INTRODUÇÃO À GRAVITAÇÃO E À COSMOLOGIA

Victor O. Rivelles
–
Aula 1

Instituto de Física da Universidade de São Paulo
e-mail: rivelles@fma.if.usp.br
`http://www.fma.if.usp.br/~rivelles`

Escola Norte-Nordeste de Partículas e Campos
J. Pessoa, 10-14/08/2009

ROTEIRO

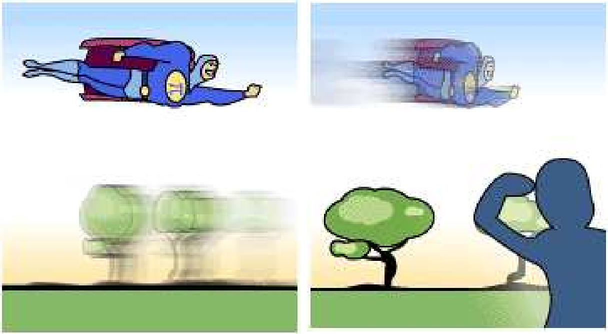
- Relatividade Restrita
- Geometria Diferencial
- Relatividade Geral
- Efeitos da Relatividade Geral
- Cosmologia

BIBLIOGRAFIA

- M. Gleiser, A Dança do Universo (Cia. das Letras, 1997)
- S. Hawking, O Universo Numa Casca de Noz (Mandarim, 2001)
- S. Weinberg, Os Três Primeiros Minutos (Guanabara Dois, 1980)
- A. Guth, O Universo Inflacionário (Campus, 1997)
- S. Weinberg, Gravitation and Cosmology (Wiley, 1972)
- B. F. Schutz, A First Course in General Relativity (Cambridge, 1985)
- J. Foster and J. D. Nightingale, A Short Course in General Relativity (Springer, 1995)
- L. D. Landau and E. M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields (Pergamon Press, 1975)
- C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, Gravitation (Freeman, 1973)

RELATIVIDADE RESTRITA

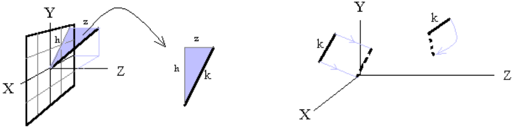
- Formulada por Einstein em 1905.
- A velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial inercial.
- Contração de Lorentz: comprimentos dependem do observador
  $\ell = \ell_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$



RELATIVIDADE RESTRITA

- Dilatação temporal: intervalos de tempo dependem do observador. $t = \frac{t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
- A relatividade restrita muda a geometria: geometria de Minkowski.
- Na geometria Euclidiana: comprimentos são constantes.

Figure 2: Invariance in a 3D Euclidean space.



The length of an object in a three dimensional coordinate system is given by the 3D version of Pythagoras' theorem:

$k^2 = h^2 + z^2$ but $h^2 = x^2 + y^2$

$k^2 = x^2 + y^2 + z^2$

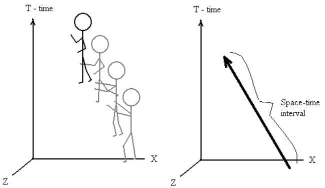
In a three dimensional coordinate system it seems that the real length of a thing stays the same (is INVARIANT) during translations and rotations. It appears to be always given by:

$k^2 = x^2 + y^2 + z^2$

RELATIVIDADE RESTRITA

- Na relatividade restrita: comprimentos e intervalos de tempo dependem do observador.
- Há alguma quantidade que é constante e não depende do observador?

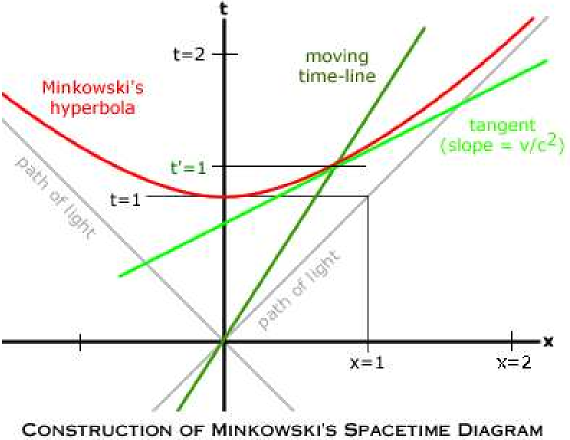
Figure 3: The invariant space-time interval.



Motions can be represented as lengths spanning both space and time in a coordinate system. These lengths are called SPACE-TIME INTERVALS. Time can be considered to be yet another direction for arranging things. This suggests that the universe could be four dimensional. If the universe is truly four dimensional then space-time intervals would be invariant when things move .

- Intervalo $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$
- Espaço e tempo formam o espaço-tempo quadridimensional com geometria de Minkowski.
- Unidades Naturais $c = 1$: o tempo é medido em metros!

DIAGRAMAS DO ESPAÇO-TEMPO



O intervalo pode ser considerado um vetor típico com componentes:

$$(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Notação: $(\Delta x^\mu) = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3), \quad x^0 = ct, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$
As componentes de um vetor dependem do sistema de coordenadas. Transformação de Lorentz na direção-x:

$$\begin{aligned}
\Delta x'^0 &= \gamma(\Delta x^0 - v\Delta x^1) \\
\Delta x'^1 &= \gamma(\Delta x^1 - v\Delta x^0) \\
\Delta x'^2 &= \Delta x^2, \quad \Delta x'^3 = \Delta x^3, \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}, \quad c = 1
\end{aligned}$$

Reescrevendo em forma mais compacta:

$$\Delta x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu \Delta x^\nu, \qquad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Convenção da soma:
Índices repetidos significa somatória sobre tal índice: $\Delta x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Delta x^\nu$

GEOMETRIA DE MINKOWSKI

Quadri-vetor A^μ se transforma como o intervalo: $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\mu$
Vetores de base: e_μ (4 vetores de base)

$$A = A^0 e_0 + A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 = A^\mu e_\mu$$

$$\begin{aligned} e_0 &= (1,0,0,0) \\ e_1 &= (0,1,0,0) \\ e_2 &= (0,0,1,0) \\ e_3 &= (0,0,0,1) \end{aligned}$$

Produto escalar de dois vetores: $A \cdot B = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$
Norma de um vetor não é sempre positiva definida!
$A \cdot A = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2$
Ortogonalidade: Se $A \cdot B = 0$ não significa que são perpendiculares:
P. ex. $n = e_0 + e_1$ tem $n \cdot n = -1 + 1 + 2.0 = 0$ e não é o vetor zero!

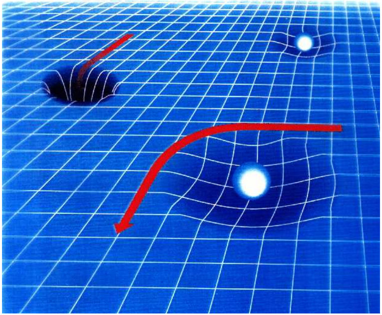
GRAVITAÇÃO NA RELATIVIDADE RESTRITA

- A força gravitacional Newtoniana propaga-se instantâneamente.

- É necessário conciliar a relatividade restrita com a gravitação.
- Einstein demorou 10 anos para compatibilizar a relatividade restrita com a gravitação.
- E o resultado foi:

RELATIVIDADE GERAL

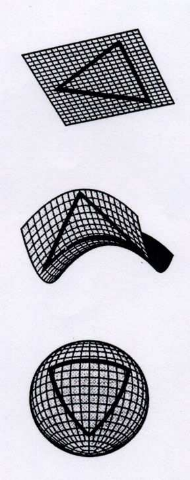
Relatividade geral = teoria da gravitação relativística



- Não há força gravitacional.
- A gravitação devido à curvatura do espaço.
- Matéria causa a curvatura do espaço.
- A curvatura determina o movimento da matéria.
- Objeto fundamental: métrica $g_{\mu\nu}$
- Determina todas as propriedades locais do espaço curvo.

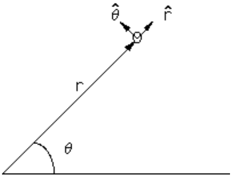
ESPAÇOS CURVOS

- O que é um espaço curvo?
- Geometria Euclidiana: soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.
- Geometria Riemanniana: a soma pode ser diferente!
- Sem curvatura: igual à 180 graus.
- Curvatura positiva: maior que 180 graus.
- Curvatura negativa: menor que 180 graus.
- Geometria extrínsica X geometria intrínsica



ESPAÇO EUCLIDIANO EM 3 DIMENSÕES

- Sistema de coordenadas Cartesiano (x, y, z)
- Vetores unitários ortogonais $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
- Sistema de coordenadas arbitrário (u, v, w)
- P. ex. esféricas (r, θ, ϕ). Não precisam ser ortogonais.



- Transformação de coodenadas:

$$\begin{aligned} x &= x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w) \\ u &= u(x,y,z), \quad v = v(x,y,z), \quad w = w(x,y,z) \end{aligned}$$

- Vetor posição $\vec{r} = x(u,v,w)\ \vec{i} + y(u,v,w)\ \vec{j} + z(u,v,w)\ \vec{k}$

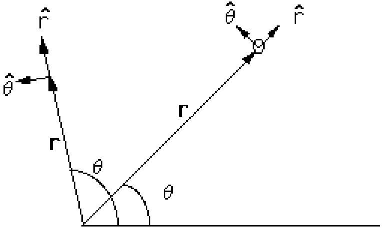
ESPAÇO EUCLIDIANO EM 3 DIMENSÕES

- Base natural no novo sistema de coordenadas:

$$\vec{e}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{e}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad \vec{e}_w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$$

  Em geral não são normalizados e nem ortogonais.

- Base dual: tomando-se o gradiente



$$\begin{aligned} \vec{e}^u &= \vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{z} \\ \vec{e}^v &= \vec{\nabla} v = \ldots, \quad \vec{e}^w = \vec{\nabla} w = \ldots \end{aligned}$$

- Para um sistema de coordenadas ortogonal base dual = base natural, mas, em geral, são diferentes.
- Notação: coordenadas $u^i = (u, v, w), \quad i = 1, 2, 3$
- base natural $e_i = (\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$
- base dual $e^i = (\vec{e}^u, \vec{e}^v, \vec{e}^w)$

ESPAÇO EUCLIDIANO EM 3 DIMENSÕES

- Expansão de um vetor $\vec{v} = v^i \vec{e}_i = v_i \vec{e}^i$
- v^i componentes contravariantes de $\vec{v}$
- v_i componentes covariantes de $\vec{v}$
- Vetor posição infinitesimal $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} du^i = \vec{e}_i du^i$
- Norma $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j du^i du^j = g_{ij} du^i du^j$
- $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ é a métrica no sistema de coordenadas dado.

Coordenadas Cartesianas

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Coordenadas esféricas

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

ESPAÇO EUCLIDIANO EM 3 DIMENSÕES

- Tranformação de coordenadas: (u, v, w) para $(u', v' : w')$

$$\vec{e}_i = \frac{\partial u'^j}{\partial u^i}\vec{e}'_j, \quad \vec{e}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j}\vec{e}'^j$$
$$v'^i = \frac{\partial u'^i}{\partial u^j}v^j, \quad v'_i = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i}v_j$$

- Tensor tipo (r, s) contravariante de ordem r e covariante de ordem s:

$$T'^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = \frac{\partial u'^{i_1}}{\partial u^{k_1}} \cdots \frac{\partial u^{l_1}}{\partial u'^{j_1}} \cdots T^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s}$$

- A métrica é um tensor covariante de segunda ordem.
- Isto é o cálculo tensorial no espaço Euclidiano.
- Pode ser estendido para a relatividade restrita.

CÁLCULO TENSORIAL NA RELATIVIDADE RESTRITA

- Coordenadas $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$
- Métrica de Minkowski $ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Componentes contravariantes e covariante de um vetor
  $A_0 = -A^0, \quad A_1 = A^1, \quad A_2 = A^2, \quad A_3 = A^3$
- Tranformações de coordenadas relevantes: transformações de Lorentz