Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Física-Matemática II
Segunda Lista de Exercícios
Data de entrega: 13 de outubro de 2021

Prof. J. C. A. Barata

---

1) Seja a bem conhecida *expansão binomial*

$$(1+x)^{\alpha} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1-k)_k}{k!}\, x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)}\, x^k \;, \tag{1}$$

válida para $x \in \mathbb{C}$ com $|x| < 1$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, onde, para $x \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, $(x)_n$ são os *símbolos de Pochhammer*, definidos por $x \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(x)_n \;:=\; \begin{cases} x(x+1)\cdots(x+n-1) \;=\; \prod_{l=0}^{n-1}(x+l)\;, & n \;\geq\; 1\;, \\ \\ 1\;, & n \;=\; 0\;. \end{cases} \tag{2}$$

Demonstre (1) resolvendo a equação diferencial

$$(1+x)y' - \alpha y \;=\; 0$$

com a condição $y(0) = 1$. *Sugestão.* Verifique que $(1+x)^{\alpha}$ é solução da equação diferencial acima e satisfaz $y(0) = 1$. Depois resolva a mesma equação, procurando soluções na forma de uma série de potências na região $|x| < 1$.

Mostre que quando $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, um inteiro não-negativo, a solução reduz-se a um polinômio, a saber, aquele definido pelo *binômio de Newton*:

$$(1+x)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \;.$$

---

2) [Potencial de um anel uniformemente carregado] Determine o potencial elétrico $\phi(r,\ \theta)$ produzido no vácuo por um anel unidimensional de raio R, uniformemente carregado com carga elétrica total Q e densidade linear de carga $\lambda = Q/(2\pi R)$, nas seguintes regiões:

a) $r > R$.

b) $r < R$.

c) $r = R$, mas $\theta \neq \pi/2$.

As variáveis r e θ referem-se ao sistema de coordenadas esféricas cuja origem é o centro do anel e cujo eixo z, a partir de onde o ângulo θ é medido, coincide com o eixo de simetria do anel.

Sugestão 1. Calcule primeiramente o potencial ao longo do eixo de simetria. Para os demais pontos use a solução da equação de Laplace com simetria azimutal:

$$\phi(r,\ \theta)\ =\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos(\theta))\ . \tag{3}$$

Os coeficientes A_n e B_n são fixados pela solução ao longo do eixo de simetria (que correspondem a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$).

Sugestão 2. Para $x \in \mathbb{C}$ com $|x| < 1$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, vale a expansão binomial (1). Em particular, para $|t| < 1$, tem-se

$$(1+t)^{-1/2}\ =\ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k\ , \qquad \text{com} \qquad \alpha_k\ =\ (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\ .$$

---

3) [Potencial de um disco uniformemente carregado] Determine o potencial elétrico $\phi(r,\ \theta)$ produzido no vácuo por um *disco* de raio R, uniformemente carregado com carga elétrica total Q e densidade superficial de carga $\sigma = Q/(\pi R^2)$, nas seguintes regiões:

a) $r > R$.

b) $r < R$, mas $0 \leq \theta < \pi/2$.

c) $r < R$, mas $\pi/2 < \theta \leq \pi$.

As variáveis r e θ referem-se ao sistema de coordenadas esféricas cuja origem é o centro do disco e cujo eixo z, a partir de onde o ângulo θ é medido, coincide com o eixo de simetria do disco.

d) Obtenha o potencial $\phi(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}|z| = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} r|\cos\theta|$ de um plano infinito uniformemente carregado de densidade superficial de carga σ tomando o limite $R \to \infty$ da solução acima.

Sugestões. Calcule primeiramente o potencial ao longo do eixo de simetria. Para os demais pontos use a solução da equação de Laplace com simetria azimutal (3). Use também a expansão binomial (1).

Lembre-se também que sobre o semi-eixo $z > 0$, onde $\theta = 0$, tem-se $z^{2n} = r^{2n} P_{2n}(\cos(0))$ para todo $n \geq 0$ e $|z| = +rP_1(\cos(0))$. Porém, sobre o semi-eixo $z < 0$, onde $\theta = \pi$, tem-se $z^{2n} = r^{2n} P_{2n}(\cos(\pi))$ para todo $n \geq 0$ mas $|z| = -rP_1(\cos(\pi))$. Esse último sinal "-" é importante para distinguir as soluções dos itens b e c e obter o potencial correto no item d.

---

4) Determine a solução geral da equação de Airy $y''(x) - xy(x) = 0$ na forma de uma expansão em série $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Determine a região de convergência da solução encontrada.

Nota. A equação de Airy surge em problemas de Mecânica Quântica (partícula em uma dimensão submetida a um potencial linear).

---

5) [Polinômios de Laguerre] Para solução da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio em coordenadas esféricas é de importância determinar as soluções da *equação de Laguerre*

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y\ =\ 0.$$

a) Procure uma solução na forma de séries de potência $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Mostre que, adotando-se $c_0 = 1$, tem-se

$$y_1(x) \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{(k!)^2}\, x^k \;.$$

b) Mostre que para $\lambda = n$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ a série acima colapsa a um polinômio de grau n:

$$l_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k}\, x^k.$$

Os chamados *polinômios de Laguerre* $L_n(x)$ são definidos por $L_n(x) = n!l_n(x)$, ou seja,

$$L_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} \binom{n}{k}\, x^k$$

e são, portanto, soluções de

$$xy'' + (1-x)y' + ny \;=\; 0,$$

$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

A equação de Laguerre tem uma segunda solução, a qual apresenta uma singularidade logarítmica em $x = 0$ e da qual não trataremos aqui. Vamos por ora continuar estudando os polinômios de Laguerre.

c) Mostre que

$$L_n(x) \;=\; e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

Sugestão. Use a regra de Leibniz para diferenciação:

$$(fg)^{(n)} \;=\; \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(n-p)} g^{(p)}.$$

d) Usando a expressão do item *c*, mostre, fazendo integração por partes, que

$$\int_0^\infty e^{-x} x^k L_n(x)\, dx \;=\; 0$$

para $0 \leq k < n$.

e) Conclua, usando o resultado provado no item *d*, que os polinômios de Laguerre satisfazem as relações de ortogonalidade

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx \;=\; 0$$

para $m \neq n$.

f) Mostre que

$$\int_0^\infty e^{-x} (L_n(x))^2\, dx \;=\; (n!)^2.$$

g) Mostre que os *polinômios de Laguerre associados*

$$L_n^{(m)}(x) \ = \ \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) \ = \ \frac{d^m}{dx^m} \left(e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \right)$$

são soluções da equação de Laguerre associada:

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y \ = \ 0.$$

Sugestão: Diferencie m vezes a equação de Laguerre.

Nota. Os polinômios de Laguerre associados surgem na resolução da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio em coordenadas esféricas.

h) Mostre que

$$L_n^{(m)}(x) \ = \ (-1)^m \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \frac{n!}{k!} \binom{n}{m+k} \ x^k.$$

---

6) [Polinômios de Tschebyscheff] Considere as seguintes funções definidas no intervalo $[-1, \ 1]$:

$$T_n(x) \ := \ \cos\big(n \arccos(x)\big) \ , \quad x \in [-1, \ 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Demonstre as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x) \, T_m(x) \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \ = \ 0 \quad \text{para } n \neq m.$$

Sugestão: faca a mudança de variável $x = \cos y$.

b) Prove que $T_n(x)$ é, surpresa, um *polinômio* de grau n. Esses polinômios são chamados de Polinômios de Tschebyscheff.
