FMA303 - ELETROMAGNETISMO I - Lista de exercícios 1 (Revisão)

1) Seja $\overrightarrow{r}$ o vetor posição, de módulo r , a partir da origem $x = 0, y = 0, z = 0$ e sejam $\overrightarrow{J}$ um vetor constante qualquer, $\phi(x, y, z)$ e $\psi(x, y, z)$ dois campos escalares e sejam $\overrightarrow{A}(x, y, z)$ e $\overrightarrow{B}(x, y, z)$ dois campos vetoriais não singulares. Mostre que:

1. $\nabla \cdot \overrightarrow{r} = 3$
2. $\nabla \times \overrightarrow{r} = 0$
3. $\nabla r = \frac{\overrightarrow{r}}{r}$
4. $\nabla \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$
5. $\nabla \cdot \frac{\overrightarrow{r}}{r^3} = -\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 4\pi\delta(\overrightarrow{r})$
6. $\nabla \cdot \frac{\overrightarrow{J}}{r} = \overrightarrow{J} \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{r}\right)\right] = -\frac{(\overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{r})}{r^3}$
7. $\nabla \times \left[\overrightarrow{J} \times \left(\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\right)\right] = -\nabla \left[\frac{(\overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{r})}{r^3}\right]$ se $r \neq 0$
8. $\nabla^2 \left(\frac{\overrightarrow{J}}{r}\right) = \overrightarrow{J} \cdot \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right)$ se $r \neq 0$
9. $\nabla (\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$
10. $\nabla \cdot \left(\phi\overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{A} \cdot \nabla\phi + \phi\nabla \cdot \overrightarrow{A}$
11. $\nabla \times \left(\phi\overrightarrow{A}\right) = \phi\nabla \times \overrightarrow{A} - \overrightarrow{A} \times \nabla\phi$
12. $\nabla \cdot \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{B} \cdot \left(\nabla \times \overrightarrow{A}\right) - \overrightarrow{A} \cdot \left(\nabla \times \overrightarrow{B}\right)$
13. $\nabla \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{A} \left(\nabla \cdot \overrightarrow{B}\right) - \overrightarrow{B} \left(\nabla \cdot \overrightarrow{A}\right) + \left(\overrightarrow{B} \cdot \nabla\right) \overrightarrow{A} - \left(\overrightarrow{A} \cdot \nabla\right) \overrightarrow{B}$
14. $\nabla \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{A} \times \left(\nabla \times \overrightarrow{B}\right) + \overrightarrow{B} \times \left(\nabla \times \overrightarrow{A}\right) + \left(\overrightarrow{B} \cdot \nabla\right) \overrightarrow{A} + \left(\overrightarrow{A} \cdot \nabla\right) \overrightarrow{B}$

15. $\nabla^2 \overrightarrow{A} = \nabla \left(\nabla \cdot \overrightarrow{A} \right) - \nabla \times \left(\nabla \times \overrightarrow{A} \right)$

16. $\nabla \times \nabla \phi = 0$

17. $\nabla \cdot \left(\nabla \times \overrightarrow{A} \right) = 0$

2) Seja $\overrightarrow{J}\left(\overrightarrow{r}\right)$ um campo vetorial limitado no infinito. Mostre que a seguinte integral é zero:

$$I = \int \left(\overrightarrow{J}\left(\overrightarrow{r'} \right) \cdot \nabla \right) \left(\nabla \frac{1}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} \right) d^3 r'$$