INTRODUÇÃO À GRAVITAÇÃO E À COSMOLOGIA

Victor O. Rivelles
–

Aula 2

Instituto de Física da Universidade de São Paulo
e-mail: rivelles@fma.if.usp.br
http://www.fma.if.usp.br/~rivelles

Escola Norte-Nordeste de Partículas e Campos
J. Pessoa, 10-14/08/2009

Revisão

- Relatividade restrita: intervalo $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2$
- Geometria de Minkowski: espaço-tempo 4 dimensões.
- Relatividade geral: força de gravitação é substituída pela curvatura do espaço-tempo
- Sistema de coordenadas arbitrário: base natural $e_i = (\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$ e base dual $e^i = (\vec{e}^u, \vec{e}^v, \vec{e}^w)$
- Expansão de um vetor $\vec{v} = v^i \vec{e}_i = v_i \vec{e}^i$; v^i componentes contravariantes de $\vec{v}$ e v_i componentes covariantes de $\vec{v}$
- Norma $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = g_{ij} du^i du^j$ onde $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ é a métrica no sistema de coordenadas dado.
- Tensor tipo (r, s) contravariante de ordem r e covariante de ordem s:

$$T'^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = \frac{\partial u'^{i_1}}{\partial u^{k_1}} \cdots \frac{\partial u^{l_1}}{\partial u'^{j_1}} \cdots T^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s}$$

- Cálculo tensorial no espaço Euclidiano e Minkowski.

GRAVITAÇÃO NA RELATIVIDADE RESTRITA

- Na RR o intervalo $\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu$ é definido fisicamente em termos de relógios e réguas.
- Na RR todos os relógios tem a mesma taxa de variação do tempo num referencial inercial.
- Num campo gravitacional isso deixa de ser verdade!
- Partícula de massa m é largada no topo da torre de altura h.
- Atinge o solo com velocidade $v = \sqrt{2gh}$.
- Energia no solo
  $E = m + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots = m + mgh + \ldots$.
- Quando atinge o solo a partícula transforma-se num fóton que propaga-se para cima.
- Quando chega no topo da torre com energia E' transforma-se novamente numa partícula de massa $m' = E'$.
- A energia deve ser conservada portanto
  $E' = m' = m$.

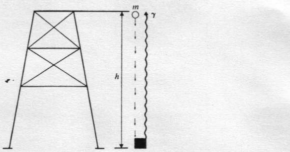


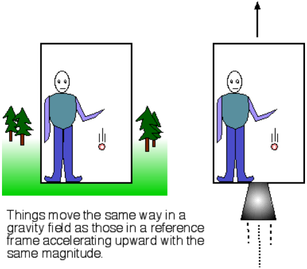
Fig. 5.1 A mass m is dropped from a tower of height h. The total mass at the bottom is converted into energy and returned to the top as a photon. Perpetual motion will be performed unless the photon loses as much energy in climbing as the mass gained in falling. Light is therefore redshifted as it climbs in a gravitational field.

$$\frac{E'}{E} = \frac{h\nu'(\text{topo})}{h\nu(\text{base})} = \frac{m}{m + mgh + \ldots} = 1 - gh + \ldots$$

Portanto o fóton no caminho de volta perde energia e terá um redshift pois $\nu' < \nu$.

O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

- Esse é o chamado redshift gravitacional e é verificado experimentalmente.
- Portanto, o referencial ligado a Terra não é um referencial inercial pois os fótons (relógios) no campo gravitacional não medem o tempo com a mesma taxa de variação.
- Um referencial acelerado simula um campo gravitacional uniforme.
- Princípio da Equivalência: campo gravitacional uniforme é localmente equivalente a um referencial acelerado uniformemente
- A equivalência só é válida localmente.



Things move the same way in a gravity field as those in a reference frame accelerating upward with the same magnitude.

O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

- Vamos reanalisar o redshift gravitacional num referencial em queda livre.
- O referencial está inicialmente em repouso quando o fóton começa a subir.
- O fóton percorre uma distância h no tempo $\Delta t = h, (c = 1)$.
- Nesse tempo o referencial adquire velocidade gh para baixo.
- A frequência do fóton no referencial em queda livre pode ser obtida pela fórmula do efeito Doppler $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}}$

$$\frac{\nu(\text{topo})}{\nu'(\text{topo})} = \frac{1 - gh}{\sqrt{1 - g^2h^2}} = 1 - gh + \ldots$$

- Portanto, no referencial em queda livre

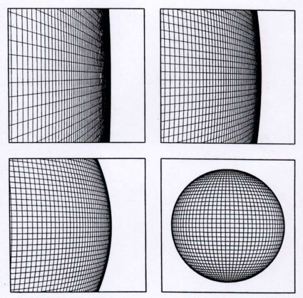
$$\frac{\nu(\text{base})}{\nu'(\text{topo})} = \frac{\nu(\text{base})}{\nu(\text{topo})}\frac{\nu(\text{topo})}{\nu'(\text{topo})} = (1 + gh)(1 - gh) = 1 + \ldots$$

- E não há redshift no referencial em queda livre!

GEOMETRIA DO ESPAÇO-TEMPO

- Portanto um referencial em queda livre é um referencial inercial.
- Isso é válido localmente. Não existe globalmente um sistema inercial em queda livre se o campo gravitacional não for uniforme.
- Sistemas inerciais são construídos com base nas trajetórias das partículas livres.
- Na relatividade restrita devemos considerar trajetórias no espaço-tempo. Trajetórias paralelas continuam paralelas em qualquer direção: espaço-tempo de Minkowski.

- Num campo gravitacional não uniforme as trajetórias que são inicialmente paralelas deixam de ser paralelas.
- Isso dá origem à Geometria Riemanniana para espaços curvos.
- Espaços curvos são localmente planos.
- Portanto, o espaço-tempo curvo representa o efeito da gravitação na trajetória das partículas.

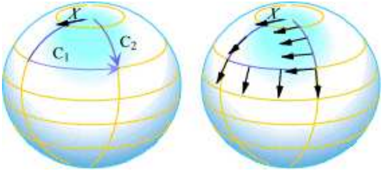


GEOMETRIA RIEMANNIANA

- Podemos estudar um espaço curvo como imerso num espaço externo maior: geometria extrínsica.
- P. ex. a superfície de uma esfera descrita com 3 coordenadas (x, y, z).
- Podemos estudar o espaço curvo sem fazer referência à um espaço externo: geometria intrínsica.
- P. ex. a superfície de uma esfera descrita com 2 coordenadas (θ, ϕ).
- Usa-se a geometria intrínsica.
- Usa-se o cálculo tensorial.
- O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ caracteriza o espaço completamente.
- Objetos geométricos como o tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}$ medem a curvatura do espaço.

$$\delta V^{\mu} = \delta x^{\rho} \delta x^{\sigma} \; R_{\rho\lambda\sigma}{}^{\mu} \; V^{\lambda}$$

- O tensor de Riemann é escrito como derivadas de $g_{\mu\nu}$ e sua inversa



GEOMETRIA RIEMANNIANA

- Símbolos do Christoffel: $\frac{\partial e_\nu}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} e_\mu$

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}(\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\rho})$$

- Tensor de Riemann:

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\tau}\Gamma^\tau_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\tau}\Gamma^\tau_{\nu\rho}$$

- Tensor de Ricci: $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$
- Escalar de curvatura: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$
- Tensor de Einstein: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$

RELATIVIDADE GERAL

- Espaço-tempo é um espaço Riemanniano com 4 dimensões e com uma métrica.
- Métrica é utilizada para medir intervalos no espaço-tempo $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.
- Métrica $g_{\mu\nu}$ pode ser escolhida, num ponto, por uma transformação de coordenadas apropriada, como a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$: princípio da equivalência.
- Partículas movem-se em geodésicas no espaço-tempo

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tau} = 0$$

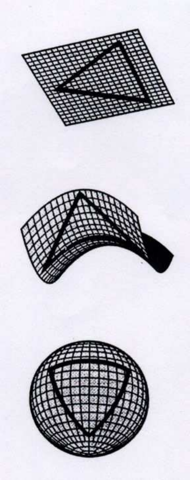
- Princípio da Covariância: Qualquer lei física que pode ser expressa em notação tensorial na relatividade restrita tem exatamente a mesma forma num sistema localmente inercial no espaço-tempo curvo.
- Equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

onde $R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}{}^{\rho}$, $\quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento que representa a matéria contida no espaço-tempo.

- As eqs. de Einstein generalizam a eq. para o potencial gravitacional Newtoniano.
- Não há sistema de coordenadas preferido pois está escrito em forma tensorial.
- São 10 eqs. para 10 incógnitas, a métrica $g_{\mu\nu}$. O número de eqs. independentes é menor.

RESUMO



- Plano: comprimento infinitesimal $ds^2 = dx^2 + dy^2$
- Esfera: comprimento infinitesimal $ds^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2$
- Superfície curva geral: $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} dx^i dx^j$
- g_{ij} é a métrica do espaço curvo
- Relatividade restrita: $ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$
- Relatividade geral: $ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
- $g_{\mu\nu}$ é a métrica do ESPAÇO-TEMPO
- Eqs. de Einstein: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}$