0 > 0$ e $v > 0$ o corpo apenas se afasta da origem rumo a $+\infty$

- $s_0 < 0$ e $v > 0$: neste caso o corpo tem posição negativa e o movimento é progressivo, de modo que o corpo cruzará a origem. Caso $s_0 < 0$ e $v < 0$ o corpo apenas se afasta da origem rumo a $-\infty$

- $s_0 = 0$ e $v < 0$ ou $v > 0$: neste caso o corpo partiu da própria origem, cruzando-a no intante $t = 0$. O próprio resultado 2.354 confirma isso: $t_{\mathcal{O}} = 0$

- $s_0 = 0$ e $v = 0$: neste caso o corpo está em repouso na própria origem, em todos os instantes de tempo ($s(t) = 0$). A expressão 2.354 não pode ser aplicada porque redunda em indeterminação. Na descrição da função linear já havia sido previsto que uma função constante nula tem como raíz todo o eixo x.

Identificando o MRU pelos gráficos, a função $s(t)$ aparece como uma reta. O ponto em que a reta cruza o eixo s é o coeficiente linear. Logo, o ponto em que a reta cruza o eixo s é a posição inicial s_0. O coeficiente linear é a velocidade v. Se a inclinação da reta é positiva,o movimento é progressivo. Analogamente, se a inclinação da reta é negativa,o movimento é retrógrado. Enfim, se a reta é horizontal, há repouso.

[desenhar 3figuras: $v > 0$,$v < 0$ e $v = 0$]

As possibilidades do instante em que o corpo cruza a origem podem ser reinterpretadas geometricamente.

- $s_0 < 0$ e $v > 0$: neste caso a reta começa na parte positiva do eixo s, mas com a inclinação negativa, a reta encontra o eixo t no instante dado por 2.354. Caso $s_0 < 0$ e $v < 0$, a reta só poderá cruzar o eixo t na parte negativa deste eixo, o que está sendo excluído

- $s_0 > 0$ e $v < 0$: neste caso a reta começa na parte negativa do eixo s, mas com a inclinação positiva, a reta encontra o eixo t no instante dado por 2.354. Caso $s_0 > 0$ e $v > 0$, a reta só poderá cruzar o eixo t na parte negativa deste eixo, o que está sendo excluído

- $s_0 = 0$ e $v < 0$ ou $v > 0$: neste caso a reta cruza o próprio cruzamento dos eixos s e t. Assim o instante do cruzamento é o próprio $t = 0$.

- $s_0 = 0$ e $v = 0$: neste caso a reta do movimento coincide com o eixo t. Em todos os instantes de tempo o corpo está na posição s_0.

A função $v(t) = v$ do MRU é uma função constante. O gráfico de $v(t)$ é uma reta horizontal. Se o movimento é progressivo ($v > 0$), a reta horizontal fica acima do eixo t. Já se o movimento é retrógrado ($v < 0$), a reta horizontal fica abaixo do eixo t. Enfim, se o corpo está em repouso ($v = 0$), a reta do movimento coincide com o eixo t.

[desenhar gráficos de $v(t)$].

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

Caso o movimento seja progressivo, a superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente acima do eixo t. Assim a integral acima é positiva ($s(t_2) - s(t_1) > 0$) e consequentemente $s(t_2) > s(t_1)$. Inversamente, se o movimento é retrógrado, a reta fica abaixo do eixo t, a integral é negativa e $s(t_2) > s(t_1)$. Enfim, se $v = 0$, a reta concide com o eixo t, não tendo área abaixo e nem acima. Assim a integral é nula e $s(t_2) - s(t_1) = 0$, logo $s(t_2) = s(t_1)$.

Também é interessante calcular a integral 2.344 a partir de 2.81.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = vt_2 + s_0 - (s(t_1) + s_0)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = vt_2 + s_0 - vt_1 - s_0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = v(t_2 - t_1)$$

A fórmula acima confirma toda a interpretação do gráfico de $v(t)$.

Enfim $a(t) = 0$ é uma função constante. O gráfico de $a(t) = 0$ é uma reta que coincide com o eixo t. Geralmente este gráfico não costuma ser representado.

Eis dois exemplos de aplicação do MRU:

- Um home com paraquedas aberto cai em linha reta com velocidade constante a partir de uma altura de $200m$ com velocidade constante de aproximadamente $8m/s$. Em quanto tempo o homem atinge o solo?

Existem duas formas de resolver este problema. A primeira forma consiste em colocar a origem no solo e o sentido positivo para cima. Assim $s_0 = 200m$ e $v = -8m/s$ porque o corpo cai de cima para baixo. A equaçõa horária pode ser escrita como:

$$s(t) = -8t + 200$$

Como o solo é a origem da reta, o momento que o corpo atinge o solo é a raíz da função 2.354:

$$t = -\frac{s_0}{v_0} = -\frac{200}{(-8)} = 25$$

Resp.: $t = 25s$

A outra forma de resolver o problema consiste em colocar o sentido positivo da reta de cima para baixo e a origem do sistema, o local onde o corpo se encontra. Assim $s_0 = 0$ e $v = 8m/s$. A equação horária fica:

$$s(t) = 8t$$

A posição do solo fica $s(t) = 200m$. Assim é necessário encontrar o instante em que $s(t) = 200$.

$$200 = 8t \Rightarrow t = \frac{200}{8} = 25$$

O instante é o mesmo, como era de se esperar.

- Um carro sai do $km - 80$ de uma estrada com uma velocidade média de $72km/h$ e anda estrada à frente. Onde estará o carro após meia hora?

O carro não tem velocidade constante. No entanto, com as acelerações e desacelerações ao longo do tempo, o modelo para descrever movimento do carro pode ser o de uma velocidade constante. Além disso, a estrada não é necessariamente reta. Mas como o problema não envolve os típicos problemas de movimento curvo (como a aceleração centrípeta), a estrada será aproximada por uma reta. Não é conveniente colocar a origem da reta espacial no carro no momento de sua partida. O sistema de localização da estrada é feito através de placas fixadas na estrada. Colocar a origem da reta espacial $km - 80$ é um desperdício de informação espacial. Ao deixar a origem no $km - 0$, o carro poderá ser localizado através das placas da estrada. Com $s_0 = 80km$ e $v = 72km/h$, a equação horária do movimento em unidades de km e h é

$$s(t) = 72t + 80 \quad (km; h)$$

após meia hora o carro estará em

$$s(0,5) = 72(0,5) + 80 = 36 + 80 = 116$$

o carro se encontrará em $s(0,5h) = 116km$, ou na linguagem rodoviária, no $km - 116$.

O problema pode ser reescrito em SI. Convertendo $s_0 = 80km = 80.000m$ e $v = 72km/h = 20m/s$, a equação horária fica:

$$s(t) = 20t + 80.000$$

após meia hora ($t = 0,5h = 1.800s$) o carro estará em

$$s(0,5) = 20(1.800) + 80.000 = 36.000 + 80.000 = 116.000$$

o carro estará em $s(1.800s) = 116.000m$, o que coincide com a resposta em km.

2.15.7 Comentários sobre movimento retilíneo uniformemente variado.

O movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) pode ser reconhecido tanto pelas equações da posição, velocidade e aceleração como pelos gráficos correspondentes. Reescrevendo 2.346, 2.347 e 2.348:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0 \tag{2.355}$$

$$v(t) = at + v_0 \tag{2.356}$$

$$a(t) = a \tag{2.357}$$

Há uma relação importante entre a posição e a velocidade. Isolando o tempo em 2.356:

$$t = \frac{v(t) - v_0}{a}$$

Substituindo o tempo acima em 2.355:

$$s(t) = \frac{a}{2}\left(\frac{(v(t) - v_0)}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{(v(t) - v_0)}{a}\right) + s_0$$

$$s(t) = \frac{v^2(t) - 2v(t)v_0 + v_0^2}{2a} + \frac{(v_0 v(t) - v_0^2)}{a} + s_0$$

$$s(t) = \frac{v^2(t) - 2v(t)v_0 + v_0^2 + 2v_0 v(t) - 2v_0^2}{2a} + s_0$$

$$s(t) = \frac{v^2(t) - v_0^2}{2a} + s_0$$

Para cada instante de tempo t, há uma única posição $s(t)$ para cada $v(t)$. Assim a posição no MRUV é uma função da velocidade: $s = s(v)$. Reescrevendo a relação acima:

$$s(v) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} + s_0 = \left(\frac{1}{2a}\right) v^2 - \frac{v_0^2}{2a} + s_0 \tag{2.358}$$

A relação acima é denominada "relação de Torricceli" embora a forma acima não seja muito popular. Isolando v na relação acima (omitindo que s é função de v):

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) \tag{2.359}$$

esta é a forma mais comum da relação de Torricceli. É interessante notar que para cada s há duas velocidades $\pm v$ correspondentes, de modo que a velocidade não é função da posição. Em suma, para cada velocidade, há uma única posição, mas para uma posição podem haver duas velocidades. O significado físico desta relação é que no MRUV, o corpo poderá passar duas vezes pelo menos ponto s com velocidades opostas $\pm\sqrt{v_0^2 + 2a(s - s_0)}$.

Os gráficos de $s(t)$ será uma parábola, cuja a concavidade depende de a. Já o gráfico de $v(t)$ é uma reta cujo coeficiente linear é a velocidade inicial v_0 e o coeficiente angular é a. Enfim, o gráfico de $a(t)$ é uma reta horizontal na altura a. O gráfico de $s(v)$ é uma parábola cuja concavidade depende de $\frac{1}{2a}$.

[desenhar os gráficos descritos acima].

Um instante de muito interesse no MRUV é aquele em que o corpo está em repouso instantâneo. Conforme a relação 2.57 a derivada no vértice da função quadrática é nula. Como a derivada da posição é a velocidade, a velocidade no vértice é nula. Analisando o vértice da função quadrática,

$\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = v_0$ e $\gamma = s_0$. Assim o vértice das expressões 2.35 e 2.36 ficam respectivamente:

$$t_v = -\frac{v_0}{a} \tag{2.360}$$

$$s_v = s(-\frac{v_0}{a}) = -\frac{v_0^2}{2a} + s_0 \tag{2.361}$$

Como o tempo na cinemática só é considerado para $t > 0$, o vértice só será atingido se $t_v \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{v_0}{a}\right) \leq 0$. Assim o corpo só atingirá o vértice se o movimento começa retardado ou em repouso. O significado físico desta conclusão é interessante. O vértice do MRUV corresponde ao instante onde o corpo está em repouso. Se o movimento é retardado o corpo entrará em repouso. No caso do MRUV este repouso será apenas no único instante t_v. Se o corpo começa a partir do repouso ($v_0 = 0$),o instante em que o corpo está em repouso é o próprio $t = 0$ ($t_v = -\frac{0}{a} = 0$). Mas se o corpo começa acelerado, o módulo da velocidade só aumenta e o corpo não atinge o repouso.

O instante que o corpo em MRUV cruza a origem $s(t) = 0$ depende do valor das constantes da funções quadrática. Neste caso $\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = v_0$ e $\gamma = s_0$. De acordo com 2.4.3, 2.4.3 e 2.4.3 os instantes em que o corpo cruza a origem são:

- se $v_0^2 - 2as_0 > 0$, há duas raízes: $t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2as_0}}{2\alpha}$
- se $v_0^2 - 2as_0 = 0$, há uma única raíz que coincide com o vértice: $t = \frac{v_0}{2\alpha}$
- se $v_0^2 - 2as_0 < 0$, não há raízes reais

Como os instantes considerados na cinemática são sempre positivos, então há uma série de restrições em relação à t_0. As possibilidades são tantas que uma análise similar a que foi feita para o MRU não poderá ser feita. Assim, para ilustrar o MRUV serão usados alguns exemplos genéricos.

Movimento de saída de um corpo a partir do repouso.

A aceleração de um atleta na saída da corrida ou de um veículo automotor pode ser descrita por um MRUV nos primeiros instantes da arrancada. O corpo não poderá acelerar indefinidamente, o que torna a descrição do MRUV inadequada para longos intervalos de tempo. A posição inicial do corpo pontual é identificada com a origem da reta espacial ($s_0 = 0$). No instante zero o corpo ainda está em repouso, logo $v_0 = 0$. A aceleração é positiva $a > 0$. Substituindo estas relações em 2.355, 2.356, 2.357 e 2.358 em chega-se a:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 \tag{2.362}$$

$$v(t) = at \tag{2.363}$$

$$a(t) = a \tag{2.364}$$

$$s(v) = \frac{v^2}{2a} \tag{2.365}$$

Como o movimento é acelerado ($\frac{v_0}{a} > 0$) o corpo não entra em repouso. Observando as condições 2.15.7, 2.15.7 e 2.15.7, $v_0^2 - 2as_0 = 0 - 0 = 0$, o corpo cruza a origem uma única vez no instante $t_{\mathcal{O}} = \frac{-v_0}{a} = 0$. Assim o corpo só cruza a origem no instante extato de sua saída $t = 0$. O movimento pode ser visualizado através dos gráficos:

[desenhar os gráficos: $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ e $s(v)$]

Por exemplo, um carro hipotético é projetado para ter aceleração de $2m/s^2$. O físico poderá fazer três tipos de testes diferentes para a aceleração:

1. O primeiro teste consiste em acelerar o carro e comparar a distância que o carro andou com a velocidade fornecida pelo velocímetro. A relação entre velocidade e posição é 2.365. Se o carro tem aceleração de $2m/s^2$ a relação será $s(v) = \frac{v^2}{4}$. Por exemplo, quando a velocidade atingir $30m/s$, a posição do carro deverá ser $s = 225m$. A única coisa que o físico deverá ficar atento é que o velocímetro do carro indica a velocidade em km/h. Assim a velocidade que o físico deverá ver no velocímetro será $30m/s = 30 * 3,6km/h = 108km/h$.

2. O segundo teste consiste em observar o velocímetro e um cronômetro durante a aceleração do carro. A relação 2.363 indica que para $a = 2m/s^2$ vale $v(t) = 2t$. Novamente o físico deverá ficar atento à conversão de unidades entre km/h e m/s. Por exemplo, em $10s$, o carro deverá ter velocidade de $v(10s) = (2m/s^2)(10s) = 20m/s = 20 * 3,6km/h = 72km/h$.

3. O terceiro teste é adequado para um observador exter ao carro sem acesso ao velocímetro. Ele consiste em comparar a distância que o carro andou com o tempo registrado em um cronômetro. A relação 2.362 para $a = 2m/s^2$ fica $s(t) = t^2$. Por exemplo, após $5s$ o carro deverá estar na posição $s(5s) = 25m$.

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente acima do eixo t. Assim a integral é positiva $(s(t_2) - s(t_1) > 0)$ e consequentemente $s(t_2) > s(t_1)$. O movimento é progressivo. A superfície é um triângulo retângulo caso $t_1 = 0$, caso contrário ela é um paralelograma.

Também é interessante calcular a integral 2.344 a partir de 2.362.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \frac{a}{2}t_2^2 - \frac{a}{2}t_1^2$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \frac{a}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

A fórmula acima confirma toda a interpretação do gráfico de $v(t)$. Como $t_2 > t_1$, a integral é positiva. Se $t_1 = 0$ a integral é igual à área de um triângulo retângulo com catetos a e t_2. Já se $t_1 \neq 0$, a integral é a área de um paralelograma de bases t_1 e t_2 e altura a.

Tomando agora a integral 2.350:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente acima do eixo t. Assim a integral é positiva $(v(t_2) - v(t_1) > 0)$ e consequentemente $v(t_2) > v(t_1)$. O movimento é acelerado. A superfície é um retângulo.

Para calcular a integral 2.350 a partir de 2.363 basta.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = at_2 - at_1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = a\left(t_2 - t_1\right)$$

Como $t_2 > t_1$, a integral é positiva. A integral é igual à área de um retângulo com base $(t_2 - t_1)$ e altura a.

É importante frisar que o MRUV não poderá descrever este tipo de movimento infinitamente. Quando o tempo cresce infinitamente, as expressões 2.362 e 2.363 indicam posição e velocidade infinitas.

Freamento de um corpo.

Outra situação descrita pelo MRUV é o freamento de algum objeto sobre o solo através do atrito. Após entrar atingir o repouso, o corpo deixa de cumprir um MRUV, assumindo um repouso permanente. É por isso que descrição do MRUV é inadequada para descrever o freamento após a parada do corpo. A posição inicial do corpo pontual é identificada com a origem da reta espacial ($s_0 = 0$). No instante zero o corpo começa a frear e tem velocidade positiva $v_0 > 0$. A aceleração é negativa $a < 0$ porque para que o movimento seja retardado $\frac{v_0}{a} < 0$. Substituindo estas relações em 2.355, 2.356, 2.357 e 2.358 em chega-se a:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t \tag{2.366}$$

$$v(t) = at + v_0 \tag{2.367}$$

$$a(t) = a \tag{2.368}$$

$$s(v) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \tag{2.369}$$

Como o movimento é retardado ($\frac{v_0}{a} < 0$) o corpo entra em repouso, o que já era esperado de antemão. O instante t_f e a posição s_f em que o corpo entra em repouso são dados pelas relações 2.360 e 2.361. Como $s_0 = 0$ as relações ficam:

$$t_f = -\frac{v_0}{a} \tag{2.370}$$

$$s_f = -\frac{v_0^2}{2a} \tag{2.371}$$

O MRUV não poderá descrever o freamento para $t > t_f$ porque para além dele o corpo passa a descrever uma função constante $s(t) = s_f$. As próprias relações 2.366, 2.367 e 2.368 só tem validade para $0 < t < t_f$.

Observando as condições 2.15.7, 2.15.7 e 2.15.7, $v_0^2 - 2as_0 = v_0^2 > 0$, o corpo cruza a origem duas vezes nos instantes $t_{\mathcal{O}} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2}}{a} = \frac{-v_0 \pm |v_0|}{a} = \frac{-v_0 \pm v_0}{a}$. Assim o corpo cruza a origem nos instantes $t = 0$ (começo do freamento) e em $t = -\frac{2v_0}{a} > 0$ (porque $a < 0$). Este segundo instante será excluído porque $t = -\frac{2v_0}{a} > -\frac{2v_0}{a} = t_f$. O movimento pode ser visualizado através dos gráficos. É importante ressaltar que a parábola descrita por $s(t)$ é incompleta, começando na origem do plano e acabando no vértice. Isso se deve ao fato de que não se usa o MRUV para $t > t_f$. As curvas dos gráficos de $v(t)$ e $a(t)$ também são interrompidos.

[desenhar os gráficos: $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ e $s(v)$]

Por exemplo, dois freios hipotéticos devem frear um carro com um deslisamento máximo de $5m$ a uma velocidade de $54km/h$. Em outras palavras, após o motorista pisar no pedal o carro só poderá andar por $30m$. Um freio tem de modo que após pisar no pedal é projetado para ter aceleração de $-3m/s^2$. Um segundo freio deixa o carro em repouso em $3s$. Algum dos dois freios atenderá a exigência? Qual o freio mais eficiente?

1. O primeiro freio tem a informação da aceleração. A relação expressão que relaciona o deslizamento do carro e a aceleração é 2.371. O físico só deve se precaver em fazer as conversões de unidade. Usando $a = -3m/s^2$ e $v_0 = 54km/h = (54/3,6)m/s = 15m/s$ na relação 2.371 chega-se a $s = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{225}{(-6)} = 37,5$. Assim o veículo só entrará em repouso em $s = 37,5m$. O freio não passou no teste.

2. O segundo freio contêm informações do tempo de freagem. O tempo de freagem é $t_f = 3s$. Substituindo os dados em 2.370: $t_f = -\frac{v_0}{a} \Rightarrow a = -\frac{v_0}{t_f} = -\frac{15}{3} = -5$. Assim a aceleração de freamento é $a = -5m/s^2$. Usando este dado em 2.369: $s_f = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{225}{(-10)} = 22,5$. O segundo freio passou no teste porque o carro deslizou $s_f = 22,5m < 30m$ para frear

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

onde $t_2 < t_f$.

A superfície entre a reta $v(t)$ e o eixo t fica inteiramente acima do eixo t. Assim a integral é positiva $(s(t_2) - s(t_1) > 0)$ e consequentemente $s(t_2) > s(t_1)$. O movimento é progressivo. A superfície é um paralelogramo.

Tomando agora a integral 2.350:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente abaixo do eixo t porque $a < 0$. Assim a integral é negativa ($v(t_2) - v(t_1) < 0$) e consequentemente $v(t_2) < v(t_1)$. O movimento é retardado. A superfície é um retângulo abaixo do eixo t.

[desenhar gráficos de $v(t)$ e $a(t)$ com as integrais]

Queda livre.

O exemplo mais comum de MRUV é o movimento de um corpo após ser largado em repouso ou ser arremessado verticalmente. Este tipo de movimento é chamado de queda livre. As limitações do modelo de MRUV para descrever a queda livre são três.

1. Em primeiro lugar, o atrito com o ar complica bastante a descrição do movimento, alterando radicalmente $s(t)$. Por exemplo, o atrito com o ar faz com que uma pessoa de paraquedas caia em MRU.

2. Após atingir o solo, o corpo para de acelerar verticalmente para baixo e entra em repouso ou ricochoteia o solo.

3. Em grandes altitudes a aceleração da gravidade apresenta variações significaticas, excluindo por definição uma descrição do movimento com aceleração constante. A altitude onde a aprximação do MRUV é "boa" é da ordem de alguns quilômetros acima do solo.

Assim a aproximação de MRUV para queda livre é restrita para situações onde o atrito com o ar é desprezível, antes que o solo seja atingido e para as proximidades da crosta terrestre. A reta espacial é vertical com o sentido para cima como positivo. O ponto em que a reta espacial toca o solo é a origem da reta espacial $s_{\mathcal{O}} = 0$. A posição inicial do corpo pontual s_0 é identificada com a altura a partir do qual o corpo é arremessado. O corpo pode ser arremessado do solo ou acima dele, então $s_0 \geq 0$. O corpo pode ser arremessado para cima ($v_0 > 0$) ou para baixo ($v_0 < 0$), ou ainda largado a partir do repouso ($v_0 = 0$). A aceleração é negativa $a < 0$ porque o movimento seja retardado quando o corpo está subindo ($\frac{v}{a} < 0 \Rightarrow v > 0$) e acelerado quando está caindo ($\frac{v}{a} > 0 \Rightarrow v < 0$) . Para facilitar a interpretação da aceleração negativa, os físicos definem a aceleração de queda livre como $a = -g$ onde $g > 0$ é denominada "aceleração da gravidade". O valor da aceleração da gravidade é de aproximadamente $g \approx 9,8 m/s^2$. Para facilitar cálculos, os livros didáticos geralmente usam o valor $g = 10 m/s^2$. Substituindo estes valores em 2.355, 2.356, 2.357 e 2.358 em chega-se a:

$$s(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + s_0 \tag{2.372}$$

$$v(t) = -gt + v_0 \tag{2.373}$$

$$a(t) = -g \tag{2.374}$$

$$s(v) = -\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2g}\right) + s_0 \tag{2.375}$$

Se o corpo é arremessado para cima ($v_0 > 0$), o movimento é retardado ($\frac{v_0}{a} < 0$) o corpo entra em repouso. O instante t_{api} e a posição s_{api} em que o corpo entra em repouso são dados pelas relações 2.360 e 2.361:

$$t_{api} = -\frac{v_0}{a} \tag{2.376}$$

$$s_{api} = -\frac{v_0^2}{2a} + s_0 \tag{2.377}$$

A posição que o corpo entre em repouso s_{api} é a maior distância que o corpo atinge do solo. Assim s_{api} é a altura máxima que um corpo arremessado para cima atinge.

Caso o corpo seja largado em repouso ($v_0 = 0$) o instante de repouso é o próprio instante zero $t_{api} = 0$. A altura máxima será o próprio $s_{api} = s_0$.

Se o corpo é arremessado para baixo ($v_0 < 0$) o movimento é acelerado. O corpo não atingirá o repouso. A maior altura possível é s_0 mas o corpo não estará em repouso nesta posição.

Observando as condições 2.15.7, 2.15.7 e 2.15.7, $v_0^2 - 2as_0 = v_0^2 + 2gs_0 > 0$, o corpo cruza a origem duas vezes nos instantes $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 + 2gs_0}}{g}$. A análise merece ser dividida em duas situações especiais: $s_0 = 0$ e $s_0 > 0$.

Caso o corpo seja arremessado a partir do solo ($s_0 = 0$) para baixo ($v_0 < 0$) ou em repouso ($v_0 = 0$) o corpo não poderá cair livremente. Assim para um arremesso a partir do solo, necessariamente a velocidade inicial é positiva ($v_0 > 0$). Os instantes em que o corpo tocará o solo serão $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2}}{g}$, ou seja, $t_{\mathcal{O}} = 0$ (momento do arremesso) e $t = \frac{2v_0}{g} > 0$. Assimo corpo sai do solo em $t = 0$, atinge a altura máxima em $t_{api} = \frac{v_0}{g}$ e retorna ao solo em $t = \frac{2v_0}{g}$. O tempo que corpo leva para subir é igual ao de queda.

O movimento pode ser visualizado através dos gráficos:

[desenhar os gráficos: $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ e $s(v)$ p/ queda a partir de $s_0 = 0$].

Para $s_0 > 0$, os instantes em que o corpo tocariam o solo seriam $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2+2gs_0}}{g}$. No entanto, o corpo não tocará o solo no primeiro instante porque $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2+2gs_0}}{g} < 0$. No entanto o corpo atingirá o solo no segundo instante $t_{\mathcal{O}} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2+2gs_0}}{g} > 0$. Se $v_0 > 0$, o corpo sai do solo em $t = 0$, atinge a altura máxima em $t_{api} = \frac{v_0}{g}$ e retorna ao solo em $t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2+2gs_0}}{g}$. O tempo que corpo leva para subir é menor do que aquele de queda. Caso $v_0 \leq 0$, o corpo não subirá, mas também atingirá o solo em $t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2+2gs_0}}{g}$.

O intervalo de tempo não nulo que o corpo toca o solo será designado por t_q, tempo de queda.

$$t_q = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gs_0}}{g}$$

A expressão acima vale tanto para $s_0 > 0$ como para $s_0 = 0$.

O MRUV não poderá descrever a queda para $t > t_q$ porque para além dele o corpo passa a descrever uma função constante $s(t) = 0$. As próprias relações 2.372, 2.373 e 2.374 só tem validade para $0 < t < t_q$.

Caso um corpo esteja subindo, ele atingirá o ápice e retornará. Assim o corpo passará novamente pelas posições que ele subiu. De acordo com a relação de Torriccelli 2.375, se um corpo passou pela primeira vez no ponto com velocidade v, ele deverá passar pela segunda vez com uma velocidade de $\pm v$. Como o corpo está descendo, a velocidade será $-v$. Esta propriedade da queda dos corpos tem consequeências importantes que serão discutidas em outros capítulos.

Serão tomados 4 exemplos de queda de corpos. Em todos os exemplos a aceleração da gravidade foi aproximada para $g = 10m/s^2$.

1. O primeiro exemplo é o movimento da tabela 2.15.4. O corpo foi ar-

remessado a partir do solo com $v_0 = 40m/s$. O tempo de subida e o tempo de queda foram iguais ($4s$). Para uma mesma posição, a velocidade de subida e de descida tiveram sinais opostos.

2. O segundo exemplo é de um corpo arremessado para cima com velocidade inicial $v_0 = 20m/s$ a partir da altura $s_0 = 60m$. O movimento será dado pela equação $s(t) = -5t^2 + 20t + 60$. Fica ao estudante o exercício de construir uma tabela com intervalos de $1s$. Compare esta tabela com 2.15.4. Verifique a relação entre as posições e as velocidades. Verifique se é válida a relação 2.375.

3. O terceiro exemplo é de um corpo largado a partir do repouso de uma altura $s_0 = 80m$. O movimento será dado pela equação $s(t) = -5t^2 + 80$. Fica ao estudante o exercício de construir uma tabela com intervalos de $1s$. Compare esta tabela com 2.15.4.

4. O quarto exemplo é de um corpo lançado para baixo com $v = -10m/s$ a partir do repouso de uma altura $s_0 = 75m$. O movimento será dado pela equação $s(t) = -5t^2 + 75$. Fica ao estudante o exercício de construir uma tabela com intervalos de $1s$. Compare esta tabela com 2.15.4.

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

onde $t_2 < t_q$.

Se $v_0 > 0$, parte da superfície entre a reta $v(t)$ e o eixo t fica acima do eixo t, parte fica abaixo. Assim a integral pode ser positiva ou negativa. O movimento pode ser progressivo ou retrógrado. A superfície pode ser um trapézio, um triângulo retângulo ou dois triângulos retângulos (um abaixo e outro acima do eixo t).

Para $v_0 > 0$ há uma relação interessante. Se os intervalos de tempo forem simétricos em relação ao tempo do ápice $t_{api} = \frac{v_0}{g}$, a integral é zero. A superfície são dois triângulos retângulos de mesma área, um abaixo e outro acima do eixo t.

$$\int\limits_{t-t_{api}}^{t+t_{api}} v(t)dt = 0 = s(t_2) - s(t_1) \Rightarrow s(t_1) = s(t_2)$$

Assim, no intervalo de tempo $[t - t_{api}, t + t_{api}]$ o corpo subiu e desceu para o mesmo lugar, fazendo com que $s(t_1) = s(t_2)$.

Se $v_0 \leq 0$, a superfície entre a reta $v(t)$ e o eixo t fica abaixo do eixo t. Assim a integral é negativa. O movimento pode é retrógrado porque $s(t_2) - s(t_1) \leq 0 \Rightarrow s(t_2) < s(t_1)$. A superfície pode ser um trapézio ou um triângulo retângulo, ambos abaixo do eixo t.

Tomando agora a integral 2.350:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente abaixo do eixo t porque $a < 0$. Assim a integral é negativa ($v(t_2) - v(t_1) < 0$) e consequentemente $v(t_2) < v(t_1)$. O movimento é retardado. A superfície é um retângulo abaixo do eixo t.

[desenhar gráficos de $v(t)$ e $a(t)$ com as integrais]

2.16 Comentários sobre movimento de arraste.

O movimento de arraste (MA) é muito específico. Ele descreve o movimento de objetos que bóiam em um líquido e tem uma velocidade v_0. O atrito do líquido com o corpo que bóia não é descrito pelo MRUV, mas pelo MA. Para simplificar a análise do MA, a velocidade inicial, e as posições inicial e final são consideredas positivas ($v_0 \geq 0$, $s_0 \geq 0$ e $s_f \geq 0$). Reescrevendo as equações do MA 2.342, 2.343 e 2.349.

$$s(t) = s_f - (s_f - s_0)e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.378}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.379}$$

$$a(t) = -\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \tag{2.380}$$

Há uma relação importante entre a velocidade e a aceleração. Dividindo a aceleração 2.380 pela velocidade 2.379:

$$\frac{v(t)}{a(t)} = -\frac{v_0 e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}}{\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t}} = -\frac{v_0}{\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right)}$$

$$\frac{v(t)}{a(t)} = -\frac{(s_f - s_0)}{v_0} \tag{2.381}$$

Para cada instante de tempo t, há uma única posição $v(t)$ para cada $a(t)$ e vice-versa. Assim a velocidade no MA é uma função da aceleração ($v = v(a)$) e vice-versa ($a = a(v)$). A relação pode ser expressa de duas formas:

$$v(a) = -\frac{(s_f - s_0)}{v_0} a$$

ou

$$a(v) = -\frac{v_0}{(s_f - s_0)} v$$

As funções $v(a)$ e $a(v)$ são extremamente simples. Elas são retas que passam pela origem.

Se $v_0 > 0$ então o movimento começou progressivo. Desta forma a posição final é maior do que a inicial ($s_f > s_0$, logo $s_f > 0$). Então:

$$\beta = \frac{v_0}{(s_f - s_0)} > 0$$

esta conclusão é coerente com $\beta > 0$ imposto em seções anteriores. A consequência da desigualdade acima é que na relação 2.381:

$$\frac{v}{a} = -\frac{(s_f - s_0)}{v_0} < 0$$

Assim o movimento de arraste é sempre retardado.

O instante que o corpo intercepta a origem do sistema $s(t) = 0$ é dado pela relação 2.378:

$$0 = s_f - (s_f - s_0) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right) t}$$

$$s_f = (s_f - s_0) e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right) t}$$

$$\frac{s_f}{(s_f - s_0)} = e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right) t}$$

A exponencial $e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right) t} \leq 1$ sendo o $e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right) t} = 1$ apenas para $t = 0$. Para que $\frac{s_f}{(s_f - s_0)} \leq 1$, é necessário que $s_f \leq s_f - s_0 \Rightarrow s_0 \leq 0$. Como foi proposto que $s_0 \geq 0$, a única possibilidade do corpo cruzar a origem no MA é $s_0 = 0$, ou seja, o corpo sai da origem. O único instante em que a posição é nula é $t = 0$. Os gráficos à seguir ilustram bem esta situação.

[desenhar gráficos do MA $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$].

Como a exponencial envolvida nas relações 2.378, 2.379 e 2.380 fica no intervalo $0 \leq e^{-\left(\frac{v_0}{s_f - s_0}\right)t} \leq 1$ (lembrando que a função é descrescente), as três função ficam restritas aos intervalos:

$$s_0 \leq s(t) < s_f$$

$$0 < v(t) \leq v_0$$

$$-\left(\frac{v_0^2}{s_f - s_0}\right) \leq a(t) < 0$$

O corpo sai de s_0 e se aproxima infinitamente de s_f. A velocidade começa com v_0 e cai infinitamente, aproximando-se infinitamente do zero. A aceleração (negativa) aproxima-se do zero. Na prática, um velocímetro registraria a velocidade nula após a velocidade do corpo ficar abaixo da precisão do aparelho.

O único exemplo de MA apresentado é aquele da tabela 2.15.4.

A relação 2.344 é interessante para analisar o gráfico de $v(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

A superfície entre a reta $v(t)$ e o eixo t fica acima do eixo t. Assim a integral é positiva. O movimento é progressivo porque $s(t_2) - s(t_1) > 0 \Rightarrow s(t_2) > s(t_1)$.

Tomando agora a integral 2.350:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

A superfície entre a reta e o eixo t fica inteiramente abaixo do eixo t porque $a(t) < 0$. Assim a integral é negativa ($v(t_2) - v(t_1) < 0$) e consequentemente $v(t_2) < v(t_1)$. O movimento é retardado.

[desenhar gráficos de $v(t)$ e $a(t)$ com as integrais].

Movimento tridimensional

(movimento geral, translação + rotação) De modo geral, o movimento é descrito em todo o espaço. O espaço tem três dimensões e a posição é um vetor, $\vec{x} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, com diferentes formas de se escrever a mesma entidade, seja por uma tripla de números, seja por uma combinação de três vetores mutuamente ortogonais. Neste caso, o que nos interessa é que cada componente corresponde a um movimento independente, ou seja, o movimento em três dimensões pode ser escrito como a combinação de três movimentos unidimensionais.

É claro que com esta descrição temos uma situação não apenas mais geral mas também extremamente complexa, já que podemos, agora, ter conjuntos mais complexos de movimentos e de forças. Em primeiro lugar, a força continua a levar ao movimento, como se vê pela lei de Newton. No entanto, temos situações em que, no espaço, temos corpos com extensão, e a força pode ser aplicada em pontos diferentes de um corpo, como por exemplo no caso em que temos uma bola e a chutamos. Se chutarmos a bola pelo seu centro ela vai fazer uma certo movimento no ar, um trecho de uma parábola. Mas sabemos que se a chutarmos com o pé se chocando contra o lado da mesma, ela vai, além de se movimentar no ar, girar. Poderá ainda se deformar. Sua deformação, juntamente com o movimento de rotação vai turbilhonar o ar à sua volta. Jogadores de futebol são exímios nesta arte, e são capazes de combinar estas forças magistralmente, em combinações complexas, com bolas que fazem curvas no ar. O movimento é extremamente complexo e difícil de descrever em detalhes, mas os esportistas, seja no futebol, seja no volei, dominam estes movimentos e forças de modo intuitivo, mas geralmente com resultados melhores que os cálculos dos físicos.

Outros movimentos tridimensionais são complexos e interessantes, como por exemplo o movimento de um pião. Este podemos estudar em detalhes dentro da mecânica. Como seria o movimento em mais dimensões?

Agora que já conhecemos os tipos de abordagens na descrição do movimento dediquemos mais alguma atenção a outras características do movimento que nos serão úteis futuramente.

Temos essencialmente dois tipos de movimentos: (translações e rotações) O movimento de um objeto pode sempre ser descrito, de maneira bem geral através de uma composição de translações e rotações.

2.16.1 Dinâmica

1. Força

 2. Leis de Newton,

 3. Trabalho, energia mecânica,

 4. Torque, momento angular, momento de inércia.

 Aplicações

2.16.2 Leis de conservação

1. Conservação do momento linear,

2. Conservação da energia,

3. Conservação do momento angular.

Aplicações

Colisões em uma e duas dimensões.

Conceitos fundamentais: sistema físico, isolado e não isolado, estado inicial, intermediário e final.

A física, como conceituação moderna, inicia-se com a descrição do movimento de um ponto. A escolha do ponto advém de sua simplicidade, já que neste caso não há necessidade de se discutir e estudar as relações entre as posições de um corpo rígido e seus vínculos (as posições relativas fixas de seus constituintes) ou de um líquido. Um ponto é completamente descrito por sua posição no espaço, que, em geral, muda com o tempo. Assim, necessitamos da função $\vec{x}(t)$.

Outros conceitos correlatos são úteis. Como $\vec{x}(t)$ é uma função do tempo, sua mudança tem um significado. Quanto mais rápida a mudança, mais rápido o movimento. Portanto será fisicamente útil falarmos da velocidade do ponto, ou seja, o quanto varia a posição com o passar do tempo. Em um pequeno intervalo de tempo δt a função deve mudar, digamos, $\delta x \equiv \delta\vec{x}(t) = \vec{x}(t+\delta t) - \vec{x}(t)$. Mas será difícil levarmos em conta estas quantidades, que dependem do tempo pequeno δt, que não é muito fácil de se caracterizar. Consideremos mudanças de posição que se dêem de forma suave. As funções da física, em geral, assim o são, suas mudanção são suaves. Caracterizamos tal mudança de posição como sendo a velocidade,

$$\vec{v}(t) = \frac{\delta\vec{x}}{\delta t} \quad . \tag{2.382}$$

A definição acima ainda é um pouco ruim, pois depende do tamanho do intervalo de tempo δt. O que se faz é tomar esta intervalo o menor possível. Em matemática isto é o processo de limite, e definimos

$$\vec{v}(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\vec{x}}{\delta t} \quad . \tag{2.383}$$

Tal definição, além de útil, nos dá uma nova função de relevância física, a velocidade, ou seja, a rapidez com que um corpo muda de posição. Na física aristotélica a velocidade natural do corpo seria nula, ou seja, um corpo deve parar em seu chamado local natural. Sabemos que isto não é correto, um erro que decorre do fato de não se utilizar o método científico. Neste caso, a observação de carroças e animais tem uma complexidade muito grande, com um enorme número de variáveis que concorrem para a determinação do movimento. Em seus diálogos, Galileu utilizou o mais simples dos movimentos, o movimento planetário. Analisemos as mudanças de conceito contidas nesta problemática.

Além da velocidade, podemos introduzir, outro conceito de importância, a mudança da velocidade, que chamamos de aceleração,

$$\vec{a}(t) = \frac{\delta\vec{v}}{\delta t} \quad , \tag{2.384}$$

Onde $\delta\vec{v} = \vec{v}(t+\delta t) - \vec{v}(t)$. Não há necessidade de mais definições análogas. Esta é uma questão mais profunda, e está ligada ao fato de que, dada a posição inicial de um ponto e sua velocidade, a dinâmica se encarrega de definir completamente seu movimento. Isto está relacionado com as lei de Newton, que passaremos a tratar.

2.17 Leis de Newton.

As Leis de Newton foram geradas pela necessidade de se compreender o movimento clássico dos corpos. A questão que se coloca é: porque os corpos se movem? Como eles se movem?

Segundo Aristóteles, os corpos tendem a parar, sendo necessária alguma causa para que eles permaneçam em movimento. No entanto, uma visão dos céus nos mostra que os astros se movimentam eternamente. Uma pedra movimenta-se continuamente desde que não colida. Estas são questões que de fato nos remetem ao grande predecessor de Newton, Galileo Galilei.

Galileo nos trouxe os conceitos limpos utilizados na dinâmica.

A força, segundo Newton, é, em termos modernos, o que gera o movimento, através da variação da velocidade, e com uma inércia, ou resistência ao movimento, que caracteriza cada corpo. Assim, Newton escreveu:

$$\vec{F}((\vec{x},t) = m\vec{a}(t) \tag{2.385}$$

o que significa que a força, do lado esquerdo, move o corpo, caracterizado pela inércia m, produzindo uma aceleração $\vec{a}$. Notemos que a forças ainda não foi caracterizada, sendo, no momento, simplesmente uma função misteriosa do espaço e do tempo. Não a sabemos caracterizar de modo tão geral, pois este é um problema primordial das leis da natureza, ou seja, devemos caracterizar uma força como uma certa lei da natureza. Newton o fez par um movimento que, de um certo ponto de vista é extremamente complexo, mas de outro é dos mais simples, e a genialidade de Newton est também em escolher este movimento para tal caracterização. É o movimento planetário.

De fato, este era um problema não resolvido desde a antiguidade, e ninguém sabia fazê-lo em termos simples. Havia uma descrição fenomenológica da questão através das leis de Kepler, mas um princípio fundamental não existia. A proposição de Newton foi que esta força, no caso do movimento planetário, fosse uma força fundamental da natureza, portanto uma força simples e a postulou como a lei da gravitação universal, onde a força entre dois corpos de massas m_1 e m_2, nas posições respectivas $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ fosse simplesmente proporcional às respectivas massas e inversamente proporcional ao inverso do quadrado da distância entre os corpos. Para isto, introduziu uma constante fundamental, G, que hoje chamamos de constante de Newton da gravitação, ou simplesmente constante de Newton.

$$\vec{F}(\vec{x}) = G\frac{m_1 m_2 \vec{x}}{|x|^3} \quad , \tag{2.386}$$

onde $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$. Implícito nesta lei, mas como parte das leis que regem a força, Newton postulou que a força obedece à lei de ação e reação, ou seja, a força de uma corpo sobre outro, e sua reação do segundo corpo sobre o primeiro, são iguais e de sentido contrário.

Momento Linear e sua conservação, aplicações.

A equação de Newton pode ser escrita como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{2.387}$$

onde $\vec{p} = m\vec{v}$. No caso da massa ser constante, esta é exatamente a equação de Newton. Se a houver perda ou ganho de massa, como em um foguete, ou levando-se em conta a queima do combutsível levado por um veículo qualquer, podemos levar em conta este fato considerando o sistema como uma massa $m + \delta m$, com velocidade $\vec{v} + \delta\vec{v}$, passando a m e $\vec{v}$. Considerando que a força age, depois deixa de agir por um breve tempo enquanto o sistema se transforma, temos que, como só agem forças internas, $\delta m\vec{v} + m\delta\vec{v} = 0$. Portanto vale a lei de Newton em sua forma mais geral.

No entanto, podemos ver a equação acima como uma lei mais fundamental. De fato, uma formulação mais geral das leis da mecânica nos diz que a quantidade de movimento está associada a uma simetria por translação no espaço, portanto só uma força externa poderá mudar o estado de movimento, caracterizado por $\vec{p} = m\vec{v}$.

A conservação de uma grandeza tem implicações enormes, pois isto facilita-nos na medida em que ao invés de termos uma equação diferencial, como a lei de Newton, passamos a ter uma igualdade simples, no caso o momento inicial igual ao final. Isto equivale, em termos mais simples, à solução da equação diferencial. No caso de duas bolas que se chocam, isto fica muito claro, pois em um choque é difícil saber com exatidão quais são as forças que agem no problema. Tomemos o exemplo de duas bolas de bilhar, o exemplo mais simples[3] A força entre as duas bolas de bilhar é complicada. Afinal, ela depende da constituição das bolas (mais duras, mais elásticas, depende da pintura, etc). No entanto, se supusermos, de acordo com a lei de Newton, que o momento se conserva, temos que, se as massas forem m_1 e m_2 e as velocidades iniciais $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e finais $\vec{v}_1'$ e $\vec{v}_2'$, teremos a equação

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \tag{2.388}$$

que independe da força entre as bolas, portanto independe da constituição das bolas. Metade do problema, de fato uma metade dificílima se considerarmos que em princípio teríamos que saber como as bolas interagem, foi resolvida. Ainda falta algo, e isto saberemos um pouco mais adiante.

[3]Este exemplo repete-se na física sob outras formas, como por exemplo no espalhamento (choque) de duas partículas elementares, como dois protons, ou dois elétrons.

No momento, o que temos a concluir é a

- Lei de conservação do momento: na ausência de forças externas, o momento total de um conjunto de pontos materiais definido pela expressão $\vec{p} = \sum_{\text{constituintes}} m_i \vec{v}_i$ se conserva, qualquer que seja a interação entre os constituintes, que têm massa m_i e velocidade $\vec{v}_i$.

Conservação da Energia

História dos conceitos de energia e momento.

Energia: um bom começo (história, etc) é energy Wikipédia. A transcrição do livro do Feynman é bem conhecida e quase histórica, e deve ser colocada.

O fato da energia de um sistema se conservar é uma lei física que transcende aspectos da mecânica newtoniana. Há vários aspectos desta questão que sempre aportam no mesmo resultado.

Colisão elástica e inelástica: energia cinética e sua conservação. Experimentos e aplicações. Energia potencial e interações independentes do tempo. Conservação da energia mecânica, aplicações. Energia interna e conservação da energia total. Princípios de conservação e leis de Newton: trabalho, potência e impulso.

Problemas concretos e aplicações elementares: Análise de fenômenos físicos - aproximações necessárias e/ou convenientes. Sistema massa-mola. Pêndulo simples. Interações centrais e conservação do momento angular. Torque e momento angular. Experimentos e aplicações

Capítulo 3

Mecânica dos Corpos Rígidos e dos Fluidos

Sistemas de muitos corpos; centro de massa, princípios de conservação.

Vimos que em um sistema de muitos corpos podemos calcular o momento total através da soma dos momentos dos constituintes, assim como a energia, que é a soma das energias dos constituintes. Há, no entanto, e de fato, felizmente, mais uma lei de conservação muito importante. Ela está associada à simetria de rotação, ou seja, qualquer direção tem a mesma qualidade, de modo que, se olharmos em direções diferentes, o resultado será o mesmo. Do ponto de vista da mecânica, consideremos a expressão

$$\vec{L} = \sum_i \vec{x}_i \wedge \vec{p}_i \quad . \tag{3.1}$$

Podemos depreender alguns pontos importantes. A derivada no tempo de $\vec{L}$, que chamamos de momento angular, é facilmente calculada e tem dois termos importantes,

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_i \dot{\vec{x}}_i \wedge \vec{p}_i + \sum_i \vec{x}_i \wedge \dot{\vec{p}}_i \quad . \tag{3.2}$$

O primeiro termo envolve o produto vetorial da velocidade pelo momento. Como são proporcionais, este termo se anula identicamente. O outro termo envolve a força que age sobre o i-ésimo ponto material, $\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$. Temos portanto

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_i \vec{x}_i \wedge \vec{F}_i \quad . \tag{3.3}$$

Cada um destes termos tem uma interpretação física simples. O produto vetorial da posição pela força é um vetor, perpendicular à força e à posição, cujo módulo é igual à distância da linha da força à origem, pela força. Assim, este termo é tanto maior quanto maior a distância ao ponto em que a força é aplicada. Notemos que este fato nos dá o princípio da alavanca de Arquimedes deduzido a partir da lei de Newton: este termo, a que damos o nome de torque, nos dá a variação de uma grandeza que mede o giro do objeto. No caso estático temos exatamente os termos da alavanca de Arquimedes: quanto maior a distância, menor a força, para termos o mesmo efeito. Vejamos como relacionar o momento angular $\vec{L}$ com a rotação do corpo.

Suponhamos neste momento que estejamos estudando um corpo rígido em movimento. Casos típicos seriam o movimento de uma roda, de um carro, ou, um caso mais complexo, de um pião. Nestes casos não se pode dizer que estejamos considerando um ponto material em movimento. Em alguns dos casos, o movimento interno é importante, e o movimento total irrelevante, como no caso do pião. Outras vezes, são ambos importantes. Para quem está dentro do carro, por exemplo, temos que não apenas nos preocupar com a locomoção, mas com a estabilidade, ou seja, não queremos que o carro capote. Devemos nos preocupar sobre como descrever tais movimentos, tão essenciais na vida real.

Tomemos um conjunto de pontos ligados rigidamente, de modo a formarem um corpo material rígido. Corpos não rígidos podem ser muito importantes, como no movimento do próprio corpo de uma pessoa, ou como no movimento de fluidos. Neste momento não vamos nos preocupar com estes casos, e suporemos que o corpo seja relamente rígido.

O conjunto de pontos pode ser descrito como um conjunto de pontos materiais muito pequenos, ligados entre si por barras bem leves (de massa zero; podemos considerar os corpos pequenos como as moléculas, e as barras seriam as forças elétricas, mas não precisamos nos preocupar com estes detalhes, que fazem parte da descrição microscópica do corpo). Os elementos serão as posições $\vec{x}_i$ e as respectivas massas m_i. A equação de Newton será

$$\vec{F}(\vec{x}_i) = m_i \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} \tag{3.4}$$

Se somarmos todas as forças que agem sobre o corpo, teremos a força total, $\vec{F} = \sum_i \vec{F}(\vec{x}_i)$, e sua ação será

$$\vec{F} = \sum_i m_i \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} \quad . \tag{3.5}$$

Definamos a massa total, de todas as pequenas massas, como a massa total do corpo, o que tem um significado físico simples, ou seja, a massa total é a soma das massas constituintes, $M = \sum_i m_i$ e teremos

$$\vec{F} = M \sum_i \frac{m_i}{M} \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} = M \frac{d^2\vec{X}_{CM}}{dt^2} \quad , \tag{3.6}$$

onde definimos

$$\vec{X}_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{x}_i}{M} \tag{3.7}$$

chamada de posição do Centro de Massa. Seu significado físico é muito claro: Se considerarmos a força total, ela age sobre o corpo como se este fosse um ponto material submetido a uma força externa, obedecendo à equação de Newton, de tal forma que a posição do corpo deve estar concentrada exatamente sobre o ponto definido acima, o centro de massa. É claro que este não é o fim do problema, pois o corpo pode ter outro movimento extremamente complexo, ele pode girar. No entanto, resolvemos uma grande parte do problema, que é a translação do corpo como um todo. No entanto, falta o resto, e já vimos que este resto pode ser tão ou mais importante que o movimento acima. Um exemplo muito claro é do movimento planetário. Tomemos um Sol com um planeta[1]. O centro de massa destes dois corpos se move livremente, pois não há forças exernas, e as forças internas na soma total se anula pela lei de ação e reação. O que sobra é o movimento planetário. Veremos sob que condições.

Para separar os movimentos, pela experiência que já adquirimos, definimos uma posição interna relativa ao centro de massa, ou seja,

$$\vec{r}_i = \vec{x}_i - \vec{X} \quad . \tag{3.8}$$

As posições relativas $\vec{r}_i$ não mudam em valor absoluto em um corpo rígido, mas podem girar. Para exemplificar a questão, faremos um caso simples, geral o suficiente, de dois pontos, sem o vínculo de rigidez, de modo a demonstrar também quão geral é o procedimento.

O Problema de dois Corpos

Suponhamos que temos dois corpos, m_1 e m_2, com uma força interna entre eles $\vec{f}_{12}$. Já vimos que o centro de massa, neste caso $\vec{X}_{CM} = \frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2}{m_1+m_2}$.

[1]Este não é um corpo rígido, mas isto não importa para esta separação, que pode sempre ser feita, entre centro de massa e restante do movimento.

Temos também,

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{x}_1 - \vec{X}_{CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\\ \vec{r}_2 &= \vec{x}_2 - \vec{X}_{CM} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\end{aligned}$$

Note que $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$. O centro de massa, na ausência de forças externa, movimenta-se livremente, ou seja, em movimento retilíneo e uniforme. Assim, melhor trabalharmos com apenas uma das posições, já que não são independentes. De fato, fica como exercício mostrar que, em vista da definição de centro de massa, $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$. Escolhamos a variável diferença, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$. Podemos mostrar também que $m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2 = 2\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.

A equação de Newton fica sendo

$$\vec{f}_{12} = m_1\frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} \tag{3.9}$$

$$\vec{f}_{12} = -m_2\frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} \tag{3.10}$$

Substituimos agora $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ por $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, e somamos as equações acima, temos

$$\vec{f}_{12} = \frac{1}{2}\frac{d^2(m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2)}{dt^2} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{3.11}$$

onde definimos a massa reduzida $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$. Assim, o problema se reduz, de um problema de dois corpos, a um problema de apenas um corpo! Se um dos corpos for muito maior que o outro, por exemplo, $m_1 \gg m_2$, então o centro de massa será $\vec{X}_{CM} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1+m_2} \approx \vec{x}_1$, ou seja, o centro de massa coincide com o corpo mais pesado, que fica parado. Isto é claro, pois ele tem uma inércia muito maior. Neste caso, $\vec{r} \approx \vec{x}_2$. É como o problema do movimento dos planetas pequenos em relação ao Sol, que é muito maior: uma boa aproximação se consegue pensando-se que o Sol fica parado no centro do sistema solar.

Por outro lado, se tomarmos o outro limite, qual seja, $m_1 = m_2 \equiv m$, a massa reduzida fica sendo $\mu = \frac{1}{2}m$, ou seja, a inércia fica reduzida à metade.

O Corpo Rígido

Tomemos agora o caso do corpo rígido. Devemos sempre conversar com as equações. Neste caso, devemos dar às equações a informação sobre a rigidez do corpo. A translação do corpo pouco nos interessa, já que esta informação está codificada no movimento do centro de massa. O outro movimento está associado à rotação do corpo. De fato, o corpo como um todo tem uma rotação comum a todos os pontos. Isto implica em uma relação entre as velocidades de cada ponto do corpo. Suponhamos que o corpo tenha uma velocidade de rotação, ou velocidade angular, que denominamos ω, o ângulo por unidade de tempo, ou velocidade angular. Como a rotação se faz em torno de um eixo, diremos que a velocidade angular é um vetor, cuja direção é dada pelo eixo em torno do qual o objeto gira. O sentido é, de fato, arbitrário, e será definido por convenção. A convenção será definida pela seguinte regra. Tomemos nossa mão direita, e suponhamos que ao girar, nossos quatro dedos, excetuando-se o polegar, estejam na direção do movimento do corpo. Então o polegar indicará a direção do vetor velocidade angular. Isto define o vetor $\vec{\omega}$.

Para definir a relação precisa entre este vetor e a velocidade de cada ponto, devemos conversar um pouco mais com as equações. Se um corpo gira em torno de um eixo, um ponto i a uma distância d_i do eixo tem uma velocidade ωd_i. Queremos escrever esta relação de forma vetorial. Suponhamos que a posição deste ponto seja $\vec{r}_i$,conforme a figura. Devemos multiplicar $|\vec{r}_i|$ pelo seno do ângulo para obter d_i, o que significa que obtemos o módulo do produto vetorial da velocidade angular pela posição. A direção do produto vetorial será dada pela regra da mão direita, e no caso em questão, pode-se ver da figura que será a direção e o sentido da própria velocidade. Assim temos a relação

$$\vec{v}_i \equiv \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i \quad . \tag{3.12}$$

Devemos agora dizer à equação para levar em conta a equação de Newton, para isto devemos considerar a derivada da velocidade. No entanto, a derivada da velocidade acima tem termos demais para os levarmos em conta corretamente. Mas há uma relação que ainda não utilizamos, que é a derivada do vetor posição, que é a velocidade, e que é dada pela expressão acima, ou seja,

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \equiv \vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i \quad . \tag{3.13}$$

Notemos que a derivada da posição é a velocidade, portanto está paralela à velocidade. Se considerarmos o produto vetorial $\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$, sua derivada tem, em princípio, dois termos. Um deles é aquele obtido derivando-se a velocidade, que é a força, e nos dá um termo $\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$ e outro, derivando-se a posição, que fornece $\vec{v}_i \wedge \vec{v}_i$ que se anula identicamente. Portanto, consideramos a quantidade, já definida anteriormente,

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge v_i \quad , \tag{3.14}$$

chamada de momento angular do sistema.

Pensemos um pouco no que fazer. Devemos, como sempre, conversar com as equações, para podermos fazer perguntas a elas. O problema da mecânica, é como podemos determinar a evolução temporal dos objetos físicos, ou seja, como podemos fazer previsões. Portanto, devemos calcular a derivada no tempo e saber o que são as derivadas no tempo.

A derivada temporal da expressão acima é

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{v}_i}{dt} \quad . \tag{3.15}$$

Do lado direito desta equação temos a força, ou seja,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \quad . \tag{3.16}$$

A quantidade do lado direito é chamada torque,

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \quad . \tag{3.17}$$

O torque já foi intuido por Arquimedes há mais de dois mil anos. De fato, o efeito de uma força é tanto maior quanto maior o braço da alavanca, veja figura. O efeito do torque é uma mudança no momento angular. Mas para sabermos melhor do que falamos, precisamos conversar um pouco mais com as equações, perguntando o que está variando quando variamos o momento angular $\vec{L}$. Recalculemos o momento angular em termos dos objetos que definem o corpo rígido. Temos que

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i') \\ &= \sum_i m_i \{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i' \vec{\omega} - \vec{r}_i \cdot \omega \vec{r}_i'\} \quad . \end{aligned}$$

Esta expressão para o momento angular nos diz algo de muito importante, e precisamos conversar com a equação para sabermos o que ela significa. A primeira linha contém a definição do momento angular. Subsequentemente, na segunda linha, substituimos a velocidade pelo produto vetorial da velocidade angular pelo vetor posição. Nada mais legítimo. No entanto, ali já fizemos uma pequena trapassa. É claro que foi uma trapassa legítima, não há nada de errado nela, mas há um pequeno truque. Colocamos uma linha no vetor posição com a qual queremos dizer que só tomamos a parte de $\vec{r}_i$ perpendicular a $\vec{\omega}$. Isto é legítimo porque o restante não contribui para o produto vetorial com o próprio $\vec{\omega}$. Assim sendo, o primeiro termo pode ser facilmente calculado, pois $\vec{r}_i \cdot \vec{r}'_i = \vec{r}'^2_i$, e o primeiro termo, denotado por $\vec{L}_1$ nos fornece

$$\vec{L}_1 = \{\sum_i m_i r'^2_i\}\vec{\omega} \quad . \tag{3.18}$$

O segundo termo é um pouco diferente, mas nem tanto. Ele contém um termo com o produto escalar de $\vec{\omega}$ por $\vec{r}_i$, portanto projeta sobre a outra componente de $\vec{r}_i$, ou seja, a parte ortogonal ao $\vec{r}'_i$. Se tomarmos a direção de ω como sendo, por exemplo, a direção z, temos somas do tipo

$$\sum_i m_i z_i x_i \times \omega$$

Para um corpo rígido, as somas acima serão integrais, no primeiro caso,

$$\vec{L}_1 \to \int \rho(\vec{x})(x^2 + y^2)dxdydz\vec{\omega} \quad , \tag{3.19}$$

enquanto a outra será

$$\int \rho(\vec{x})zxdxdydz\omega_z \quad . \tag{3.20}$$

No primeiro caso, temos sempre uma integral a calcular, já que, para uma distribuição de massa qualquer ela é uma integral cujo integrando é positivo definido e jamais se anulará. O outro caso é bem diverso. Na verdade, se a distribuição for simétrica em torno do eixo z, esta integral se anula.

De um modo geral, as componentes do momento angular são combinações lineares das componentes da velocidade angular ω, o que podemos escrever como

$$L_a = \sum_{b=1}^{3} I_{ab}\omega_b \quad , \tag{3.21}$$

onde a, b são as componentes coordenadas x, y, z e I_{ab} é o chamado tensor de inércia. Para o caso simétrico, o momento angular é simplesmente proporcional à velocidade angular, $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Energia em um Corpo Rígido

Não é difícil calcular a energia. Tomemos a energia cinética de cada ponto,

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 \quad . \tag{3.22}$$

Podemos reescrever a expressão acima escolhendo ω na direção z, em cujo caso só interessa $\vec{r}$ nas direções x e y. Neste caso, a energia fica sendo

$$E_c = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad . \tag{3.23}$$

Assim, vemos que as expressões são bastante similares ao movimento linear, onde ω fazo papel da velocidade e I faz o papel da massa. No entanto, há dificuldades. Já vimos que a relação entre o momento angular e a velocidade nem sempre é tão simples, e eles não são necessariamente paralelos. Se olharmos para a equação do momento angular, vemos o seguinte. Tomemos um torque em um sistema girando. Por exemplo, tomemos uma roda de bicicleta, separada da bicicleta, girando, como na figura. Agora apoiemos o sistema sobre um ponto no eixo da bicicleta. O torque será

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{P} \quad , \tag{3.24}$$

onde $\vec{P}$ é o peso da roda. O momento angular está na direção de $\vec{r}$. Suponhamos que a roda esteja girando com velocidade angular ω. Como o torque é perpendicular a ω, que está na direção de $\vec{r}$, seu módulo não vai se alterar. Assim, temos que perguntar à equação de movimento o que ela diz a respeito da variação de ω. O vetor $\vec{r}$ tem tamanho constante, igual à distância do centro da roda ao ponto de apoio. Tomemos $\vec{r} = r\hat{r}$ onde $\hat{r}$ é um versor (vetor de módulo unitário

Sistemas de massa variável. Noções de estática e dinâmica do corpo rígido, momento de inércia; equações de movimento, energia de rotação, precessão.

3.1 Mecânica dos Fluidos

Um dos problemas mais interessantes na física é aquele que se refere a um fluido. É ao mesmo tempo um problema quotidiano, que vemos todos os dias na forma de rios, chuvas, águas em geral, ar, no voo de aviões e animais, até questões relacionadas com o universo como um todo. No entanto, sua complexidade estrutural é enorme, e os conceitos são por vezes tão complexos que a própria formulação do problema, como um problema físico bem definido é difícil.

Comecemos pela própria definição de fluido. Isto não é, para início, tão claro. A água e o ar são os fluidos mais comuns na terra. Suas propriedades, no entanto são muito diferentes. A água, a energias não muito altas, é um líquido, digamos em linguagem simples, pacífico, calmo. Nadar em uma piscina, ou em um lago não constitui grande dificuldade. Para que o façamos basta compreender duas coisas: o corpo é mais leve, portanto não afunda, e não podemos nos enervar, para não ficar com a cabeça, ou, mais propriamente com o nariz, debaixo da linha da água. Voar, por outro lado, é possível, mas a técnica para isto precisou de milênios de sabedoria, ou de alguns séculos de ciência precisa. Com uma certa energia, que nem necessita ser muito grande, o ar se torna turbulento, e os fenômenos atmosféricos passam a ser completamente imprevisíveis. De modo geral, líquidos e gases são fluidos. Os gases se expandem e ocupam todo espaço disponível, enquanto os líquidos tendem a ocupar volume fixo.

Para que se descreva um fluido, devemos saber que variáveis físicas deverão ser descritas, ou seja, como caracterizar um fluido. O fluido pode ser caracterizado pelas variáveis que descrevem cada pequeno elemento do fluido. Como sabemos o movimento de um pedaço pequeno utilizando-se as leis de Newton, podemos achar equações que descrevem o fluido. Passemos então a caracterizar o fluido.

Uma variavel qu descreve obrigatoriamente um fluido é sua densidade. Um fluido mais denso, ou um fluido menos denso têm propriedades diferentes em vista da diferença de suas inércias, portanto as leis de Newton podem significar ações diferentes para cada um deles. Além disto, um fluido pode ser comprimido diferentemente em diferentes regiões do espaço e do tempo, portanto sua densidade pode ser uma função tanto do tempo quanto do espaço. Escrevemos então a densidade como a função $\rho(\vec{x}, t)$. Em um gas a densidade é importante que a densidade seja uma função da posição para que tenhamos uma descrição física correta. Afinal, até mesmo na descrição da atmosfera sabemos que a densidade é função da altura, e que, em particular, o ar torna-se mais rarefeito com a altura. Isto porque para um gas a densidade é função da pressão, como vemos na lei dos gases. Por outro lado, um líquido, que também é um fluido, tem uma densidade quase constante, pois sendo pouco compressível sua densidade pouco muda com a pressão.

Pressão

Temos falado da pressão. A pressão pode ser definida em termos da força, ela corresponde a uma força por unidade de área (ver figura). É claro, portanto, que a pressão aumenta com a profundidade de um líquido sob a força gravitacional. A pressão é, de modo geral, também uma descrição do estado de um fluido, sendo função da posição e do tempo, ou seja, $p(\vec{x}, t)$. Finalmente, cada elemento do fluido move-se, sendo descrito por uma velocidade, que é diferente em cada ponto do fluido, e pode inclusive ser função do tempo. Ou seja, temos a função $\vec{v}(\vec{x}, t)$.

Manometros.

Se colocarmos um fluido em um campo de forças, para que tenhamos equilíbrio do fluido, a força exercida pela pressão nas paredes de uma superfície virtual[2] inserida no fluido deve contrabalançar a força. A força exercida pela pressão, na direção x, digamos, é igual a

$$p(x + \delta x, y, z) - p(x, y, z)\Delta A \equiv \frac{\partial p}{\partial x}\Delta A \delta x \tag{3.25}$$

que deve contrabalançar a força na direção x. Portanto a densidade de força (força por unidade de volume do fluido) deve ser $f_x = \frac{\partial p}{\partial x}$. No caso de um líquido em um campo gravitacional nas imediações da Terra, temos que, sendo a pressão apenas uma função da altura z, $\frac{dp}{dz} = -\rho g$, onde ρ é a densidade do fluido e g a aceleração da gravidade no local. Portanto, a uma altura qualquer h a pressão será $p = p_0 - \rho g h$. Se medirmos a pressão a partir da superfície do fluido para baixo, em termos da profundidade x teremos, da mesma forma, $p = p_0 + \rho g x$.

[2] Tal parede virtual pode ser pensada como uma "latinha"arbitrária no interior do fluido.

Exercício: considere um balde de água em rotação com velocidade angular ω. O balde está em um campo gravitacional e temos sobre o fluido (água) uma força centrífuga por unidade de volume $\vec{F}_{centr} = \rho\omega^2\vec{r}$, onde $\vec{r}$ é o vetor dirigido radialmente para fora. Mostre que o equilíbrio de forças leva à equação

$$p = p_0\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z \quad , \tag{3.26}$$

onde p_0 é a pressão na parte mais funda da superfície do líquido dentro do balde. Como consequência, note que sobre a superfície (onde a pressão é sempre p_0) temos a equação

$$z = \frac{\omega^2}{2g}r^2 \quad , \tag{3.27}$$

de modo que, ao girar o balde, obtemos um parabolóide descrevendo a superfície da água dentro do balde.

Das idéias simplíssimas acima seguem princípios gerais que permitem a solução de vários problemas físicos. O primeiro deles é o princípio dos vasos comunicantes. No caso de termos tubos interligados, não importa como, a equação (3.26) nos diz que a pressão é uma função apenas e tão somente da altura. Assim, em um tubo de água parada, cada ponto terá a mesma pressão de acordo com a altura. Uma utilidade, muito usada no tempo em que os motoristas eram ainda frequentemente surpreendidos por falta de gasolina em seus veículos (hoje os veículos têm bons medidores, mas houve tempo em que isto era um problema!) usava-se um tubo plástico longo, enfiava-se uma ponta no tanque de outro veículo (supostamtente com combustível) sugava-se até que a gasolina viesse à ponta externa, abaixava-se a ponta externa de modo que ela ficasse en nível abaixo do nível interno. Assim ali a pressão do líquido era menor que a interna ao tanque (que sob a atmosfera estava à pressão atmosférica, pelo menos) e o líquido passava a jorrar para fora, sendo recolhido em um recipiente, pronto para colocá-lo no carro sem combustível.

Outra utilidade é o macaco hidráulico. Consideremos a figura X. A pressão é função da altura, o que significa que, um pequeno peso do lado esquerdo, onde o tubo é fino, produz uma grande pressão, que se propaga por todo tudo. Do lado direito, no entanto, como a área é maior, a pressão sendo a mesma, temos uma força proporcionalmente maior. Teríamos então uma forma de ganhar energia? Nã, pois um peso do lado esquerdo moverá uma quentidade de água proporcional á área, portanto o trabalho fh=PaH=F'h=PAh, ou seja, a altura será proporcional ao volume de água deslocado, que obviamente é o mesmo, e não há problema com a conservação de energia.

Caracterização do movimento

Há outras caracterizações de um fluido que podem ser importantes. Um exemplo óbvio é a temperatura. A temperatura também pode variar de ponto a ponto, como por exemplo na água em uma panela sobre o fogo, onde a fonte de calor é colocada sob a panela, difundindo-se para o restante do líquido. Deve-se também levar em conta, também, que, por vezes, as funções termodinâmicas dependem umas das outras. A densidade é um exemplo claro, como por exemplo em um gas ideal, onde o produto da densidade pela temperatura é proporcional à pressão. Deste modo, leis termodinâmicas têm um papel importante na descrição de um fluido.

Para se mover um pedaço de um fluido, devemos trabalhar contra a pressão. Se a pressão for uniforme, não se trabalha, desde que não haja atrito. Perdas por atrito no fluido serão vistas mais adiante. Quando a pressão não for uniforme, em um pedaço infinitesimal do fluido, a força da pressão em uma face, digamos à direita de um elemento de fluido em relação à da esquerda (que tem, claramente, sinal oposto) fornece a força. O termo da variação do momento linear, do lado esquerdo, corresponde à derivada de $\rho\vec{v}$ na lei de Newton, tem mais termos, devido ao fato que $\vec{v}(\vec{x},t)$ depende de $\vec{x}$ que depende do tempo, portanto o lado esquerdo da equação de Newton fica sendo

$$\partial ddt \rho\vec{v}(\vec{x},t) + \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}(\vec{x},t) = -\nabla p(\vec{x},t) \quad . \tag{3.28}$$

Esta é a chamada equação de Euler. Ela é bastante incompleta, pois despreza quaisquer efeitos relacionados com perdas por atrito. No caso de um fluido em um campo gravitacional, devemos ainda adicionar a força da gravidade, o que nos leva a

$$\partial ddt \rho\vec{v}(\vec{x},t) + \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}(\vec{x},t) = -\nabla p(\vec{x},t) + \rho\vec{g} \quad . \tag{3.29}$$

Note-se que a velocidade é definida, acima, como definida em um certo ponto. Ou seja, fixamo-nos em um ponto, e observamos, naquele ponto, a velocidade. Isto é um procedimento diferente de se seguir a velocidade de um ponto material no fluido, o que poderia ser feito. No entanto, seguiremos este procedimento, devido a Euler. Na formulação de Euler, a velocidade será um *campo vetorial*, dependendo da posição $\vec{x}$ e do tempo t.

O escoamento será dito estacionário se a velocidade depender apenas da posição, e não explicitamente do tempo. Um rio de águas calmas é um exemplo de escoamento estacionário. Neste caso, as partículas do fluido seguem as linhas de corrente, formadas pelo campo de velocidades.

Tomemos um fluido incompressivel em um campo gravitacional, tudo estático. A velocidade se anula, e os termos de pressão e de força gravitacional devem se anular mutuamente. Assim, temos o resultado óbvio

$$p = p_0 - \rho g h \quad , \tag{3.30}$$

onde p_0 é a pressão em um ponto de referência para a altura zero, h a altura em relação a aquele ponto, g a aceleração da gravidade e ρ a densidade do fluido. Esta solução é válida para um fluido incompressível, em que a densidade independe da pressão, e portanto da altura. No entanto, para uma situação real a questão pode ser diferente. Suponhamos que estejando analisando a atmosfera. O gradiente de pressão só existe na direção vertical, que tomamos como a direção z. Temos então, do lado direito da equação de Euler,

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho(z) g \quad . \tag{3.31}$$

Notemos agora, que a densidade e a pressão estão interligados pela lei dos gases ideais, ou seja, $pV = nRT$, ou, em termos da densidade $\rho = \frac{nm_1}{V} = \frac{m_1}{RT} p$, onde n é o número de moles nonvolume V e m_1 a massa de 1 mol de ar. Substituindo em (3.31) temos

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\frac{m_1 g}{RT} p \quad . \tag{3.32}$$

No caso da temperatura não depender da altura (de fato incorreto para a atmosfera, mas podemos considerar a temperatura aproximadamente independente da altura) podemos integrar (3.32) temos a solução

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{m_1 g}{RT}} \quad . \tag{3.33}$$

Esta é uma solução simples para um problema prático. Para um líquido a solução vai pelas mesmas linhas, mas é muito diferente, com uma interpretação completamente diferente. Isto se deve ao fato do líquido, como por exemplo a água, ser incompressível, ou seja, seu volume não muda (ou, mais especificamente, muda muito pouco) com a pressão. Neste caso ρ é constante, e a equação de Euler (3.31) tem solução

$$p = p_0 - \rho g z \equiv p_0 + \rho g \xi \tag{3.34}$$

onde denotamos por ξ a profundidade medida a partir da superfície do líquido. Neste caso, p_0 será a pressão na superfície do líquido, que podemos tomar como a pressão atmosférica nos casos de interesse prático.

Um fluido pode ter propriedades físicas muito interessantes e descrevê-las supõe não apenas um conhecimento da dinâmica mas também da física envolvida. Esta se configura, por um lado, em correções à equação de Euler, tais como a inclusão do atrito, que no caso dos fluidos se mostra como viscosidade. Por outro lado, temos as condições de contorno, que dizem respeito diretamente à física. Comecemos pela segunda.

Se olharmos para a hélice de um ventilador, vemos que partículas de poeira aderem a elas e ficam ali, presas. Como isto se dá, se a hélice se moviment rapidamente? Bem, a física dos fluidos é tal que o fluido não se movimenta em relação às paredes fixas. Ou seja, as partículas do fluido seguem o movimento das paredes. Por tais tipos de argumentos físicos, geralmente supomos que há uma condição de contorno para os fluidos, qual seja, que o fluido está parado junto às paredes.

Se esta condição é geral o suficiente, ou quando ela é ou não válida, é um ponto muito discutível, mas o fato é que tal condição funciona muito bem para a maioria dos fluidos que podemos considerar em problemas simples.

Propriedades do campo de velocidades

O campo de velocidades, mesmo que não se considere a equação de força (equação de Euler) não é completamente arbitrário. De fato, a velocidade indica um movimento do fluido, e quando o fluido se move, passando de um local a outro, ele move massa de um ponto a outro. Mas a massa deve se conservar, de modo que há vínculos sobre o movimento do fluido.

Quando uma pequena quantidade de massa se desloca, uma quantidade de massa $\delta m = \rho(\vec{x}, t)\delta V$, onde δV é um pequeno volume, $\delta V = \delta A \delta x$, sendo δA a área perpendicular ao movimento e δx o espaço percorrido pelas partículas do fluido, e portanto igual a $\Delta x = v\delta t$. Assim, a massa por unidade de tempo que passa pela área δA será $\frac{\delta m}{\delta t} = \rho(\vec{x}, t)v((\vec{x}, t)\delta A$. Se tomarmos um volume qualquer do fluido e somarmos tudo o que sai ou entra de fluido teremos a soma $\sum \rho(\vec{x}, t)\delta A$. O produto $\rho(\vec{x}, t)\vec{v}((\vec{x}, t)$ corresponde à corrente de fluido, e sua projeção sobre a área[3] nos dá a massa que sai por unidade de tempo. Portanto, tal soma corresponde à variação de massa do fluido, $\frac{dm}{dt}$. Esta é a equação da continuidade. Um teorema matemático (teorema de Green) nos permite reescrever esta igualdade sob a forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) = -\nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) \equiv -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \tag{3.35}$$

que é chamada de equação da continuidade. O lado direito da equação (a menos do sinal) é uma operação matemática bem definida, o divergente, no caso, o divergente da velocidade. Esta operação é de extenso uso em campos vetoriais, e será muito utilizada no eletromagnetismo.

Equilíbrio dos corpos em fluidos. Variação da pressão atmosférica com a altura. Tensão superficial. Capilaridade. Regimes de escoamento. Conserva-

[3] De fato sobre a normal à área.

ção da massa e equação de continuidade. Forças em um fluido ideal em movimento. Equação de Bernoulli e aplicações. Circulação e aplicações. Ondas em líquidos. Ondas superficiais. Princípio de Fresnel-Huyghens. Dispersão e velocidade de grupo. Noções elementares sobre viscosidade, turbulência e vórtices.

Capítulo 4

Termodinâmica

Conceito de estado e as variáveis macroscópicas.

Matéria é, em princípio, algo muito complexo. Caracterizá-la através de seus constituintes atômicos é algo quase impossível, sendo necessário, para tal, descrever cerca de 1023 pequenos sistemas, as moléculas, com suas posições, momentos lineares e momentos angulares. Seguir estes movimentos posteriores é impossível. Por outro lado, a descrição macroscópica pode ser extremamente simples, como por exemplo, um centímetro cúbico de água. Um conjunto complexo de moléculas em movimento corresponde a uma quantidade de substância parada. Assim, a descrição macroscópica é muito simples. Além disto, a dependência temporal desaparece devido ao fato dos movimentos moleculares serem extremamente rápidos em comparação com os movimentos macroscópicos, cancelando, uns movimentos com outros, na média temporal a longo prazo.

A média a que nos referimos acima significa que os objetos constituintes, as moléculas, são muito pequenas e muito rápidas, portanto, em verdade, os movimentos moleculares não podem ser vistos e só importam em média (a menos de eventos mais raros, como o movimento browniano).

A descrição por variáveis macroscópicas deve caracterizar completamente o problema e deve corresponder às muitas coordenadas moleculares que não podemos descrever em todo detalhe.

Em particular, a energia do sistema não pode ser descrita em termos dos movimentos individuais, mas se soma na descrição do todo. À energia deve-se adicionar o trabalho, através da força macroscópica exercida pelo sistema. Deste modo, é natural considerar a pressão do objeto em estudo. Outras propriedades, tais como as respostas médias aos campos elétrico e magnético também devem ser consideradas através das interações com os momentos de dipolo elétrico e magnético médios. Além disto, a descrição do sistema depende de seu tamanho, descrito por seu volume assim como pelo número de componentes. É usual descrevermos o número de molecular através do número de moles da substância presente, o que é uma medida de sua quantidade (um mol, muito usado pelos químicos, equivale ao número de massa expresso em gramas).

Um estado corresponde ao conjunto completo de variáveis macroscópicas que descrevem completamente um dado sistema.

A termodinâmica estuda sistemas em enorme generalidade, tendo sua base sobre poucos princípios gerais. Estes são princípios que regem como os sistemas caminham para alguma situação estável, da qual, de alguma maneira, os sistemas dificilmente saem. Estes são chamados estados de equilíbrio. Como estas definições são muito gerais, parece que estamos fazendo algo separado da física, mas veremos que, de fato, as questões tratadas pela termodinâmica são extremamente gerais, e de validade muito abrangente, cujos princípios se baseiam na conservação de energia e na busca de estados maximamente prováveis.

A descrição do conteúdo de um sistema necessita do conceito de seu conteúdo energético. Hoje isto parece trivial, mas historicamente houve um enorme esforço observacional para que esta conceituação se colocasse.

O calor é conhecido de nossa experiência diária, mas é difícil sua conceituação primeira em vista da inexistência de uma medida direta dele a menos de uma sensação de quente, que é difícil de se quantificar, o que é necessário para uma descrição em termos fundamentais de modo matematicamente bem definido.

Os antigos caracterizavam o mundo como sendo formado por quatro elementos, água, terra, ar e fogo, portanto já incluíam o calor (fogo) como algo fundamental na descrição da natureza. É claro que tal caracterização, base da alquimia, não é cientificamente correta. Nos séculos XVI e XVII os primeiros conceitos quantitativos foram introduzidos, como a medida da temperatura de um corpo através de uma substância cujo volume se modifica ao ser aquecida, ou através das leis dos gases que foram estudados pelo irlandês Robert Boyle, um dos primeiros químicos modernos. Na época falava-se do calor como um fluido que ia dos corpos mais quentes aos mais frios. Havia quem falasse do calor como um movimento de agitação. Foi Benjamin Thompson, o Conde de Rumford, quem, no final do século XVIII observou que ao se cunhar o buraco de um canhão o atrito gerava calor. Foi calculado, bem depois (e, o equivalente energético do calor.

A idéia de que o calor fosse uma forma de energia já ocorria, mas a verificação experimental da equivalência foi feita por James Joule (1818-1889) em 1845.

A palavra energia é antiga, tendo-se originado entre os gregos ???????? (energeia) já com Aristóteles. Leibniz introduziu a vis viva, equivalente à moderna energia cinética. No entanto, a conceituação moderna de energia como algo derivado da simetria temporal só foi entendida no século XX, com o Teorema de Noether. Observacionalmente, sabe-se de algo que se conserva, como no caso do calor, através da perda por atrito. Na verdade, a perda do trabalho por atrito nada mais é que uma transformação de uma forma de energia em outra. A descoberta de diferentes formas de energia, como por exemplo da energia eletromagnética, levou à idéia de algo universal, universalmente conservado, posteriormente ligado à simetria por translação temporal.

A termodinâmica, sendo uma teoria geral sofisticada referente ao comportamento genérico de um número praticamente infinito de componentes, tem sua versão da conservação da energia na forma de uma lei, a primeira lei da termodinâmica.

Sistemas isolados e paredes.

Para que tenhamos uma formulação mais completa e consistente da primeira lei, melhor definirmos de modo mais exato as grandezas e conceitos envolvidos em sua definição. Em primeiro lugar, precisamos isolar um sistema, de modo que sua energia esteja controlada. Um sistema isolado termodinamicamente é aquele em que não pode haver trocas energéticas com o exterior, ou, equivalentemente, com outros sistemas. Um contra exemplo de um sistema isolado é uma determinada massa quente em um banho de água fria. Certamente haverá troca de calor e a massa tenderá a se resfriar. Um sistema isolado tem que ter paredes por onde o calor não possa passar. Um gás em um recipiente de vidro é um sistema aproximadamente isolado. É claro que uma parede só é perfeita em um limite idealizado. Um litro de uma substância quente em um refrigerador certamente vai se resfriar, apesar do vidro poder ser considerado um isolante. Por outro lado, uma panela grossa de alumínio, apesar da boa condução de calor do alumínio, pode ser considerada como isolante para tempos curtos.

Isolar um sistema, assim como compreender como se chega ao equilíbrio entre dois sistemas é parte essencial da termodinâmica, posto que esta é a descrição de como se processam a caracterização e a interação em termodinâmica. Caracterizado um sistema através de um conjunto de variáveis, o sistema isolado fica caracterizado e mantém suas constantes, possibilitando a eliminação do tempo como parte integrante do problema. O tempo é um enorme complicador, e sistemas dependentes do tempo, aqui chamados de sistemas fora do equilíbrio são extremamente complexos, e ficaremos com os sistemas em equilíbrio, não só muito importantes, mas aqueles em que podemos obter resultados bastante genéricos. Quando em equilíbrio, portanto, um sistema se mantém indefinidamente. As paredes são a maneira formal de se isolar o sistema.

Na realidade, há bons e maus isolantes, ou maus e bons condutores de calor. Hoje, há técnicas de se fabricar materiais que são excelentes isolantes, como é o caso de caixas de isopor, que podem guardar gelo por várias horas em dias quentes. Uma garrafa térmica, com paredes de vidro duplo espelhadas e separadas por vácuo é outro exemplo de um sistema com paredes isolantes. Uma transformação que não permita a troca de calor é dita adiabática, e a parede correspondente é uma parede adiabática. Uma parede que conduza calor é chamada diatérmica.

Quando isolado, o sistema deve ser caracterizado. Devemos então definir as variáveis de estado. Tais variáveis dependem do sistema e de sua complexidade. Um sistema mecânico simples é definido, na física de Newton pela energia e pela quantidade de movimento de seus componentes. Em termodinâmica dos sistemas mais simples não é muito diferente. Devemos, de alguma forma, dizer qual a energia do sistema e de alguma forma a resposta a um estímulo externo. No caso da energia, falaremos de energia interna do sistema, que será simplesmente definida por uma função U. As outras caracterizações que podem dizer respeito a uma interação externa são a pressão P e o volume V. Podemos ter outras variáveis, dependendo do tipo de sistema. Por exemplo, em sistemas com interação eletromagnética o campo elétrico e o magnético podem representar um papel importante, de modo que variáveis que concernem a resposta de um sistema a estes campos, como a polarização média e a magnetização serão, nestes casos, variáveis de estado. Em sistemas onde a interação química for importante, o número de partículas assim como a massa de cada uma também o serão. Incluiremos novas variáveis de estado conforme prosseguirmos nos problemas a serem analisados.

4.1 Equilíbrio térmico e temperatura.

Apesar da energia interna U ser a representação do conteúdo energético do material, o modo como um corpo reage a uma diferença de energia interna difere de um corpo para outro. Isto é bem conhecido em nossa vida prática. Se colocarmos metal sobre o fogo sabemos que ele rapidamente esquenta, enquanto o processo de ferver uma certa quantidade de água demora muito. Como não podemos medir diretamente a energia contida em um sistema, devemos ter uma medida fenomenológica, que chamaremos de temperatura.

A temperatura é um conceito fácil do ponto de vista físico qualitativo, é o conceito de algo quente ou frio. Sua definição observacional depende da existência de pontos físicos com temperatura supostamente bem definida, como um fenômeno que ocorra dependendo da temperatura a que o sistema está submetido. É comum tomar-se os pontos de fusão e de ebulição da água nas chamadas condições normais de pressão, ou seja a uma atmosfera, definindo estes dois pontos com uma medida arbitrária de temperatura, como por exemplo 0 e 100 graus Celsius, respectivamente. Tais números são arbitrários. Uma maneira de se estimar as temperaturas intermediárias seria fazer uma interpolação linear. Toma-se uma substância em que uma propriedade de fácil medida, como seu tamanho, esteja em contato com a temperatura zero, toma-se sua medida (digamos Lf) e a colocamos em contato com a água em ebulição, quando ela terá medida Le. A temperatura intermediária estará definida através da medida intermediária do comprimento, de modo que

$$(L - L_f)/(L_e - L_f) = (T - T_f)/(T_e - T_f) \quad . \tag{4.1}$$

Definindo a temperatura t em função das temperaturas T_e e T_f, assim como L, L_e e L_f. Assim funciona um termômetro com mercúrio, que é uma substância que muda considerávelmente seu volume com a temperatura.

É claro que esta medida é falha, pois nem todas as substâncias tem a mesma dependência de seu volume em relação à sua temperatura, de modo que tal termômetro é bastante rudimentar, e a temperatura em tal caso dependerá do material usado para a medida. Na definição microscópica teremos medidas mais sofisticadas, mas em um primeiro momento este tipo de medida nos basta.

Um passo além na compreensão da temperatura foi dado pelo estudo de gases. A Lei de Boyle, do século XVII, nos diz que, a temperatura constante, o produto da pressão pelo volume é fixo. Posteriormente, a Lei de Charles e Gay Lussac, obtida por Charles em 1780 e estudada por Gay Lussac e por Dalton cerca de 20 anos mais tarde, diz que a diferença de volume de um gás à temperatura de 100 graus Celsius e à temperatura de zero graus Celsius é proporcional ao volume a zero graus, com uma constante de proporcionalidade $k \approx 1/2.66$.

$$V_{100} - V_0 = kV_0 \quad . \tag{4.2}$$

Podemos interpretar este resultado como indicando a existência de uma temperatura absoluta, já que se tivermos V/T = constante,

$$V_{100} - V_0 = (V_{100}/V_0)V_0 - V_0 = (T_{100}/T_0 - 1)V_0 \quad ,$$

e se $T_{100} - T0 = 100$, como na escala Celsius, a constante acima leva a $T_0 =$ 266 graus absolutos. A escala Kelvin tem a mesma magnitude da Celsius, ou seja, $T_{100} - T_0 = 100$, mas $T_0 = 273,15$ representando a escala onde o zero absoluto significa uma temperatura Celsius de $T_{Celsius} = -273,15$C. Tomaremos o zero absoluto como significando que há completa ausência de energia cinética dos componentes, ou ausência absoluta de calor no corpo em questão. Apesar desta definição ser demasiado ligeira neste momento é uma maneira aproximada de se compreender o zero absoluto.

Estados de equilíbrio; equilíbrio termodinâmico

Os estados de equilíbrio definem de modo central o problema da termodinâmica. O estado de equilíbrio é definido apenas e tão somente pelas variáveis macroscópicas do problema, as variáveis termodinâmicas, independentemente das variáveis microscópicas. Juntamente com o fato dos movimentos microscópicos serem rápidos demais, não importando para as definições macroscópicas, o estado de equilíbrio é facilmente definido, sendo completamente caracterizado pela energia interna, pelo volume, e pelo número de partículas de cada componente químico.

Propriedades térmicas dos materiais e termômetros.

As materiais reagem de modo diferente, uns dos outros, com diferentes temperaturas. As propriedades dos materiais dependem da temperatura. Os materiais se deformam, mudam sua resposta a um campo elétrico, mudam sua resistência, e demais propriedades quando em temperaturas diferentes. Para diferenças de temperatura pequenas podemos fazer uma aproximação linear e medir temperaturas com uma escala de medida de comprimento equivalente, conforme mencionamos antes. Esperando que a resposta seja uma boa medida da temperatura, temos um modo de controlar esta grandeza, comparando-a com outras, em uma experiência.

A natureza do calor: histórico do calórico. Quantidade de calor. Calor específico. Calor latente. A condução de calor.

Para que se aqueça um material devemos adicionar-lhe calor. No entanto, podemos perguntar o quando um material se aquece ΔT ao lhe adicionarmos uma certa quantidade de calor ΔQ. Será ΔT sempre o mesmo, se ΔQ for sempre a mesma quantidade? A resposta é não, cada material reage de modo diferente à adição de uma certa quantidade de calor. Esta propriedade pode ser medida através do chamado calor específico, $c = \Delta Q \Delta T$. No entanto, há mais dificuldade para isto, pois o calor específico será diferente de acordo com as condições externas, como por exemplo, o resultado se dá diferente se o medirmos em condições de pressão constante ou de volume constante (tal fato tem pouca importância para um sólido, de modo geral, mas é primariamente importante para um gás).

O calor foi pensado, historicamente, como um fluido. A antiga teoria do flogisto não explicava a combustão, e Lavoisier introduziu o conceito de calórico como um fluido universal, conservado, que fluía dos corpos quentes aos corpos frios. O calórico era pensado como um fluido que se auto repelia, o que explicaria como um corpo quente esfriava à temperatura ambiente. No entanto, o calórico não podia explicar como se devia prover calor para que um bloco de gelo se fundisse, ou para que água evaporasse, sem haver diferença de temperatura.

Quando foi descoberto o equivalente mecânico do calor, ficou claro que o calor seria então uma forma de energia. Assim, explica-se como a temperatura aumenta com o calor. Da mesma forma, diferentes corpos reagem de modo diferente à introdução de energia, e o aumento da temperatura depende da capacidade do corpo em utilizar o calor para transformá-lo na aparência externa de energia, que é a temperatura.

Também se pode compreender melhor porque o calor específico é diferente a pressão ou a volume constante: a volume constante, o calor se transforma inteiramente em energia interna do corpo, aumentando sua temperatura. No entanto, a pressão constante, o corpo pode se expandir, e, portanto, trabalha contra forças externas, no caso de um recipiente ao ar livre, contra a pressão atmosférica. Deste modo, uma parte do calor vai se transformar em trabalho, e é necessária uma maior quantidade de calor para aquecer o corpo a pressão constante.

Assim como o calor é utilizado para aumentar a temperatura, também pode ser o responsável por transformações internas em uma substância, como, por exemplo, para transformar líquido em vapor. O calor necessário para transformar uma quantidade de substância de um em outro estado é chamado de calor latente. Assim, o calor latente de fusão da água é 80 calorias por grama, o que significa que devemos fornecer 80 calorias para transformar 1 grama de gelo em água.

Há bons e maus condutores de calor. Em geral, metais são, além de bons condutores de eletricidade, também bons condutores de calor.

4.2 Primeira lei da termodinâmica.

Agora é natural pensar na primeira lei da termodinâmica: é a conservação da energia. Se pensarmos no calor como forma de energia, a quantidade de calor inserida em um corpo aumenta sua energia interna ou trabalha contra a pressão externa, ou seja,

$$dQ = dU + pdV \quad , \tag{4.3}$$

onde dQ é o calor inserido no corpo, Du a variação da energia interna da substância, que denominamos U, p é a pressão e V o volume (isto fica claro em um gás a pressão p, cujo trabalho, força vezes deslocamento, é o mesmo que força sobre área vezes volume, ou pdV).

Experiências de determinação do equivalente mecânico da caloria.

As experiências

Propriedades dos gases ideais.

O conhecimento dos gases e suas propriedades trouxeram grandes avanços para a termodinâmica. No século XVI Robert Boyle e seu assistente Robert Hooke obtiveram a primeira forma da lei dos gases. Variando-se pressão e volume de um gás, eles acharam que

$$PV = \text{constante}$$

para um sistema mantido a temperatura constante. O francês Edme Mariotte também descobriu a lei que por vezes é chamada de lei de Boyle-Mariotte. Esta foi a primeira lei que deveria descrever o comportamento dos gases.

Complementar a esta lei é a lei de Charles e Gay Lussac, discutida anteriormente, e que pode ser escrita na forma p/T=constante.

Combinando as duas leis, pode-se dizer que, variando-se ao mesmo tempo pressão, volume e temperatura, pV/T=constante. A constante deve ser, obrigatoriamente, proporcional à quantidade de gás, de modo que podemos escrever $PV/T = nR = Nk$ onde n é o número de moles e R uma constante universal para os gases de valor ...., ou ainda, uma outra forma de se escrever a mesma lei é em se colocando o número de moles em função do número total de partículas N, em cujo caso devemos também transformar a constante de proporcionalidade de modo que $k =$ ....

Transformação de estado, equação de estado, energia interna e capacidade térmica molar dos gases ideais.

Podemos dizer que, um gás que obedece exatamente à lei acima é um gás dito ideal. De modo geral, a relação entre as grandezas que definem o estado de uma substância é a equação de estado da substância. A equação definidora de um gás ideal pode ser obtida da interação estatística de um grande número de partículas não interagentes.

A equação de estado substitui um enorme número de equações de movimento das partículas constituintes, fornecendo uma maneira macroscópica direta de se caracterizar completamente a substância em estudo. Mais importante ainda, a equação de estado, substituindo as equações de movimento, passam ao status de equações fundamentais, de modo que, o estado sendo completamente caracterizado, tem-se caminho aberto a uma teoria fundamental que prescinde de outras equações das quais seja conseqüência.

No caso dos gases ideais, podemos prosseguir e calcular, efetivamente, sua capacidade térmica????

Tomemos agora para estudo a energia interna. Sendo uma característica da substância, deve ser uma função da temperatura e do número de partículas do gás (ou da substância). Assim, passa a ter o status de função definidora do estado da substância. Hoje sabemos bem o significado da energia, até porque compreendemos que a energia é uma quantidade que se transforma, mas que sempre se conserva, transmutando-se entre formas aparentemente diferentes, como calor, massa, energia cinética, trabalho, mas que têm a mesma essência. Historicamente isto não aconteceu assim na obtenção das leis da termodinâmica, e apenas após a verificação da equivalência entre trabalho e calor é que se pode ter uma idéia da extensão da primeira lei em termos de objetos fundamentais.

Um problema básico da termodinâmica continua sendo o de se prever o estado de equilíbrio que se obtém quando juntamos duas substâncias em condições, ou estados, diferentes. No caso de estudarmos estados fora do equilíbrio o problema é muito mais complicado, e não o consideraremos aqui. No entanto, para se prever o estado final de equilíbrio necessitamos de alguns ingredientes novos. Em primeiro lugar, o fato de haver algum tipo de interação ou mudança de estado que leve a um estado final, significa que, na prática, esta mudança nos sinaliza um desenvolvimento temporal irreversível, ou seja, o tempo só muda em uma direção. Por outro lado, as equações de Newton são reversíveis, pois são de segunda ordem no tempo, de modo que uma mudança no sinal do tempo não muda a física subjacente.

Podemos exemplificar as duas situações com um ovo se quebrando, por um lado, onde sabemos exatamente, se filmarmos a ação, que o ovo se quebrou. Se filmarmos e passarmos o filme para traz sabemos o que de fato ocorreu e que o filme indo para traz é apenas um truque. No entanto, ao filmarmos duas bolas de bilhar se chocando, podemos passar o filme para traz e teremos uma situação fisicamente possível.

Qual a diferença física? Em termodinâmica trabalhamos com sistemas complexos, composto de muitos corpos, e o sistema como um todo tende sempre a uma situação mais favorável, do ponto de vista de facilidade de se chegar a tal situação. Não poderemos lançar mão da física fundamental, conforme vimos no exemplo da bola de bilhar e um ingrediente fundamentalmente novo deve entrar em ação. O que se faz é definir um tipo de função que deve tomar um valor mínimo (ou máximo, dependendo de como ela for definida) em um estado de equilíbrio. Esta é a origem da chamada entropia do sistema.

Como estamos definindo algo novo, independentemente dos conhecimentos anteriores, não é possível, a menos que tenhamos uma teoria microscópica, definir uma teoria a partir dos fatos teóricos conhecidos. É necessário que se partam de novas definições. A entropia, denotada por S, é algo novo a ser definido e deve ser máxima para um sistema em equilíbrio. Historicamente seu nome, cunhado por Rudolf Clausius em 1865, deriva do grego ????? (trop?) que significa conversão. O que podemos dizer é que a adição de calor a um sistema deve aumentar a entropia que deve medir o grau de desordem de um sistema, já que, dentre as várias possibilidades de equilíbrio, a mais provável é sempre aquela com maior desordem, pelo menos empiricamente falando-se.

Como medida de desordem, a entropia deveria ser uma função monotonicamente crescente da energia interna assim como do volume e do número de constituintes elementares, ou seja, $S = S(U, V, N)$. Podemos também postular que a entropia seja uma função aditiva dos constituintes, ou seja, $S = S_1 + S_2$. Assim, S deve crescer linearmente com U, V, e N, ou seja,

$S(lU, lV, lN) = lS(U, V, N)$. Como S é uma função monotonicamente crescente de U, sua derivada deve ser positiva e a função deve ser inversível, de modo que podemos também escrever $U = U(S, V, N)$. Tomando-se o diferencial da função U temos $dU = \frac{\partial U}{\partial S}dS + \frac{\partial U}{\partial V}dV + \frac{\partial U}{\partial N}dN \equiv TdS + pdV + mdN$, onde definimos as funções $T \equiv= \frac{\partial U}{\partial S}, p \equiv \frac{\partial U}{\partial V}$ e $m \equiv \frac{\partial U}{\partial N}$. É natural que definamos então a pressão como $p \equiv \frac{\partial U}{\partial V}$, ao se comparar a expressão acima com a primeira lei da termodinâmica, ou seja, $dU = dQ - pdV$. A função m é o chamado potencial químico, e nos dá o quanto de energia uma partícula adiciona à energia total. Devemos agora precisar a função $T \equiv= \frac{\partial U}{\partial S}$.

Um certo cuidado é necessário nas derivadas parciais que aparecem em termodinâmica. Vimos acima que as derivadas parciais são tais que, quando tratamos de S como função de U, V e N, ao derivar S com respeito a U, fizemos, implicitamente, V e N constantes. Isto é claro para estas funções. No entanto, mais tarde poderemos tratar de funções de variáveis alternativas, como por exemplo, tratando a pressão p como variável independente, ao invés de V. Isto já comentamos ao tratar do calor específico a volume constante ou a pressão constante. Para isto, usaremos a notação mais explícita (apesar de mais detalhada)

$$\begin{aligned} T &\equiv = \frac{\partial U}{\partial S}|_{V,N}, \\ p &\equiv \frac{\partial U}{\partial V}|_{S,N}, \\ m &\equiv \frac{\partial U}{\partial N}|_{S,V}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde fomos mais explícitos em dizer quais variáveis foram feitas constantes durante uma derivação.

Não sabemos ainda quem é a função T. Para isto consideramos dois corpos caracterizados por T_1 e por T_2. Perguntemo-nos o que acontece quando colocamos dois corpos em contacto, isoladamente de outros corpos. Sendo $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$ as energias dos corpos, $U = U^{(1)} + U^{(2)}$ será a energia total conservada, portanto $dU = dU^{(1)} + dU^{(2)} = 0$. Mas $dU =$ »»»»»> Portanto as funções T são iguais em equilílibrio, e o calor sempre passa daquela com T maior para aquela com T menor. Interpretamos a função T como uma medida da temperatura absoluta da substância. Esta interpretação independe de dependências espúrias da temperatura com propriedades físicas de materiais específicos e nos dá a exata idéia do que seja a temperatura.

Transformações adiabáticas. Determinação experimental da seleção c_p/c_v. Ciclos e máquinas térmicas, moto perpétuo, disponibilidade da energia.

A transformação de um sistema completamente isolado é chamada transformação adiabática, e faz um papel de extrema importância em termodinâmica, representando um sistema isolado com respeito a trocas de calor. Vimos que transformações adiabáticas não mudam a entropia do sistema. A entropia do sistema mede alguma forma de potencialidade de se obter trabalho a partir de um sistema. Sabemos que não podemos retirar trabalho de qualquer sistema. Um exemplo simples é a tentativa de se retirar trabalho de uma substância qualquer a uma temperatura fixa, como um litro de água a 20 graus. Também sabemos que não há possibilidade de se gerar energia de forma abundante sem que haja uma fonte. Tal dispositivo, usualmente denominado moto perpétuo, já foi proposto de várias formas, algumas até violando a conservação de energia, e outras, em forma mais branda, retirando trabalho de um sistema isolado a temperatura fixa. Isto é impossível. No entanto, se um corpo está a uma temperatura fixa, digamos água a 60 graus isolada do resto do laboratório, porque não podemos transformar o calor desta água em trabalho? A resposta é sempre a mesma, não há moto perpétuo. No entanto, queremos o significado quantificado, em termos de funções físicas.

A resposta sobre a possibilidade de se retirar trabalho de um sistema repousa sobre a ordenação momentânea do sistema, ou seja, se o sistema está, de alguma forma preparado para doar energia. A água do reservatório de Itaipu está a uma certa altura para transformar seu potencial em energia elétrica. Uma caldeira está a uma certa temperatura e ao se resfriar doa uma parte da energia a uma fonte fria, sempre necessária para que uma máquina a vapor possa trabalhar. Por outro lado, um sistema já desordenado, como água quente pura e simples não pode doar energia. Esta é a mesma razão pela qual um ovo quebrado não pode simplesmente se reconstituir de modo simples, como em um filme passado às avessas.

A propriedade que define, ao mesmo tempo, a flecha do tempo e a capacidade de transformar calor em trabalho é a entropia. Não foi fácil aos cientistas da época chegar a tal conclusão, a que aqui chegamos em tão pouco tempo. A inexistência de um moto perpétuo foi uma conclusão a que se chegou após muita tentativa (até hoje várias pessoas pensam ter inventado uma forma de moto perpétuo). As máquinas a vapor eram muito comuns após a revolução industrial, e foram a mola mestre da economia inglesa da época. Assim, o problema da transformação de uma forma de energia fácil e barata para a época, como o calor em outra muito mais sofisticada, que é o trabalho, era problema crucial para a riqueza das nações no século XVIII.

A Revolução Industrial: o maior enriquecimento da história como conseqüência do desenvolvimento científico.

A Revolução Industrial foi o mais importante desenvolvimento humano da história. Foi então que a humanidade realmente mudou do ponto de vista econômico. Tais mudanças foram impulsionadas por um emprego sem precedentes de novas técnicas de produção. Começando no Reino Unido no final do século XVIII, depois passando para a Europa e os Estados Unidos, a revolução industrial foi responsável pelo crescimento de uma nova classe de pessoas, a burguesia que enriquecia pela produção e que desalojou a aristocracia, que enriquecia pelo aproveitamento da terra. Como decorrência da revolução industrial, a produção econômica decuplicou e a população quintuplicou. Os primeiros responsáveis diretos foram a máquina a vapor, as máquinas têxteis e a fundição industrial do ferro.

Essas máquinas foram as primeiras responsáveis pela chamada primeira revolução industrial. A primeira revolução industrial baseou-se na força da água e na máquina a vapor. Foi portanto um emprego efetivo e racional da energia. Ademais, constituiu uma maneira de se aproveitar de modo eficiente de fontes abundantes de energia e de convertê-las em trabalho útil. Assim, foi a maneira como surgiu a termodinâmica, que trata também da conversão de energia barata em trabalho nobre. Foi James Watt (1736-1819) quem, em 1775, inventou a máquina a vapor, logo usada para se retirar água de minas, posteriormente para as mais variadas aplicações, como locomotivas e barcos a vapor. Watt deixou seu nome para a unidade de potência.

O problema do aproveitamento de energia estava colocado como problema prático evidente e de fundamental importância para o Homem. Este problema é da alçada científica e assim foi erigida a nova disciplina, a termodinâmica. Deve-se dizer, neste ponto, que a escalada da revolução industrial mudou a face do planeta, e também que a revolução científica se deu de modo irreversível, contínuo e cada vez mais eficaz a partir deste ponto.

Posteriormente, houve a segunda revolução industrial, que começou na primeira metade do século XIX, constituindo-se em uma revolução tecnológica, já que novas tecnologias, especialmente eletricidade e química começaram a ser utilizadas em larga escala. A Alemanha foi o país que mais investiu em ciência e terminou por emergir no século XX como uma nação extremamente pujante.

A questão sobre quanto de uma energia poderia ser utilizada de modo útil foi estudada pela termodinâmica. Verificou-se que se poderia utilizar uma máquina a vapor com uma fonte quente, uma fonte fria, e uma parte do calor que sai da fonte quente e vai à fonte fria pode ser utilizada como trabalho. Em uma máquina deste tipo há uma quantidade máxima de aproveitamento.

A máquina de Carnot funciona com duas fontes de calor (temperaturas fixas) e duas transformações adiabáticas entre elas, para que não haja perdas intermediárias. A máquina de Carnot seria a mais eficiente das máquinas. O ciclo de Carnot (Nicolas Léonard Sadi Carnot, 1796 – 1832) compõe-se de um pistão a uma temperatura quente T_2 que sofre uma expansão adiabática fazendo trabalho $W_2 = \int p_2 dV$, é resfriado por uma fonte fria de temperatura T_1, sofre então uma compressão adiabática até o volume anterior, recebendo um trabalho $W_1 = \int p_1 dV$, quando é novamente aquecido até a temperatura T_2. Na fonte quente o sistema recebe uma quantidade de calor Q_q, devolvendo Q_f para a fonte fria. Pela conservação da energia (primeira lei) devemos ter $Q_q = W + Q_f$, onde $W = W_2 - W_1$. A eficiência da máquina será o trabalho gerado dividido pelo calor colocado na máquina pela fonte quente. O calor dado à fonte fria foi dissipado. Podemos imaginar que a fonte quente seja nossa fornalha (como em uma locomotiva a vapor) e a fonte fria o meio ambiente para onde vai a sobra de calor (é claro que na realidade a máquina deve ser muito menos eficiente!). Como só temos duas fontes a temperatura constante, e não há qualquer outra troca de calor intermediária, assim como o ciclo poderá ser usado indefinidamente desde que na presença das duas fontes, podemos imaginar que esta seja a máquina de calor mais eficiente possível. Pela definição de entropia, sua variação na fonte quente é $\Delta S_q = -Q_q/T_q$, enquanto na fonte fria $\Delta S_f = Q_f/T_f$. Se supusermos que a entropia realmente é uma expressão da desordem do sistema, e que em uma máquina maximamente eficiente não há perda de ordem, portanto não há ganho de entropia (não se aumenta a desordem) a entropia deve se conservar e a eficiência fica $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_q}$. Note-se que jamais supusemos uma diminuição de entropia, para que, em um processo de geração de trabalho, não houvesse, ao mesmo tempo uma ordenação maior, o que seria gerar trabalho e ordem ao mesmo tempo, portanto um tipo de moto perpétuo.

A segunda lei da termodinâmica e a equivalência de enunciados na análise de motores térmicos e refrigeradores.

Este tipo de argumento pode ser generalizado para uma lei, a segunda Lei da Termodinâmica, que pode ser expressa como a entropia de um sistema físico isolado jamais pode diminuir.

História da Segunda Lei

A segunda lei foi formulada por Carnot a partir de sua máquina baseada no ciclo de duas isotérmicas e duas adiabáticas. O que argumentou Carnot é que, primeiramente, não poderia haver máquina mais eficiente. De fato, entre duas temperaturas, o melhor é que não haja perdas entre as mesmas, o que significa que deve haver, entre elas, duas curvas adiabáticas. Se houvesse outra máquina mais eficiente, poderíamos acoplar as duas máquinas, sendo a de Carnot trabalhando em sentido contrário, ou seja, utilizando o trabalho W para retirar calor Q_f da fonte fria para colocar Q_q na fonte quente, e sendo a outra máquina mais eficiente, isto quer dizer que as condições voltariam ao inicial e ainda sobraria trabalho. Ora, isto é um moto perpétuo, que por hipótese não pode existir. Deste modo, temos que a eficiência será $\eta = 1 - Q_f/Q_q$. Se supusermos que a eficiência deve ser uma função apenas das duas temperaturas, podemos postular que $\eta = 1 - T_f/T_q$, em cujo caso Q/T deve ter o mesmo valor tanto na fonte quente quanto na fria (com sinais contrários, é claro. Neste caso a variação de entropia se compensa.

A segunda Lei é uma expressão deste fato: em uma processo reversível a entropia se conserva, enquanto em uma processo genérico a entropia sempre aumenta. Isto significa que um processo só pode ser reversível se a variação total da entropia se anula!

A escala termodinâmica de temperatura. Entropia. Processos reversíveis e irreversíveis. O princípio do aumento da entropia.

Temperatura é uma grandeza descritiva, primeiramente descrita por suas conseqüências fenomenológicas. De modo geral. podemos definir temperatura pelo seu efeito sobre materiais, por exemplo pelo seu efeito sobre a dilatação de um certo material. Tomamos a temperatura do gelo em fusão e da água em evaporação como tendo valores fixos. Tomamos o volume de um certo material em cada um destes pontos, como por exemplo, de uma certa quantidade de mercúrio. A temperatura em cada situação intermediária é definida por uma interpolação linear da medida do volume de mercurio. Assim, na escala Celsius, definimos a temperatura zero, 0^oC como sendo a temperatura de fusão do gelo e 100^oC como a temperatura de evaporação da água. seja o volume de uma coluna de mercúrio na fusão do gelo V_g e na evaporação da água V_v. Definimos a temperatura t em um volume qualquer de mercúrio V, como sendo dado através da relação

$$\frac{t-t_g}{t_v-t_g} \equiv \frac{t}{100} = \frac{V-V_g}{V_v-V_g} \tag{4.5}$$

No caso do mercúrio, a densidade à temperatura de fusão de gelo de .....

Para estabelecer a lei, supusemos que a variação do volume do Mercúrio seja linear na temperatura, o que implica em praticamente definir a temperatura intermediária. Poderíamos definir a temperatura com outro material, o que certamente levaria a discrepâncias nos valores intermediários. Como o intuito será de termos uma idéia do quão quente ou quão frio temos em uma situação em termos relativos, o procedimento faz sentido, mas necessitamos de procedimentos de medida que pouco dependam do sistema utilizado para efetuar tal medida.

Em termodinâmica a temperatura tem um papel mais fundamental. Definida como acima o foi, a temperatura pode, em princípio, assumir qualquer valor real, positivo ou negativo. A termodinâmica impõe novos vínculos.

Para sabermos quais são as definições termodinâmicas, supomos que um material qualquer seja descrito por funções, ditas funções termodinâmicas. Estas funções devem estabelecer o estado do sistema. Pelo que já conhecemos, algumas grandezas físicas podem ser já definidas. Em particular, sabemos que a energia é uma grandeza demasiadamente importante para não ser parte do jogo termodinâmico. A conservação de energia pode ser escrita como sendo a primeira lei que rege a termodinâmica. No entanto, não sabemos escrevê-la completamente, pois ela descreve um jogo de quantidades que, sem uma descrição microscópica, só pode ser levada em conta através de grandezas fenomenológicas. Definimos uma energia interna, U, que descreve o movimento interno do material, e que muda ao fazermos ações sobre o sistema. Sua mudança é dada por um diferencial, dU. O aumento da energia interna pode ser feito através da injeção de calor ao sistema, dQ. No entanto, este calor pode ser utilizado tanto para o aumento da energia interna do sistema, quanto para se fazer trabalho, como em um gas cuja pressão p trabalha aumentando o volume de tal gas, dV. Este trabalho obtido é dado por uma expressão obtida pela lei de Newton, força vezes distância, ou pdV. Deste modo, temos a primeira lei, dada por

$$dQ = dU + pdV \quad . \tag{4.6}$$

Poderíamos, eventualmente fazer outro tipo de trabalho, como por exemplo, de forças elétricas, ou a injeção de pontos materiais, que colocamos genericamente como μdN. Estes pedaços das leis não foram descobertas todos de uma vez. A conservação da energia foi sendo inferida, após se perceber que, em vários experimentos, havia sempre algo que se conservava, transmutando-se de uma forma em outra. De fato, no âmbito da termodinâmica, a lei acima fica sendo conhecida como a Primeira Lei da Termodinâmica. A primeira lei nada mais é que a conservação da energia: quando se coloca uma quantidade de energia na forma de calor dQ, ela se deposita na forma de energia interna ou se transmuta na forma de trabalho, como pdV, ou seja, a pressão p fazendo trabalho sobre as paredes que contêm o gás, ou sob a forma de energia química, como μdN. onde cada partícula química tem uma energia μ.

O calor introduzido, dQ, não é o diferencial de uma função, mas apenas representa uma pequena quantidade de calor introduzida no corpo. Ou seja, não existe uma função Q cedendo um pedaço dela mesma ao corpo. No entanto, seria útil haver uma função termodinâmica através da qual descrevemos o calor cedido ou recebido pelo corpo. A função U é certamente uma função termodinâmica que descreve o estado de um corpo, que denominamos energia interna. Certamente o volume V é uma função do mesmo tipo, assim como a pressão p, portanto todo o lado direito da primeira lei corresponde a uma combinação de pedaços de funções termodinâmicas descrevendo o estado termodinâmico do corpo. Assim, o lado esquerdo deve ser também um diferencial ou uma combinação de um diferencial com uma função. Suponhamos que dQ seja o produto de uma função T por um diferencial de uma função de estado S, ou seja, dS. Assim, escrevemos $dQ = TdS$, seja lá o que signifiquem T e S. Para definir tais funções, necessitamos agora de propriedades definidoras. Suponhamos algo sobre a função S. O fato é que a definição das leis da termodinâmica passa pela definição de transformações reais. Por real, entendemos corpos ou materiais extensos, com propridades que dependem de sua extensão e outras propriedades macroscópicas que ainda não sabemos descrever. O fato é que no mundo real algumas transformações seguem uma linha temporal, apesar das leis da física serem as mesmas se as fizermos agir no ambiente para traz no tempo. Isto não é dificil de entender. As leis de Newton dependem da derivada segunda em relação ao tempo, portanto são as mesmas se trocarmos t por $-t$. O mundo real não é assim, basta que quebremos um ovo, verificando que as leis de Newton não impediriam que o ovo quebrado se juntasse em um ovo inteiro, no entanto isto jamais ocorre. As leis da termodinâmica complementam este aspecto das leis físicas e a termodinâmica trata exatamente deste aspecto. A segunda lei foi, historicamente, vista de várias maneiras. O que se quer desta lei é exatamente descrever este aspecto de flecha do tempo das leis físicas, ou seja, a física tem, no mundo real, uma direção privilegiada, a do progresso temporal. Uma das maneiras foi dizer que não se pode ter um moto perpétuo, ou ainda, não se pode gerar trabalho apenas a partir de calor. De algum modo, queremos dizer que há um limite para se gerar trabalho útil, e que ele não pode ser obtido de um sistema completamente desordenado. A função S veio cumprir exatamente este papel. Como esta função está ligada à transferência de calor, e queremos escolher um calor que tenha, de algum modo, uma utilidade em termos de trabalho, seria justificavel pensarmos que a função S devesse permanecer constante em um sistema isolado do exterior, isto é, sem receber o que podemos denominar calor inutil, e em atos reversíveis, isto é, vagarosos e que podem ser revertidos em seus processos.

Como no método científico, vamos tomar esta definição como verdadeira e tentar verificar sua veracidade em questões eperimentais. Vale dizer que foram necessários vários anos de trabalho de muitos cientistas competentes para que se chegasse a estas conclusões, que de modo algum são triviais. Portanto, vamos supor que a função S, que denominaremos entropia do sistema, seja uma função que se conserva na interação entre dois sistemas fechados em um processo vagaroso sem troca de calor com o meio ambiente. No caso de um processo irreversível há perda de energia que chamamos de *util* em energia *inutil*. Assim, suporemos que nestes processos a entropia deva aumentar inexoravelmente. Vejamos se podemos definir esta função de modo a resolver nosso problema através de primeiros prinípios, ou pelo menos através de uma metodologia bem definida. A definição anterior, ou seja, $dQ = TdS$ tem a vantagem de ser uma energia, que, através da primeira lei, se iguala às várias componentes de energia do sistema, em um sistema fechado, sem troca de calor com o exterior, nos leva a uma lei de conservação semelhante a um processo visto em física clássica, e no caso de introduzirmos calor no sistema, há uma introdução de energia cuja forma é basicamente aleatória, mas que poderá ser utilizada pelo sistema. Em dois subsistemas fechados ao exterior, no caso do calor passar de um para outro com a primeira lei válida em cada caso, isto significa que o trabalho de um subsistema converte-se em energia útil em outro subsistema. No entanto, se houve energia inútil, ou seja, se a energia se perder, de forma aleatória.

Necessitamos de um pouco de física neste ponto. O significado físico desta que denominamos *energia inútil* deve ser compreendido. Suponhamos um efeito físico muito simples, um bloco arbitrário de massa m sendo arrastado pelo chão, com coeficiente de atrito μ. Se o arrastarmos com uma força F, temos que $F - \mu mg = ma$, como consequência simples da lei de Newton. A força F faz, depois de percorrida a distância d, um trabalho Fd, enquanto se perdeu um trabalho μmgd, devido à força de atrito, que trabalhou contra nossa força, de modo que o trabalho, digamos, útil, foi $(F - \mu mg)d$, que elevou a energia cinética do bloco de zero a $E_c = (F - \mu mg)d$, como se pode comprovar calculando-se, através da equação de Torricelli, a velocidade final $v^2 = 2ad$. A energia perdida pela força de atrito, μmgd não desapareceu, mas tornou-se calor. Dizemos que foi perdida sob forma de calor (basta atritar as mãos para se perceber a formação de calor nas palmas, como fazemos no inverno). Porque dizemos que foi perdida? Bem, porque não temos como recuperá-la. Afinal, como fazer para que um bloco quente passe a se movimentar aproveitando o calor de seu entorno? Impossível.Esta perda é irremediável. Este exemplo é central em termodinâmica: há uma parcela de energia que é sempre perdida e=irremediavelmente em um processo genérico, o que os físicos perceberam nas primeiras experiências termodinâmicas, que são, de fato, questões das mais práticas. Afinal, estritamente dentro das leis da mecânica tal fato não seria impossível, é só mudarmos os sinais das velocidades de cada constituinte fundamental, e isto está dentro das leis da física. No entanto, sabemos que isto não acontece. Precisamos de uma formulação especial dentro da física para se dizer que, quando filmamos um ovo quebrado se reconstituindo em um ovo inteiro, isto só foi possível porque, de fato, este filme foi feito com um ovo se quebrando e se passando o filme de ao inverso. O problema que se coloca é como descrever estes resultados.

Como na mecânica, é útil termos uma solução através de um formalismo simples, onde simples não quer dizer fácil, mas significa que o colocamos em termos de princípios gerais, compatíveis com a física, mas, neste caso, com ingredientes extraordinários. Suponhamos que haja funções, que denominamos funções termodinâmicas, que descrevem o estado de um sistema físico. Suponhamos que exista uma função S', que denominaremos entropia do sistema, e que atenha um valor mínimo para os estados físicos em equilíbrio. Suporemos que:

1. Os estados físicos sejam caracterizados por funções físicas, ditas extensivas (proporcionais ao tamanho do sistema) tais como energia interna, número de partículas ou volume.

2. Que a entropia seja uma destas variáveis extensivas físicas e que seja aditiva, ou seja, a entropia de dois sistemas físicos separados seja a soma das entropias.

3. Que a entropia seja uma função monotonicamente crescente da energia interna U.

O primeiro postulado é uma simples caracterização do sistema físico bastante usual. O segundo caracteriza a própria entropia como variável física, o que é bastante razoavel e geral. O terceiro postulado também é simples, pois é razoavel supor que a desordem do sistema seja maior quanto maior a energia do sistema. Sendo S uma função monotônica de U, podemos invertê-la e tomar U como função de S. Desta forma, podemos escrever o diferencial de U em termos dos diferenciais de S e das outras variáveis extensivas. De modo geral, escrevemos

$$TdS = dU + pdV + \mu dN \quad . \tag{4.7}$$

Comparando-se com a primeira lei, vemos que $dQ = TdS$. As quantidade T, p e μ são ditas intensivas, pois as demais sendo proporcionais à quantidade de material no sistema, estas devem ser independentes do volume (ou da quantidade de material). Interpretemos a variável T. Suponhamos que coloquemos dois materiais ao lado um do outro, em contato, e os caracterizemos com S_1, U_1, p_1, V_1, o primeiro, e S_2, U_2, p_2, V_2, o segundo. Façamos agora uma transferência de calor $dQ = dU_1 = -dU_2 \equiv dU$, ou seja, do segundo para o primeiro sistema. Suponhamos que esta transferência seja feita com volumes constantes. A variação total de entropia será

$$dS = d(S_1 + S_2) = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) dU \tag{4.8}$$

que deve ser positivo, ou seja, $T_2 > T_1$ é a única possibilidade. O sistema estará em equilíbrio quando $T_1 = T_2$. Esta é a definição de temperatura, e T será chamada temperatura termodinâmica do sistema. Consideramos a termodinâmica como uma teoria separada, no momento, das demais teorias físicas, mas é ela quem descreve, de modo mais completo, as outras teorias quando aplicadas em meios com um número grande de pequenos objetos. Na verdade, ela faz o papel fenomenológico de uma estatística. A teoria que a complementa no âmbito do elementar é a mecânica estatística. Até o momento, a Termodinâmica é regida por duas leis, a primeira lei é a conservação de energia na linguagem das variáveis termodinâmicas,e a segunda lei diz respeito ao sempre válido e universal aumento da entropia. Há uma terceira lei, mais complexa, que diz que a entropia se anula quando a temperatura absoluta se anular. Mas sua discussão é muito mais complexa.

Note-se que o fato da entropia sempre aumentar nos dá uma distinção muito clara entre processos reverssíveis e processos irreversíveis. Quando a variação de entropia, em um processo, se anula, não há impedimento para que ele possa se realizar de modo inverso no tempo. No entanto, processos onde houver aumento de entropia não se podem processar para trás no tempo, pois em tal caso a entropia diminuiria, o que é contrário à segunda lei. Processos reais, geralmente ocorrem com geração de calor, portanto são irreverssíveis, ou ainda, aumentam a entropia.

A Máquina Térmica

Exemplos simples de aplicação da termodinâmica são vários, alguns deles de aplicação imediata, até porque foi da revolução industrial que nasceram as idéias de termodinâmica, uma interrrelação interessante das vertentes práticas e teóricas da física. Tomemos como primeiro exemplo a máquina a vapor. Seu interesse está na transformação entre diferentes tipos de energia. É fácil obter-se calor. A queima de combustíveis é o exemplo mais corriqueiro. Para o homem primitivo a lenha, nos séculos XVIII e XIX, queimava-se o carvão, posteriormente petróleo e hoje, energia nuclear provém de uma certa *queima* de combustíveis especiais. Utilizando uma linguagem despretenciosa tal qual anteriormente, como se pode transformar algo tipicamente inutil, como calor, em algo util, como trabalho? Aquecendo-se um gás ele se expande, podendo comprimir um pistão, e portanto executar um trabalho. Ou mesmo um líqúido, que pode entrar emebulição e seu vapor pode fazer pressão e executar trabalho. Assim eram as máquinas a vapor, como o exemplo mais conhecido da locomotiva, a velha *Maria Fumaça*.

Uma máquina a vapor trabalha entre duas temperaturas, ou seja, há uma fonte quente, a uma temperatura de, digamos T_2 e uma fonte fria, a uma temperatura T_1. O sistema (por exemplo um gás) é resfriado à temperatura menor, dá-se-lhe calor, ao expandir-se um êmbolo movel produz trabalho, igual à diferença entre o calor que a fonte quente fornece ao sistema, manos o calor que a sfonte fria absorve,

$$W = Q_2 - Q_1 \quad . \tag{4.9}$$

Assim, aquece-se, por exemplo em uma antiga *Maria Fumaça*, água através de uma fornalha a lenha, o vapor move um pistão, produzindo trabalho ao empurrar o pistão Com o resfriamento, o pistão volta ao estado anterior, devolvendo algum trabalho ao vapor, que se condensa, e deve retornar à fonte quente, refazendo-se o ciclo. A eficiência é medida pela relação entre o trabalho obtido e o calor fornecido pela fonte quente,

$$\eta = \frac{W}{Q_2} \equiv 1 - \frac{Q_1}{Q_2} \quad . \tag{4.10}$$

Processos Reversíveis e Irreversíveis

Processos físicos reais são, genericamente, irreversíveis. Quando, por exemplo, há perdas por atrito, o processo não será reversível, já que não se pode recuperar o trabalho desperdiçado, pois esse foi transformado em calor e escoa-se pelo corpo. Por não se poder recuperar o trabalho investido em um processo, não se pode voltar ao estado anterior sem gasto adicional de trabalho, portanto o processo será irreversível, sendo dito irreversível. Do contrário,será reversível.

Para caracterizarmos os processos reversíveis, portanto, não podemos ter perdas de energia para o ambiente. No caso de um processo se dar entre duas temperaturas, um fonte quente e uma fonte fria, a fonte quente deve dar o calor necessário a uma transformação de estado qualquer que venha a fornecer o trabalho posteriormente, e a fonte fria deve levar o sistema de volta a uma condição anterior. Entrementes, o sistema deve fornecer trabalho ao meio externo, logo após retirar a energia da fonte quente, e, sendo resfriado (o que representa a fase tres do processo) deve receber trabalho para voltar definitivamente ao ponto inicial. Devemos saber o que acontece na segunda e na quarta fases, já que, na primeira há o contato com a fonte quente (de temperatura alta, digamos, T_2) e na terceira está em contato com a fonte fria, de temperatura $T_1 < T_2$. Como nas fases intermediárias 2 e 4 não pode haver perdas inuteis para o ambiente, os processos devem ser tais que não haja troca de calor, que significa a perda definitiva de energia para o ambiente, portanto são trocas irreversíveis. Isto significa que os processos devem ser abiabáticos, ou seja, sem troca de calor.

Uma máquina térmica pode também funcionar às avessas, tomando trabalho para transportar calor de uma fonte fria para uma fonte quente, ou seja, funcionando como um refrigerador.

Abordagem microscópica: teoria atômica da matéria e teoria cinética dos gases. Equipartição de energia. Livre caminho médio. Gases reais. Entropia. Processos reversíveis e irreversíveis. O princípio do aumento da entropia. Funções e potenciais termodinâmicos. Noções de Mecânica Estatística. Distribuição de velocidades em um gás. Movimento Browniano. Ordem e Desordem. Sistemas auto-organizados.

Condições de equilíbrio. Algumas relações formais e exemplos de sistemas termodinâmicos. Processos reversíveis e irreversíveis. Formulações alternativas e transformadas de Legendre. Princípios de extremo para as diferentes formulações da termodinâmica. Relações de Maxwell. Estabilidade dos sistemas termodinâmicos. Transições de fase.

Capítulo 5

Gravitação

Do Universo geocêntrico ao heliocêntrico. Leis de Kepler. Momento angular e sua conservação. Teoria Newtoniana. Massa inercial e gravitacional. Campo e potencial gravitacional. Limites da teoria Newtoniana.

Usar livro.

5.1 A Mecânica de Newton e a Gravitação Universal

A mecânica de Newton nos permite compreender de modo praticamente perfeito a gravitação. Em primeiro lugar tentaremos compreender o problema de um referencial acelerado, depois vamos ver o que ocorre em um referencial que gira, em nosso caso específico a Terra, depois consideramos o problema de dois corpos, incluiremos a gravitação e, para coroar a questão com fecho de ouro, veremos como se deduzem as Leis de Kepler, completando o ciclo de compreensão pelo método científico, qual seja, dedução, desde a teoria e comparação com observações.

5.1.1 Referenciais acelerados

Suponhamos que haja dois sistemas de referência, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$, sendo que um deles, digamos $\mathcal{S}$, seja inercial, e o outro, $\mathcal{S}'$ tem uma aceleração arbitrária $\vec{A}$ em relação ao primeiro. Digamos que a origem do sistema $\mathcal{S}'$ se escreva, no sistema $\mathcal{S}$ como $\vec{X}$. Como consequência da geometria (ver figura) as posições de um corpo físico qualquer medidas ora em relação a $\mathcal{S}'$, $\vec{x}'$ ora em relação a $\mathcal{S}$, $\vec{x}$ relacionam-se através da relação simples

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{x}' \quad . \tag{5.1}$$

Como o tempo é absoluto, ou seja, o mesmo para todos os relógios, derivamos os dois lados desta equação uma ou duas vezes, e obtemos, respectivamente,

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \quad , \tag{5.2}$$

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}' \quad , \tag{5.3}$$

com as representações usuais para velocidades e acelerações. Assim, as acelerações obedecem a uma regra de soma. Como a aceleração comparece em uma lei física bem definida, a Lei de Newton, temos que,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{A} \quad , \tag{5.4}$$

que pode ser reescrita, de modo trivial, como

$$\vec{F} - m\vec{A} = m\vec{a}' \quad , \tag{5.5}$$

ou seja, para o referencial acelerado, o termo $-m\vec{A}$ funciona como uma força adicional, que denominamos força fictícia, já que ela de fato não é uma força real, mas consequência de um referencial escolhido de forma diferente, talvez por ser mais natural para um certo observador. Um exemplo é um referencial ligado à Terra, que, estando em rotação, está acelerado, produzindo forças adicionais, fictícias, conforme veremos em seguida.

Referenciais em Rotação.

Suponhamos que tomemos um sistema referencial em rotação, tipicamente, estaremos na superfície da Terra, que gira a uma velocidade angular de uma volta por dia sideral, de cerca de 23 horas e 56 minutos em relação às estrelas fixas[1] Para dois referenciais, um deles em rotação com velocidade angular $\vec{\omega}$ constante, temos que $\vec{x} = \sum_i x_i \hat{e}_i$ $\vec{x}' = \sum_i x'_i \hat{e}'_i$ onde $\hat{e}_i$ são os versores fixos e $\hat{e}'_i$ os versores no referencial em rotação. Em um certo momento, consideremos um ponto qualquer descrito por $\vec{x}$ ou, equivalentemente por $\vec{x}'$. A velocidade no sistema inercial será obtida simplesmente fazendo-se a derivada das coordenadas x_i em relação ao tempo. No sistema em rotação não é assim tão simples, pois os próprios versores são funções do tempo. Como o ponto considerado é o mesmo, temos que

$$\vec{x}(t) = \vec{x}'(t) \quad . \tag{5.6}$$

Fazendo-se a derivada, e utilizando-se explicitamente a expressão da posição em termos dos versores temos que

$$\begin{aligned} \vec{v} \equiv \dot{\vec{x}} &\equiv \sum_i \dot{x}_i \hat{e}_i = \dot{\vec{x}}' \equiv \sum \frac{d}{dt}(x'_i \hat{e}'_i) \\ &= \sum \{ \dot{x}'_i \hat{e}'_i + x'_i \frac{d}{dt} \hat{e}'_i \} \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{x} \quad , \end{aligned} \tag{5.7}$$

onde o último termo decorre do seguinte fato. Em um sistema em rotação onde, digamos, $\vec{\omega}$ está na direção z, a relação entre versores em movimento e versores parados será

[1] Não são 24 horas em vista da revolução em torno do Sol, que devemos descontar. Os quatro minutos que faltam, multiplicados por 365, dão a diferença entre o dia sideral e o dia solar médio.

onde supusemos que, de acordo com a figura, os dois sistemas têm a mesma origem, mas o segundo move-se em relação ao primeiro com velocidade angular $\vec{\omega}$.

5.2 Tycho Brahe e as Leis de Kepler

A segunda metade do século XVI foi uma época muito difícil devido às guerras religiosas entre o Catolicismo e a Reforma, notavelmente na Alemanha, terra do reformador Martinho Lutero, na época dominada por Carlos V (ou I, na Espanha, ou ainda Sacro Imperador Romano), da dinastia dos Habsburgos (casa dos Áustrias, em espanhol), profundamente católico e alinhado ao Papa. Johannes Kepler nasceu em 1571 em Weil der Stadt, nas proximidades de Stuttgard, em uma família protestante, não imune às tensões do seu tempo. Ao contrário de Brahe, seu entorno familiar era desestruturado e um tanto conflituoso. Descendia de uma família burguesa empobrecida, seu pai era rude e violento, ganhando a vida como soldado mercenário. Sua avó materna fora queimada por bruxaria e por muito pouco, de fato devido à sua intervenção pessoal, sua própria mãe não teve o mesmo destino. Já cedo, por acreditar e apoiar a teoria de Copérnico, Kepler entrou em conflito com os clérigos protestantes. Com ajuda de Mästlin, seu professor, foi enviado a Graz, cidade da Áustria dominada pelos Habsburgos católicos, para ocupar um cargo de professor de astronomia e matemática. Tinha, então, 23 anos. Seu trabalho dessa fase foi marcado por profundo misticismo. Sua obra *Mysterium Cosmographicum* foi, a princípio, rejeitada por entrar em conflito com as escrituras sagradas, sendo todavia posteriormente publicada. Devido à Contra-reforma, Kepler foi, inicialmente, afastado de seu trabalho e mais tarde, em 1599, expulso de Graz. Acabou mudando-se para Praga, convidado por Brahe para ser seu assistente. Conviveram e trabalharam por dois anos.

Kepler dedicou-se quase integralmente a construir uma descrição geométrica simples para a enorme quantidade de dados compilados por Brahe ao longo de sua vida. Tentou, debalde, moldá-los em um sistema de esferas girantes, porém, diminutas discrepâncias indicavam que os dados precisos de Brahe não se coadunavam a tal sistema de esferas. Todavia, Kepler acreditava profundamente na geometria, e procurou uma figura geométrica que pudesse descrever os dados de Brahe, achando-a nas elipses. No trabalho sobre o movimento de Marte publicado em Praga em 1609, Kepler mostra que os dados de Brahe apontavam para uma órbita elíptica, e que o planeta tinha uma velocidade variável, obedecendo a uma lei simples envolvendo, em posição de destaque, o Sol, como veremos a seguir. Quando tais leis são levadas em conta, o antigo sistema de epiciclos de Ptolomeu, que de fato foi sendo modificado e ficando cada vez mais complexo para que se levassem em conta aspectos mais detalhados do movimento planetário, cai definitivamente por terra, pois as complexidades dos movimentos são explicadas de um modo muito mais simples no sistema heliocêntrico com órbitas elípticas. É a navalha de Occam[2] em ação.

Para compreendermos a radical mudança no entendimento dos movimentos dos astros motivada pelo modelo de Kepler, devemos ter em conta que a visão moderna foi uma junção de alguns fatos. Em primeiro lugar, temos o sistema heliocêntrico de Copérnico, que simplificava a explicação de uma série de observações. Em seguida, com os dados de Tycho Brahe, vieram as leis de Kepler, que trouxeram novos elementos para o sistema de Copérnico.

[2] Ver Capítulo 2.

Kepler, como neoplatonista, acreditava na beleza das leis, e que a matemática era o arquétipo da beleza do mundo. Acreditava também que o Sol era a causa dos movimentos celestes. Isto era uma drástica mudança de pontos de vista. Para os platonistas, a finitude do universo aristotélico era incompatível com a perfeição divina. A deidade platonista tinha uma imensa fecundidade. Estes jogos de idéias estavam na mente dos filósofos e teólogos havia muito tempo, eram idéias que levavam a teorias sobre a origem do divino. No antigo Egito, Amenothep, pai de Tutancâmon, iniciou o culto ao Sol (Amon) como origem do divino. Este faraó foi o fundador do monoteísmo, contrariando os sacerdotes, por quem possivelmente teria sido assassinado. Em uma parte do texto de Copérnico, ele chega a afirmar explicitamente que no meio de tudo senta-se o Sol em seu trono. Poderíamos achar lugar mais apropriado para este magnífico luminar? Ele é corretamente chamado a Lâmpada, a Mente, o Mestre do Universo; Hermes Trimegistus o chama de Deus Visível. Também os gregos associavam o herói ao Sol: Apolo o leva em seu carro todos os dias. Para a literatura, o caminho do Sol é o caminho do herói, como Fausto de Goethe ou Ulisses na Divina Comédia de Dante. Para a igreja, estas idéias vão contra sua pretensão de mestra do mundo.

Os conceitos de Kepler eram extremamente intuitivos, e baseavam-se em idéias religiosas e alquímicas, colocando, por exemplo, a trindade divina nos elementos de uma esfera. Nas palavras de W. Pauli, registradas em seu livro em co-autoria com C. Jung[?], Kepler nos dá a imagem interpretativa do conhecimento como uma junção das impressões externas com imagens internas do espírito, já preexistentes.

5.2.1 Leis de Kepler

Com base nos dados de Tycho Brahe, Kepler formulou as seguintes leis para os movimentos planetários:

1. As órbitas são elípticas, com o Sol em um dos focos.

2. Dado um determinado intervalo de tempo, as áreas varridas pelos planetas em seus movimentos são sempre as mesmas (veja Fig. **??**).

3. O quadrado do período é proporcional ao cubo do raio de revolução para todos os planetas em torno do Sol.

A primeira lei é uma elaboração fenomenológica baseada nas observações detalhadas de Tycho Brahe para a órbita de Marte. Sua dedução assemelha-se, em vários aspectos, à pesquisa científica moderna: guiado por seu modelo geométrico, baseado em suas idéias arquetípicas, Kepler tenta entender os dados da órbita de Marte. A segunda lei, a lei das áreas, decorre de uma generalização do modelo esférico compatível com os dados observacionais.

Finalmente, a terceira lei dá destaque ao Sol como mantenedor dos planetas, posto que é uma mesma lei para todos os planetas ao mesmo tempo, independente dos detalhes de cada órbita. Esta última lei, anunciada em seu *Harmonice Mundi*, coroa os esforços de Kepler para entender o Sol como causa e fonte de todos os movimentos planetários. Ela não prevê novidades nas órbitas, mas, relacionando planetas diferentes, aponta para uma única fonte, o Sol, como mestre desta lei. Esta relação, satisfeita para todos os planetas, não havia sido pensada antes, e fascinou a Kepler muito mais que as outras duas leis. Esta regra *universal* para vários astros era o que Kepler buscava como *harmonia do mundo*. Kepler ainda considerou várias outras maneiras matemáticas e geométricas de se pensar o mundo e os planetas, porém vamos parar neste ponto para prosseguirmos em direção aos fatos que interessam mais à física moderna e à Teoria da Gravitação.

5.3 Isaac Newton e a Mecânica Clássica

Isaac Newton foi uma das personalidades mais complexas e notáveis da Ciência. Após a compreensão filosófica de Galileo, que juntamente com Descartes trouxe a metodologia para a ciência, com uma contumaz crítica ao pensamento científico Aristotélico, Newton foi o primeiro Físico Matemático, colocando definitivamente a Matemática no âmbito da explicação quantitativa dos fenômenos físicos. A Teoria Newtoniana da Mecânica e da Gravitação requer uma compreensão nova do universo físico, e tem a descrição de Galileo como substrato para sua formulação.

Newton nasceu em Woolsthorpe, perto de Grautham, no Natal de 1642, calendário juliano. Entrou no Trinity College em Cambridge em 1661. Durante a grande peste, nos anos de 1665 e 1666 permaneceu na fazenda familiar, quando desenvolveu várias técnicas de cálculo integral e diferencial. Trabalhou também, nessa mesma década, no movimento circular, tendo descoberto a fórmula da aceleração centrípeta ($a = v^2/r$). Foi eleito *Fellow* do *Trinity College* ao retornar a Cambridge. Newton teve muitos interesses. Estudou, nessa época, teologia, em especial a questão da Santíssima Trindade. Publicou os *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [?] em 1687, após muita maturação e muito estudo. De fato, houve também trocas de correspondência com Robert Hooke e intensas discussões com Edmond Halley, após o que o movimento dos corpos celestes foi descrito usando-se o que hoje é conhecido como *As Leis de Newton*.

Newton mudou-se para Londres em 1696, depois de ficar por vários anos bastante solitário em Cambridge. Em Londres teve uma vida mais agitada. Foi eleito presidente da *Royal Society* em 1703 e feito cavaleiro em 1705. No final de sua vida, Newton dedicou-se mais à teologia e à alquimia. Sua terceira edição dos *Principia* apareceu em 1726, quando o autor já tinha 83 anos. Seu falecimento ocorreu no ano de 1727.

A mecânica clássica nasceu de algumas observações importantes legadas por Galileu e das Leis de Newton. Galileo observou, em uma linguagem traduzida para conceitos modernos, que:

1. Um corpo em movimento retilíneo e uniforme continuará, na ausência de forças (ou seja, caso estiver isolado), em seu estado de movimento, perpetuamente.

2. Sob a ação da gravidade, corpos diferentes caem com a mesma aceleração.

3. O movimento dos corpos pode ser descrito por um sistema cartesiano. Dois sistemas que difiram por uma rotação fixa, ou por uma velocidade relativa constante, são fisicamente equivalentes.

A primeira destas Leis é a Lei da Inércia. Marca uma grande mudança conceitual em nosso conhecimento da mecânica dos corpos e está ligada à nossa compreensão do movimento planetário e do universo. Quando Aristóteles discutiu o problema do vácuo, argumentou que, se um corpo no vácuo tivesse um movimento uniforme, ele permaneceria neste estado para sempre. Então, erroneamente concluiu que isto seria um absurdo, e que, portanto, o vácuo não pode existir. Na verdade, ele poderia ter formulado a lei da inércia quase 2.000 anos antes! Esta compreensão só veio, no entanto, com uma visão da ciência onde se procura reduzir as leis às suas propriedades essenciais, colocando-as em uma perspectiva onde o fenômeno possa ser simplificado a questões pertinentes apenas àquela lei. Em outras palavras, esta compreensão só foi possível devido ao método científico. Note que o caso de um corpo em repouso pode ser visto como um caso particular do movimento retilíneo e uniforme, um movimento com velocidade zero.

A segunda observação, que faz uso do reducionismo acima mencionado, é essencialmente empírica. Virá a ser crucial muito mais tarde, no século XX, porém já define, neste ponto, a aceleração da gravidade, universal para todos os corpos. A terceira lei, conquanto mais descritiva, permite a definição dos chamados sistemas inerciais, fundamentais para a formulação de problemas físicos.

As leis da Mecânica Newtoniana envolvem o conceito chave de inércia, a propriedade dos corpos resistirem à aceleração, a tendência, na ausência de forças externas, dos corpos em repouso assim continuarem e daqueles que estiverem em movimento seguirem uma trajetória retilínea e uniforme. A segunda lei da Mecânica estabelece que a força $\vec{F}$ necessária para romper a inércia de um corpo, imprimindo-lhe uma aceleração $\vec{a}$, é proporcional à quantidade de matéria do corpo (sua massa m): $\vec{F} = m\vec{a}$. As perguntas naturais que surgem daqui são: repouso em relação a que? Trajetória retilínea vista por quem? Aceleração referente a que? Segundo Newton, os estados de movimento estariam todos definidos em relação a um referencial inercial absoluto, eterno e imóvel. O referencial absoluto coincidiria, numa aproximação muito boa, com o referencial no qual as estrelas distantes estão em repouso. Newton propôs vários experimentos para determinar movimentos em relação ao referencial absoluto. O mais famoso fala sobre a detecção de movimentos de rotação. Numa versão informal devida a Steven Weinberg [?], este experimento é descrito da seguinte maneira: saia ao ar livre numa noite clara. Deixe seus braços livres e descansados e olhe para o céu. Gire em piruetas. De maneira inequívoca, você verá as estrelas girarem na direção contrária à sua rotação e sentirá seus braços se abrirem. A aparição da força centrífuga responsável pela abertura dos seus braços seria a evidência direta do seu estado de movimento em relação ao referencial das estrelas distantes. A concepção Newtoniana do referencial absoluto foi duramente contestada por um dos seus grandes oponentes, Gottfried Wilhelm von Leibniz, para quem a hipótese do referencial absoluto deveria ser desnecessária, e somente haveria sentido em falar-se sobre movimentos relativos entre corpos materiais, e não sobre movimentos absolutos. Um longo e celebrado debate filosófico prosseguiu durante o século XVIII a partir destas discussões.

Newton também propôs uma teoria para a gravitação, a qual, em conjunto com suas leis dinâmicas, era capaz de descrever os movimentos dos corpos celestes. Segundo sua teoria da gravitação universal, dois corpos sempre se atraem com uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância, e diretamente proporcional ao produto de suas massas. Newton foi o primeiro a estabelecer, usando experimentos com pêndulos, a igualdade entre as massas inerciais (presentes nas leis da dinâmica) e gravitacionais (presentes na lei da gravitação universal) para todos os corpos. Esta igualdade é o embrião para uma interpretação muito mais sofisticada da gravitação que só apareceu no século XX, com a Relatividade Geral de Einstein. A gravitação universal de Newton e suas leis da dinâmica formam o paradigma científico de maior sucesso da história da ciência, usadas até hoje para a descrição do movimento de corpos celestes, naturais ou não, levando, inclusive, à descoberta de novos planetas, como ocorreu com Netuno, em meados do século XIX. John Couch Adams, astrônomo inglês, estudando perturbações inesperadas na órbita de Urano, segundo as Leis de Newton, previu, em 1845, a existência de um novo planeta. Informou sua posição a James Challis, do Observatório de Cambridge. Challis, porém, demorou muito para observar o novo planeta. Enquanto isso, de maneira independente, o francês Urbain Jean Joseph Leverrier fazia uma análise semelhante e, em 1846, informou Johann Gottfried Galle, do Observatório de Berlin, que identificou Netuno em poucas horas. Deste então, atribui-se a Leverrier a descoberta teórica da existência de Netuno. Fora, então, a consagração da Gravitação Newtoniana e do método científico. Ironicamente, Netuno já havia sido observado desde Galileo! Porém, fora identificado até então como uma fraca estrela. Plutão foi descoberto de maneira semelhante, a partir de discrepâncias observadas na órbita de Netuno, no início do século XX. Na mesma época, eram conhecidas discrepâncias na órbita de Mercúrio, o mais interno e rápido dos planetas do sistema solar. Estas discrepâncias foram atribuidas a um outro planeta. Batizado como Vulcano, chegou a ser tema de várias estórias de ficção científica. Porém, Vulcano nunca foi encontrado, simplesmente porque nunca existiu. As discrepâncias na órbita de Mercúrio devem-se a efeitos relativísticos, ignorados na teoria newtoniana. A explicação das pequenas discrepâncias verificadas na órbita de Mercúrio em relação às previsões Newtonianas foi um dos grandes sucessos da Teoria da Relatividade Geral de Einstein.

5.3.1 As Leis de Newton

São três as Leis fundamentais de Newton para a dinâmica:

1. Um corpo em movimento retilíneo e uniforme continuará, na ausência de forças (ou seja, caso estiver isolado), em seu estado de movimento, perpetuamente (Lei da Inércia de Galileo).

2. Sob a ação de uma força externa $\vec{F}$, a taxa de variação da quantidade de movimento[3] $\vec{p}$ de um corpo é igual a força $\vec{F}$. Isto significa que $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$.

3. A toda ação corresponde uma reação igual e contrária.

A terceira Lei, conhecida como Lei da Ação e Reação, merece alguns comentários extras. Ela deve ser entendida no contexto das interações de contato entre dois corpos. Newton ilustra esta lei com a seguinte situação[**?**]: "*Se um cavalo puxa uma corda atada a uma pedra, o cavalo (...) será igualmente puxado para trás pela pedra; com efeito, a corda distendida, pela mesma tendência a se relaxar ou soltar, puxará tanto o cavalo para a pedra como a pedra para o cavalo, e obstruirá tanto o avanço de um deles quanto facilita o da outra*". Para o caso das interações de contato, a terceira Lei pode facilmente ser deduzida a partir da segunda, a qual contém, como um caso particular (ausência de força), a primeira.

Newton aplicou suas Leis da dinâmica com sucesso em várias situações. Estas aplicações envolvem necessariamente uma profunda análise do conceito de força. Nosso interesse, porém, foca-se nas aplicações ao movimento planetário, para as quais Newton formulou uma outra Lei, que conjuntamente com as Leis da dinâmica formam o pilar fundamental da Mecânica Clássica ou

[3] A quantidade de movimento, ou *momentum*, de um corpo é definido como $\vec{p} = m\vec{v}$, sendo m a massa inercial e $\vec{v}$ a velocidade do corpo. Em situações onde m permanece constante, $\frac{d}{dt}\vec{p} = m\frac{d}{dt}\vec{v} = m\vec{a}$, sendo $\vec{a}$ a aceleração do corpo.

Newtoniana. Trata-se da Lei da Gravitação Universal, que descreve a força de interação gravitacional.

5.3.2 Lei da Gravitação Universal

Newton guiou seu estudo das órbitas dos planetas com a hipótese de que suas Leis da dinâmica tinham caráter universal, isto é, deveriam ser válidas não só nas situações cotidianas, nos fenômenos mecânicos à sua volta, mas também para o movimento dos corpos celestes. Desta forma, Newton proporia uma unificação para a explicação do movimento: as mesmas Leis da dinâmica descreveriam movimentos em escalas tão diferentes como a dos pêndulos e molas que podiam ser construídos por Newton, como a dos planetas e outros corpos celestes. Esta situação é ilustrada perfeitamente com a estória popular[4] de que Newton procurava entender o movimento planetário e o da queda de uma maçã como fenômenos de mesma essência.

De acordo com a segunda Lei de Newton, nenhum corpo celeste que siga as Leis de Kepler pode fazê-lo livre de forças externas, já que, se assim estivessem, suas trajetórias deveriam ser linhas retas. As Leis de Kepler também destacavam de maneira especial o papel do Sol como mantenedor e responsável pelas órbitas elípticas dos planetas. Newton, então, procurou descobrir qual força seria responsável pelas órbitas elípticas e concluiu, numa brilhante dedução envolvendo geometria e o cálculo diferencial que ele mesmo inventara, que tal força deveria ser atrativa, atuar na direção definida pelo Sol e pelo planeta em questão e ser inversamente proporcional ao quadrado

[4] Não há registro nas obras científicas de Newton desta estória. Há, porém, diversas fontes confiáveis que afirmam que a queda de uma maçã foi, mais de uma vez, usada por Newton em explicações sobre a atração gravitacional. Não há nenhum relato, porém, que sugira que a maçã caíra-lhe na cabeça...

da distância do Sol ao planeta. Para que a mesma força pudesse ser usada para todos os planetas conhecidos, a força também deveria ser proporcional à massa do planeta. Para poder ser usada ainda em outras situações, como no caso do movimento da Lua, idêntico ao dos planetas, porém com a Terra como elemento mantenedor da órbita, a força também dever ser proporcional à massa do corpo mantenedor, o Sol, no caso dos planetas, e a Terra, no caso da Lua. Matematicamente, a força se expressaria como

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}, \tag{5.8}$$

sendo $\vec{F}_{12}$ a força atuando no corpo 1 devido à atração gravitacional do corpo 2, m_1 e m_2, respectivamente, as massas (gravitacionais) dos corpos 1 e 2, r a distâncias entre os corpos 1 e 2 e, finalmente, $\hat{r}_{12}$ o vetor de comprimento unitário que aponta do centro de gravidade[5] do corpo 1 em direção ao centro de gravidade do corpo 2. Note que, apesar de não ser uma interação de contato, esta força obedece à terceira Lei de Newton, $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.[6]. A lei (5.8) têm caráter universal, isto é, é válida para quaisquer dois corpos no universo, sejam a Terra e o Sol, Marte e o Sol, a Terra e a Lua, ou a Terra e a maçã. Ela é a base da Teoria de Newton da Gravitação Universal. Do ponto de vista epistemológico, as massas que figuram na lei (5.8) não têm porque serem as mesmas presentes na segunda Lei de Newton. Do ponto de vista observacional, Galileo houvera estabelecido a igualdade das massas inercial e gravitacional na famosa experiência da queda dos corpos. Porém, os conceitos mais modernos ainda não estavam perfeitamente definidos. Newton foi o primeiro a estabelecer experimentalmente a igualdade entre as massas

[5] A noção de centro de gravidade foi definida por Newton nos *Principia*. Para nossas intenções aqui, porém, vamos nos restringir a corpos simétricos e de composição homogênea, caso em que o centro de gravidade coincide com o centro geométrico do corpo.

[6] Já que, por construção, $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$

inerciais (as da segunda Lei de Newton) e as gravitacionais (as da Gravitação Universal) para diversos corpos de diferentes composições, valendo-se, para isso, de experimentos com pêndulos. Em (5.8), G é uma constante universal, a chamada constante de Newton.

Com a hipótese da Gravitação Universal (5.8) e suas leis da dinâmica, Newton pode deduzir as três leis de Kepler. Assim, por exemplo, da hipótese de que Marte segue as leis da dinâmica e que entre Marte e o Sol há uma força de atração como (5.8), Newton deduziu que: 1) a órbita de Marte era necessariamente elíptica com o Sol num dos focos; 2) no periélio, Marte se movimenta mais rápido que no afélio (Lei das áreas de Kepler, Fig. **??**); 3) o quadrado do período de revolução de Marte em torno do Sol é proporcional ao cubo da sua distância média ao Sol. Mais que isso, Newton pode mostrar que a constante de proporcionalidade da terceira Lei de Newton era, basicamente, a massa do Sol. Como já foi dito, Newton também teve sucesso com a Lei da Gravitação Universal ao estudar o movimento da Lua e dos corpos na superfície da Terra, incluindo as marés. Além disso, Newton pode fazer previsões precisas sobre o movimento dos cometas, corpos que possuem uma órbita elíptica com excentricidade bastante acentuada.

Os planetas seguem as Leis de Kepler em primeira aproximação. Isto significa que, se analisadas cuidadosamente e descritas com alta precisão, maior que as observações a olho nu de Brahe, veremos que as órbitas reais dos planetas diferem um pouco das previstas pelas Leis de Kepler. Estas pequenas discrepâncias podem, porém, ser perfeitamente explicadas pelas Leis de Newton. Neste sentido, as Leis de Newton merecem ser consideradas como mais fundamentais que as de Kepler. A lei da Gravitação Universal (5.8) implica que, sobre Marte, por exemplo, atuam forças gravitacionais não só devidas ao Sol, mas também as devidas a todos os outros corpos do sistema solar. No entanto, sabe-se que, depois do Sol, o corpo de maior massa do sistema solar é Júpiter[7]. Mesmo assim, a força sobre Marte devida à Júpiter corresponde a uma pequena fração daquela correspondente ao Sol. É natural, portanto, esperar que a força devida a Júpiter perturbe levemente a órbita que Marte seguiria caso estivesse apenas sob a ação da atração gravitacional do Sol. A órbita real corresponde, então, à órbita Kepleriana, como conseqüência da atração do Sol, com pequenas correções devido à presença de Júpiter. Todos os outros corpos do sistema solar têm efeito completamente desprezível na órbita de Marte. Esta é a natureza das citadas perturbações nas órbitas de Urano e Netuno, que levaram à descoberta, respectivamente, de Netuno e Plutão. Estas perturbações são também bastante relevantes no estudo das órbitas dos cometas.

Nosso último comentário sobre a Gravitação Universal de Newton é sobre seu caráter de *ação à distância instantânea*. A lei (5.8) não faz referência ao estado de movimento de nenhum dos corpos envolvidos. Isto significa que, independente do estado de movimento do corpo 2, se em repouso, em movimento retilíneo uniforme ou acelerado, a força sobre o corpo 1 sempre apontará na direção do corpo 2. Para apontar sempre na direção do corpo 2, a força sobre o corpo 1 deverá se orientar instantaneamente a fim de seguir o movimento do corpo 2. Apesar de ser perfeitamente adequada aos fenômenos que Newton pretendia descrever, veremos à frente que este caráter de ação à distância instantânea é incompatível com um dos pilares da física moderna, a Teoria da Relatividade de Einstein.

[7]Ver o apêndice.

5.4 O Universo Mecânico

O poder preditivo das Leis de Newton mudou definitivamente a atitude do Homem diante do universo. Os movimentos de todos os corpos celestes, não importando a sua complexidade, poderiam ser explicados, em princípio, a partir das Leis fundamentais da Mecânica e da Gravitação Universal de Newton. A mecânica Newtoniana foi, sem dúvida, o grande triunfo do método científico. Nunca antes a razão humana pudera compreender de uma maneira tão íntima uma gama tão vasta de fenômenos.

O extraordinário e inédito poder de síntese das Leis de Newton as destacava de todos os outros modelos propostos anteriormente para a descrição de qualquer outro fenômeno natural. Não foi sem espanto que o Homem constatou a inexplicável eficiência destas regras matemáticas na descrição dos fenômenos naturais, como nos relata o grande matemático francês do século XX, Henri Poincaré: "*A análise matemática (...) não seria apenas um jogo da mente? Seria apenas uma linguagem conveniente ao físico? Não seria este um auxílio medíocre e, estritamente falando, dispensável? E não seria de se temer que essa linguagem artificial fosse um véu interposto entre a realidade e a visão do físico? Longe disso; sem essa linguagem, a maior parte das analogias íntimas das coisas teria ficado para sempre desconhecidas por nós; e teríamos ignorado eternamente a harmonia interna do mundo, que é (...) a única realidade objetiva verdadeira*"[**?**].

Um dos grandes nomes associados à disseminação e aplicação das Leis de Newton foi o do matemático e astrônomo francês Pierre-Simon Laplace. Sua obra *Mécanique Céleste*, o tratado fundamental usado por várias gerações de cientistas, moldou a concepção mecânica do universo, presente de forma marcante em nosso cotidiano até os dias de hoje. As bases matemáticas e geométricas para as análises das pequenas discrepâncias na órbitas Keplerianas discutidas acima vieram da obra de Laplace. Sua Mecânica Analítica era capaz de explicar todos aqueles movimentos, periódicos ou não, dos corpos celestes que despertaram o interesse a admiração do Homem desde os primórdios da civilização. A crença de Laplace no determinismo[8] e sua confiança[9] nas Leis de Newton levaram-no a afirmar o seguinte em seu *Essai philosophique sur les probabilités* de 1814: "*Pode-se considerar o estado presente do universo como um efeito do seu passado e uma causa do seu futuro. Uma inteligência que, num certo momento, soubesse todas as forças que atuam na natureza, a posição de tudo que a compõe, que fosse capaz de analisar todos estes dados e representar numa única fórmula o movimento de todos os corpos do universo, dos maiores aos menores; para esta inteligência, nada seria incerto e o futuro seria, como o passado, presente ante os seus olhos*".

Essa inteligência a qual se refere Laplace foi chamada, por seus sucessores, de *Demônio de Laplace*. Se ela existisse, nosso livre-arbítrio seria apenas uma ilusão, o que não é uma grande surpresa se o determinismo for admitido como universalmente válido. Nossas ações futuras, nossos pensamentos, tudo isso poderia ser previsto pelo Demônio de Laplace se este conhecesse as leis que regem o funcionamento de nossos cérebros, suas composições, seus estados exatos num dado instante de tempo e suas interrelações com o universo a nossa volta. A possível existência ou não deste Demônio foi assunto de vários

[8]Corrente filosófica segundo a qual todo e qualquer evento é causalmente determinado por uma cadeia de eventos anteriores.

[9]Deve-se notar a diferença entre "crença" e "confiança" nesta afirmação. A confiança nas Leis de Newton provém do seu sucesso na previsão de diversos fenômenos, em última análise, de sua *verificação* experimental em situações perfeitamente controladas. Correntes filosóficas como o determinismo do século XIX, não são passíveis, em princípio, de verificação experimental.

debates durante o século XIX. Uma resposta definitiva, porém, só chegaria no início do século XX, dos estudos de Henri Poincaré.

Felizmente, as discussões filosóficas sobre a existência e as nefastas conseqüências do Demônio de Laplace para o empreendimento humano de buscar um entendimento autêntico e profundo da natureza, não impediram o avanço nas questões da mecânica celeste. As Leis de Newton, compiladas de forma magistral e inspiradora por Laplace, sugeriam que, efetivamente, todos os movimentos de todos os corpos conhecidos do sistema solar[10] poderiam ser descritos por leis relativamente simples. Cada planeta, por exemplo, teria sua órbita descrita por uma equação que poderia ser obtida da segunda lei de Newton e das forças de atração gravitacional do Sol e dos outros planetas. Teríamos, assim, uma versão restrita e muito menos pretensiosa do Demônio de Laplace. Poderíamos, em princípio, descrever o movimento futuro de todos os corpos do sistema solar se conhecêssemos seus estados de movimento num dado instante de tempo. No caso da Terra, por exemplo, o efeito da atração gravitacional dos outros planetas se manifestaria, conforme já dito, como pequenos desvios da órbita Kepleriana em torno do Sol. Porém, não poderia ser possível que estes pequenos desvios se combinassem a fim de termos uma grande mudança, da mesma maneira que com pequenos impulsos a intervalos corretos uma criança pode conseguir grandes amplitudes de movimento numa balança? Esta é a questão da estabilidade do sistema solar, que, em palavras simples, consiste em perguntar se o efeito dos outros corpos, mesmo que pequenos, poderia alterar qualitativamente a órbita Kepleriana de um planeta. A relevância desta questão é óbvia. Pequenas

[10] O Apêndice **??** contém uma descrição dos principais corpos que compõe o sistema solar.

alterações da órbita da Terra, poderiam, por exemplo, implicar em pequenas alterações na duração do ano que, acumuladas durante um grande intervalo de tempo, poderiam acarretar grande variações, implicando em mudanças climáticas catastróficas. Note que a escala de tempo da civilização humana (aproximadamente 10.000 anos) é muito pequena se comparada com as escalas de tempo dos fenômenos celestes. Tais pequenas variações podem estar ocorrendo, sendo imperceptíveis em escalas humanas.

Em 1887, como parte das comemorações do sexagésimo aniversário do Rei Oscar II da Suécia, foi instituído um prêmio para quem respondesse à questão da estabilidade do sistema solar. Poincaré apresentou uma monografia sobre o problema dos três corpos, uma versão mais simples do problema do sistema solar que consiste em considerar apenas três corpos que se movem sob mútua atração gravitacional. Poincaré mostrou que os corpos podem se mover de maneira caótica, o que significa que pequenas imprecisões das posições iniciais dos corpos podem acarretar evoluções temporais radicalmente diferentes. Como qualquer dado observacional contém necessariamente imprecisões associadas, seria impossível fazer previsões sobre o estado futuro de sistemas como os dos três corpos. A monografia de Poincaré inaugura o estudo das dinâmicas caóticas e praticamente elimina a possibilidade de um Demônio de Laplace. Mesmo que existisse, sua capacidade de descrever o futuro seria minada pelas características da dinâmica caótica típica dos sistemas complexos.

Somente em anos recentes foi possível abordar o problema realístico da estabilidade do sistema solar como posto pelo prêmio oferecido pelo Rei Oscar II. A conclusão é que os planetas internos (Marte, Terra, Vênus e Mercúrio) têm órbitas irregulares, ou caóticas. Uma imprecisão de 15 metros na posição da Terra hoje faz com que seja impossível prever seu estado de movimento daqui a 100 milhões de anos, podendo, inclusive, ser ejetada do sistema solar[11]. Os planetas externos parecem ter órbitas regulares.

A mecânica newtoniana é um dos dois pilares da Física Clássica; ao outro, o eletromagnetismo de Maxwell, será dedicado o próximo capítulo.

[11] O leitor deve notar que não há motivos para pânico. Não é claro se, dentro de 100 milhões de anos, o Sol ainda poderá nos proporcionar energia como o fez até agora...