INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE GERAL

Victor O. Rivelles

Instituto de Física

Universidade de São Paulo

rivelles@fma.if.usp.br

http://www.fma.if.usp.br/~rivelles/

XXI Jornada de Física Teórica – 2006

ROTEIRO

Relatividade Restrita

Geometria Diferencial

Relatividade Geral

Testes da Relatividade Geral

Buracos Negros

Cosmologia

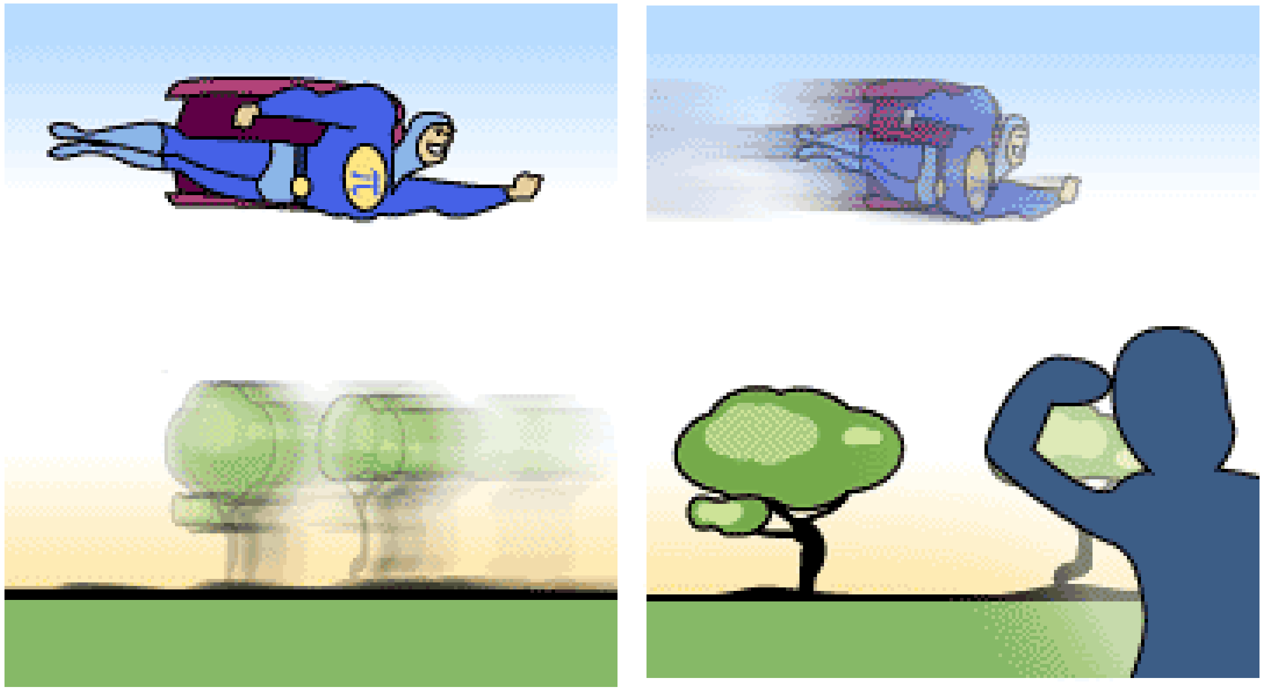
Gravitação Quântica

Referências

- M. Gleiser, A Dança do Universo (Cia. das Letras, 1997)
- S. Hawking, O Universo Numa Casca de Noz (Mandarim, 2001)
- S. Weinberg, Os Três Primeiros Minutos (Guanabara Dois, 1980)
- A. Guth, O Universo Inflacionário (Campus, 1997)
- B. Greene, O Universo Elegante (Cia. das Letras, 2001)
- S. Weinberg, Gravitation and Cosmology (Wiley, 1972)
- B. F. Schutz, A First Course in General Relativity (Cambridge, 1985)
- J. Foster and J. D. Nightingale, A Short Course in General Relativity (Springer, 1995)
- L. D. Landau and E. M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields (Pergamon Press, 1975)
- C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, Gravitation (Freeman, 1973)
- B. Zwiebach, A First Course in String Theory (Cambridge, 2004)
- http://www.fma.if.usp.br/˜rivelles/
- http://rivelles.blogspot.com

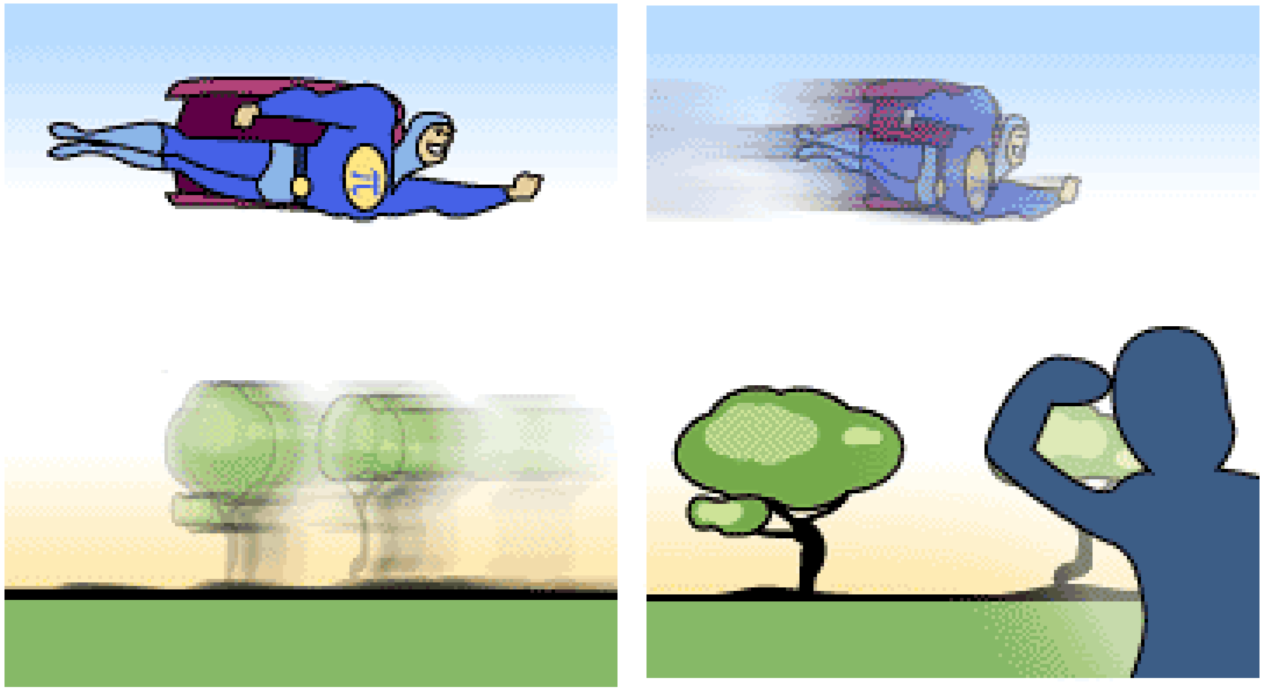
Relatividade Restrita

- Formulada por Einstein em 1905.
- A velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial inercial.



Relatividade Restrita

- Formulada por Einstein em 1905.
- A velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial inercial.
- Contração de Lorentz: comprimentos dependem do observador.
  $\ell = \ell_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$



Relatividade Restrita

- Dilatação temporal: intervalos de tempo dependem do observador.
  $t = \frac{t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

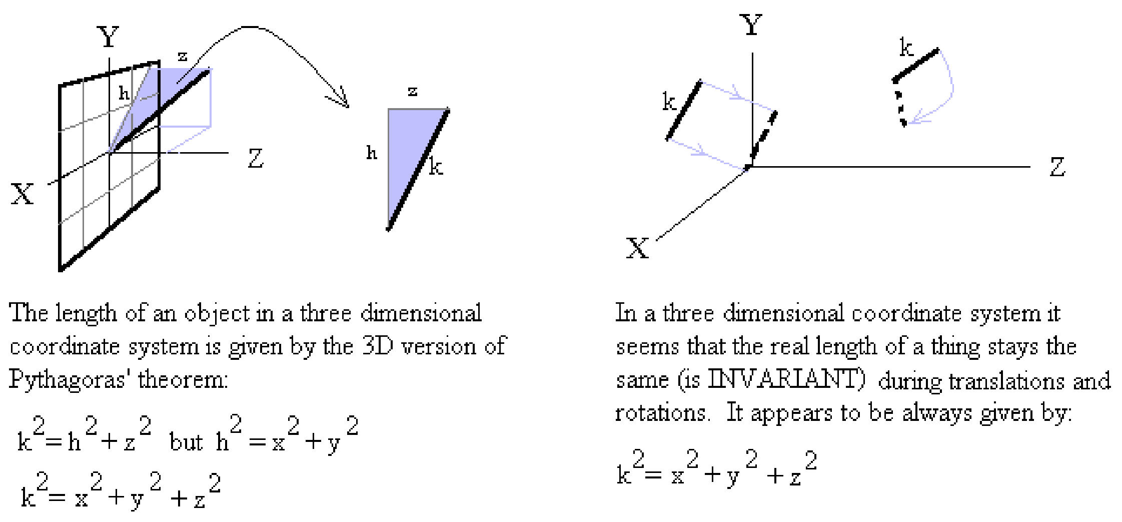
Relatividade Restrita

- Dilatação temporal: intervalos de tempo dependem do observador.
  $t = \frac{t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
- A relatividade restrita muda a geometria: geometria de Minkowski.

Relatividade Restrita

- Dilatação temporal: intervalos de tempo dependem do observador.
  $$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
- A relatividade restrita muda a geometria: geometria de Minkowski.
- Na geometria Euclidiana: comprimentos são constantes.

Figure 2: Invariance in a 3D Euclidean space.



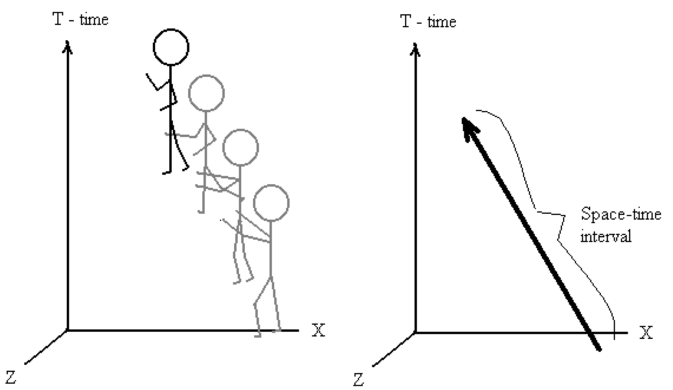
Relatividade Restrita

- Na relatividade restrita: comprimentos e intervalos de tempo dependem do observador.

Relatividade Restrita

- Na relatividade restrita: comprimentos e intervalos de tempo dependem do observador.
- Há alguma quantidade é contante e não depende do observador?

Figure 3: The invariant space-time interval.



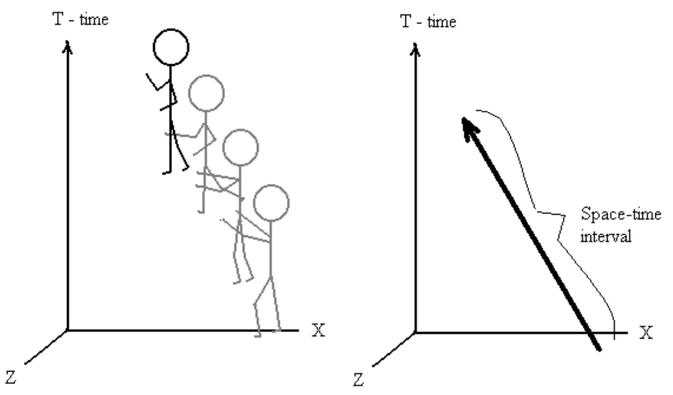
Motions can be represented as lengths spanning both space and time in a coordinate system. These lengths are called SPACE-TIME INTERVALS. Time can be considered to be yet another direction for arranging things. This suggests that the universe could be four dimensional. If the universe is truly four dimensional then space-time intervals would be invariant when things move .

- Intervalo $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2$

Relatividade Restrita

- Na relatividade restrita: comprimentos e intervalos de tempo dependem do observador.
- Há alguma quantidade é contante e não depende do observador?

Figure 3: The invariant space-time interval.



Motions can be represented as lengths spanning both space and time in a coordinate system. These lengths are called SPACE-TIME INTERVALS. Time can be considered to be yet another direction for arranging things. This suggests that the universe could be four dimensional. If the universe is truly four dimensional then space-time intervals would be invariant when things move .

- Intervalo $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2$
- Espaço e tempo formam o espaço-tempo quadridimensional com geometria de Minkowski.

Geometria de Minkowski

Intervalo pode ser considerado um vetor típico com componentes: $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Notação: $(\Delta x^\mu) = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$

Geometria de Minkowski

Intervalo pode ser considerado um vetor típico com componentes: $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Notação: $(\Delta x^\mu) = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$

Componentes de um vetor dependem do sistema de coordenadas. Transformação de Lorentz na direção-x:

$$\begin{aligned}
\Delta x'^0 &= \gamma(\Delta x^0 - v\Delta x^1) \\
\Delta x'^1 &= \gamma(\Delta x^1 - v\Delta x^0) \\
\Delta x'^2 &= \Delta x^2, \quad \Delta x'^3 = \Delta x^3, \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}, \quad c = 1
\end{aligned}$$

Geometria de Minkowski

Intervalo pode ser considerado um vetor típico com componentes: $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Notação: $(\Delta x^\mu) = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$

Componentes de um vetor dependem do sistema de coordenadas. Transformação de Lorentz na direção-x:

$$\begin{aligned}
\Delta x'^0 &= \gamma(\Delta x^0 - v\Delta x^1) \\
\Delta x'^1 &= \gamma(\Delta x^1 - v\Delta x^0) \\
\Delta x'^2 &= \Delta x^2, \quad \Delta x'^3 = \Delta x^3, \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}, \quad c = 1
\end{aligned}$$

Reescrever em forma mais compacta:

$$\Delta x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu \Delta x^\nu, \qquad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geometria de Minkowski

Intervalo pode ser considerado um vetor típico com componentes: $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Notação: $(\Delta x^\mu) = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$

Componentes de um vetor dependem do sistema de coordenadas. Transformação de Lorentz na direção-x:

$$\begin{aligned}
\Delta x'^0 &= \gamma(\Delta x^0 - v\Delta x^1) \\
\Delta x'^1 &= \gamma(\Delta x^1 - v\Delta x^0) \\
\Delta x'^2 &= \Delta x^2, \quad \Delta x'^3 = \Delta x^3, \quad \gamma = 1/\sqrt{1-v^2}, \quad c = 1
\end{aligned}$$

Reescrever em forma mais compacta:

$$\Delta x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu \Delta x^\nu, \qquad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Convenção da soma:

Índices repetidos significa somatória sobre tal índice: $\Delta x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Delta x^\nu$

Geometria de Minkowski

Vetor A^μ se transforma como o intervalo: $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\mu$

Geometria de Minkowski

Vetor A^{μ} se transforma como o intervalo: $A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\mu}$

Vetores de base: e_{μ} (4 vetores de base)

$$A = A^0 e_0 + A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 = A^{\mu} e_{\mu}$$

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, 0) \\ e_1 &= (0, 1, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Geometria de Minkowski

Vetor A^μ se transforma como o intervalo: $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\mu$

Vetores de base: e_μ (4 vetores de base)

$$A = A^0 e_0 + A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 = A^\mu e_\mu$$

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, 0) \\ e_1 &= (0, 1, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Produto escalar de dois vetores: $A \cdot B = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$

Geometria de Minkowski

Vetor A^μ se transforma como o intervalo: $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\mu$

Vetores de base: e_μ (4 vetores de base)

$$A = A^0 e_0 + A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 = A^\mu e_\mu$$

$$\begin{aligned} e_0 &= (1,0,0,0) \\ e_1 &= (0,1,0,0) \\ e_2 &= (0,0,1,0) \\ e_3 &= (0,0,0,1) \end{aligned}$$

Produto escalar de dois vetores: $A \cdot B = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$

Norma de um vetor não é sempre positiva definida!
$A \cdot A = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2$

Geometria de Minkowski

Vetor A^μ se transforma como o intervalo: $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\mu$

Vetores de base: e_μ (4 vetores de base)

$$A = A^0 e_0 + A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 = A^\mu e_\mu$$

$$\begin{aligned} e_0 &= (1,0,0,0) \\ e_1 &= (0,1,0,0) \\ e_2 &= (0,0,1,0) \\ e_3 &= (0,0,0,1) \end{aligned}$$

Produto escalar de dois vetores: $A \cdot B = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3$

Norma de um vetor não é sempre positiva definida!
$A \cdot A = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2$

Ortogonalidade: Se $A \cdot B = 0$ não significa que são perpendiculares:

P. ex. $n = e_0 + e_1$ tem $n \cdot n = -1 + 1 + 2.0 = 0$ e não é o vetor zero!

Gravitação na Relatividade Restrita

- A força gravitacional Newtoniana propaga-se instantâneamente.

Gravitação na Relatividade Restrita

- A força gravitacional Newtoniana propaga-se instantâneamente.

- É necessário conciliar a relatividade restrita com a gravitação.
- Einstein demorou 10 anos para compatibilizar a relatividade restrita com a gravitação.

Gravitação na Relatividade Restrita

- A força gravitacional Newtoniana propaga-se instantâneamente.

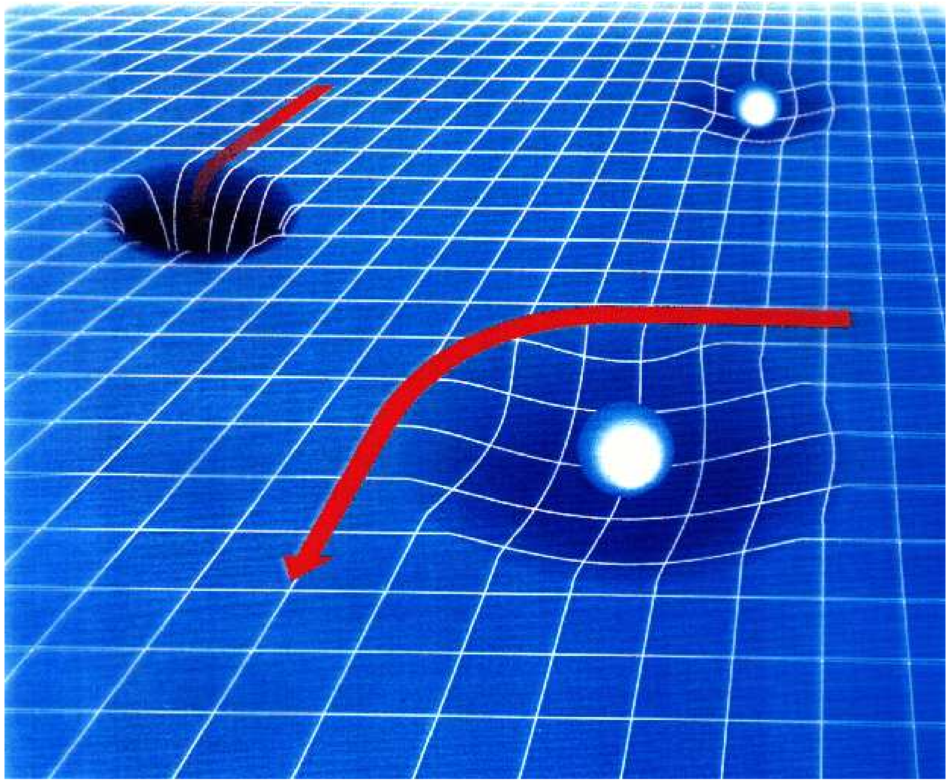
- É necessário conciliar a relatividade restrita com a gravitação.
- Einstein demorou 10 anos para compatibilizar a relatividade restrita com a gravitação.
- E o resultado é:

Relatividade Geral

Relatividade geral = teoria da gravitação relativística

Relatividade Geral

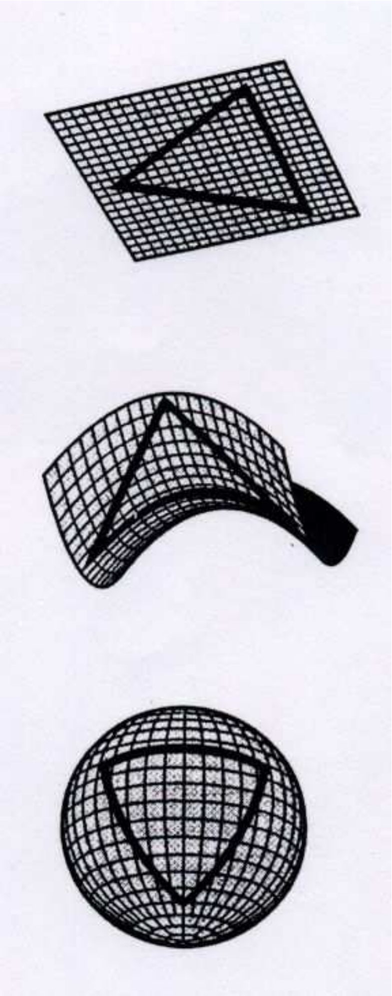
Relatividade geral = teoria da gravitação relativística



- Não há força gravitacional.
- A gravitação devido à curvatura do espaço.
- Matéria causa a curvatura do espaço.
- A curvatura determina o movimento da matéria.
- Objeto fundamental: métrica $g_{\mu\nu}$
- Determina todas as propriedades locais do espaço curvo.

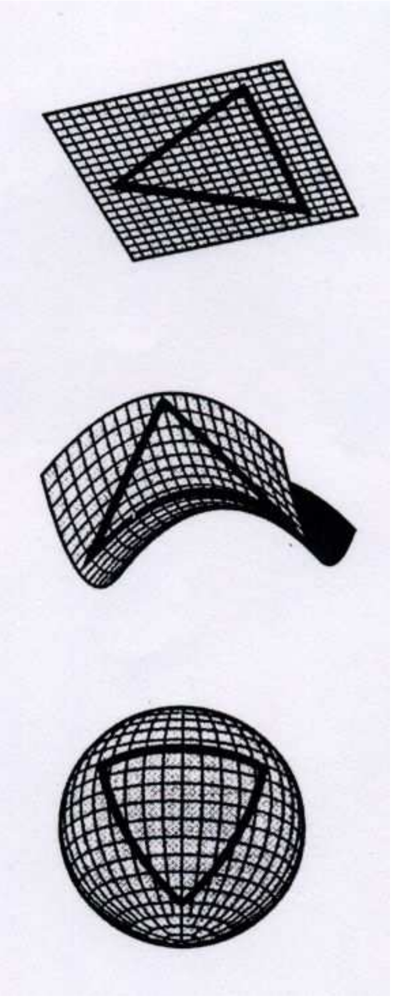
Espaços Curvos

- O que é um espaço curvo?



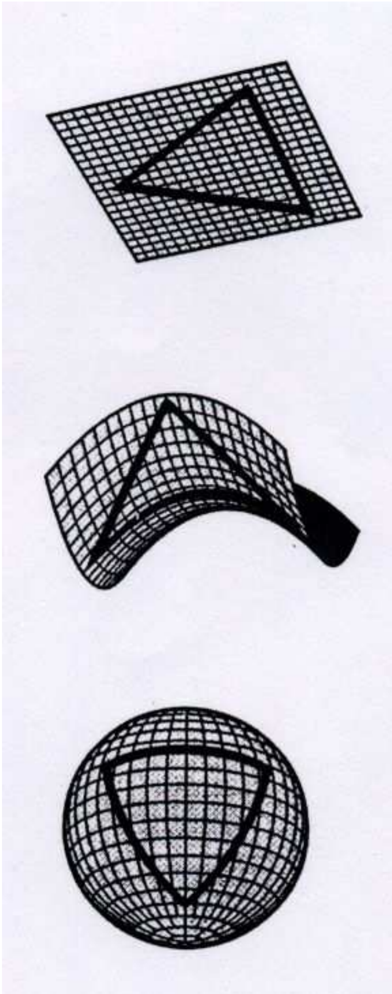
Espaços Curvos

- O que é um espaço curvo?
- Geometria Euclidiana: soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.
- Geometria Riemanniana: a soma pode ser diferente!



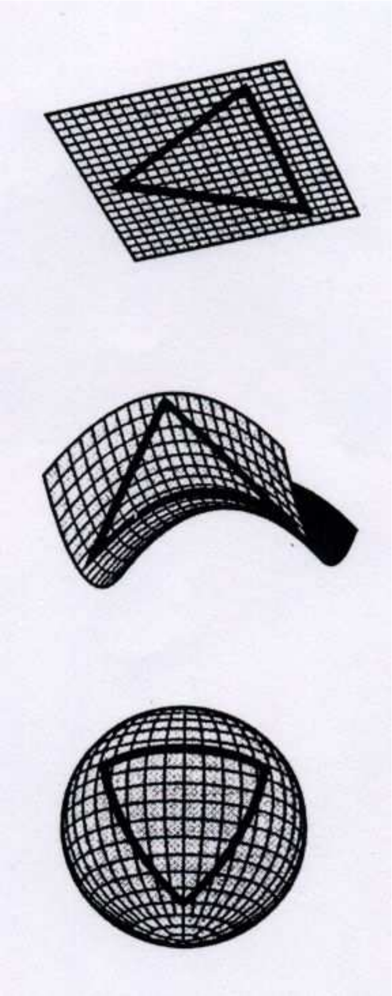
Espaços Curvos

- O que é um espaço curvo?
- Geometria Euclidiana: soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.
- Geometria Riemanniana: a soma pode ser diferente!
- Sem curvatura: igual à 180 graus.
- Curvatura positiva: maior que 180 graus.
- Curvatura negativa: menor que 180 graus.



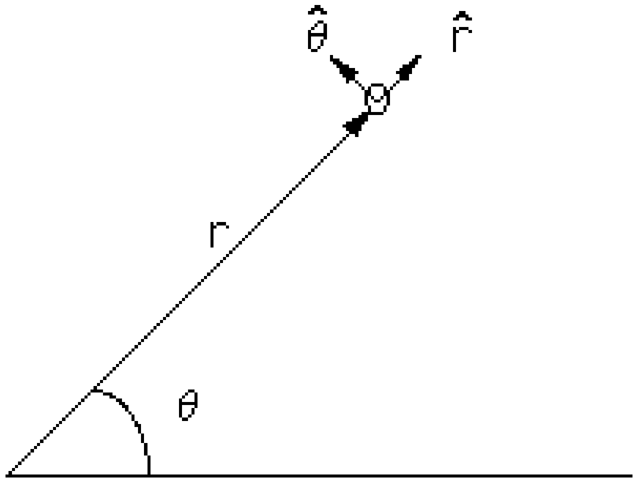
Espaços Curvos

- O que é um espaço curvo?
- Geometria Euclidiana: soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.
- Geometria Riemanniana: a soma pode ser diferente!
- Sem curvatura: igual à 180 graus.
- Curvatura positiva: maior que 180 graus.
- Curvatura negativa: menor que 180 graus.
- Geometria extrínsica X geometria intrínsica



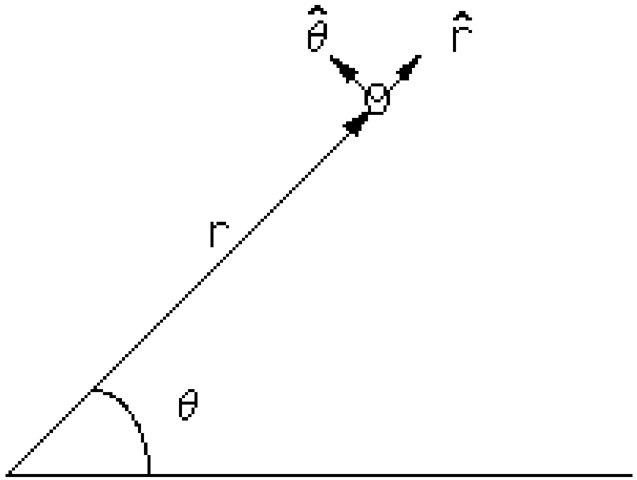
Espaço Euclidiano em 3D

Sistema de coordenadas Cartesiano (x, y, z)
Vetores unitários ortogonais $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



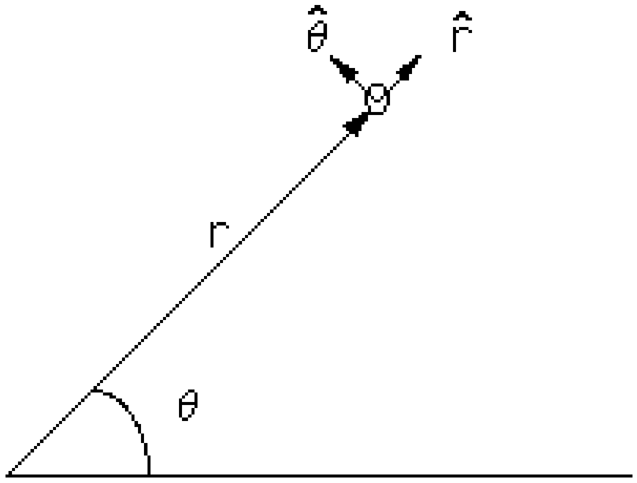
Espaço Euclidiano em 3D

Sistema de coordenadas Cartesiano (x, y, z)
Vetores unitários ortogonais $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
Sistema de coordenadas arbitrário (u, v, w)
P. ex. polares (r, θ, ϕ). Não precisam ser ortogonais.



Espaço Euclidiano em 3D

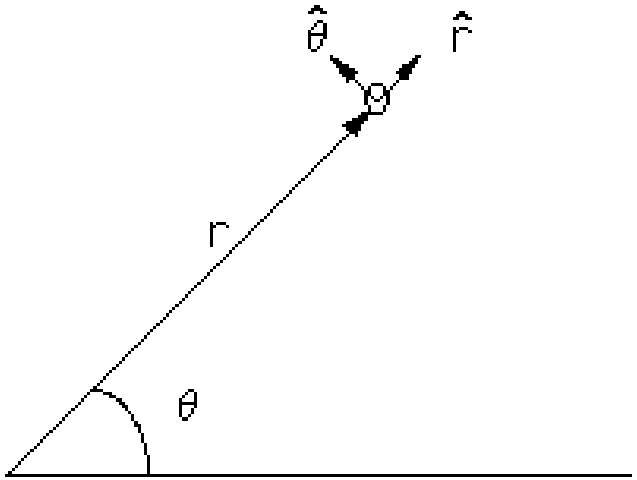
Sistema de coordenadas Cartesiano (x, y, z)
Vetores unitários ortogonais $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
Sistema de coordenadas arbitrário (u, v, w)
P. ex. polares (r, θ, ϕ). Não precisam ser ortogonais.



Transformação de coodenadas:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \\ u &= u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z) \end{aligned}$$

Espaço Euclidiano em 3D



Sistema de coordenadas Cartesiano (x, y, z)
Vetores unitários ortogonais $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
Sistema de coordenadas arbitrário (u, v, w)
P. ex. polares (r, θ, ϕ). Não precisam ser ortogonais.

Transformação de coodenadas:

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w)$$
$$u = u(x,y,z), \quad v = v(x,y,z), \quad w = w(x,y,z)$$

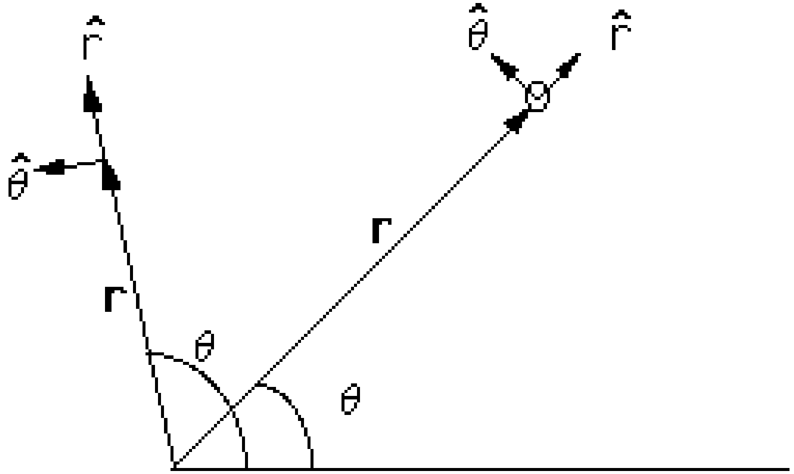
Vetor posição $\vec{r} = x(u,v,w)\ \vec{i} + y(u,v,w)\ \vec{j} + z(u,v,w)\ \vec{k}$

Espaço Euclidiano em 3D

Base natural no novo sistema de coordenadas:

$$\vec{e}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{e}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad \vec{e}_w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$$

Em geral não são normalizados e nem ortogonais.



Espaço Euclidiano em 3D

Base natural no novo sistema de coordenadas:

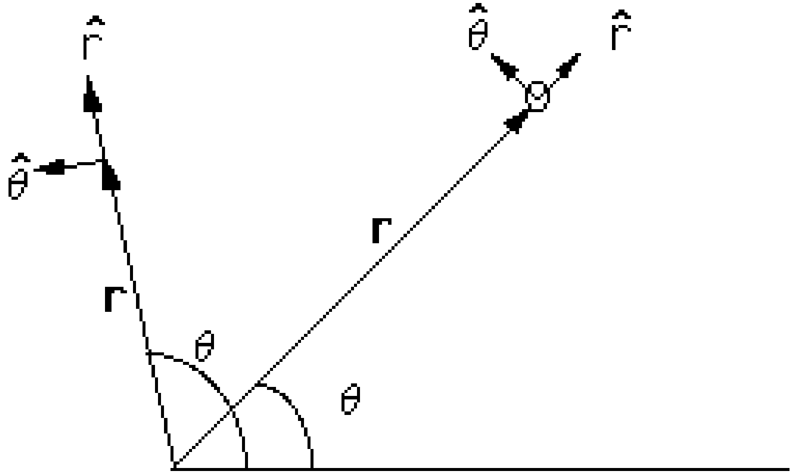
$$\vec{e}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{e}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad \vec{e}_w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$$

Em geral não são normalizados e nem ortogonais.

Base dual: tomando-se o gradiente

$$\vec{e}^u = \vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{z}$$

$$\vec{e}^v = \vec{\nabla} v = \ldots, \quad \vec{e}^w = \vec{\nabla} w = \ldots$$



Espaço Euclidiano em 3D

Base natural no novo sistema de coordenadas:

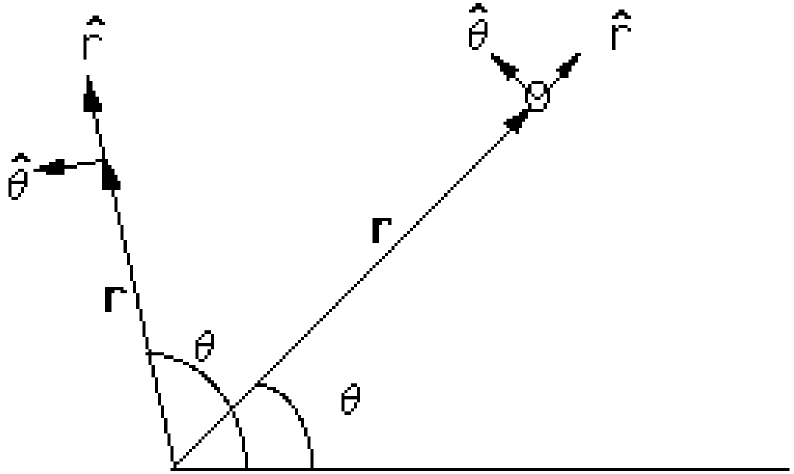
$$\vec{e}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{e}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad \vec{e}_w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$$

Em geral não são normalizados e nem ortogonais.

Base dual: tomando-se o gradiente

$$\vec{e}^{u} = \vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{z}$$

$$\vec{e}^{v} = \vec{\nabla} v = \ldots, \quad \vec{e}^{w} = \vec{\nabla} w = \ldots$$



Para um sistema de coordenadas ortogonal base dual = base natural, mas, em geral, são diferentes.

Espaço Euclidiano em 3D

Base natural no novo sistema de coordenadas:

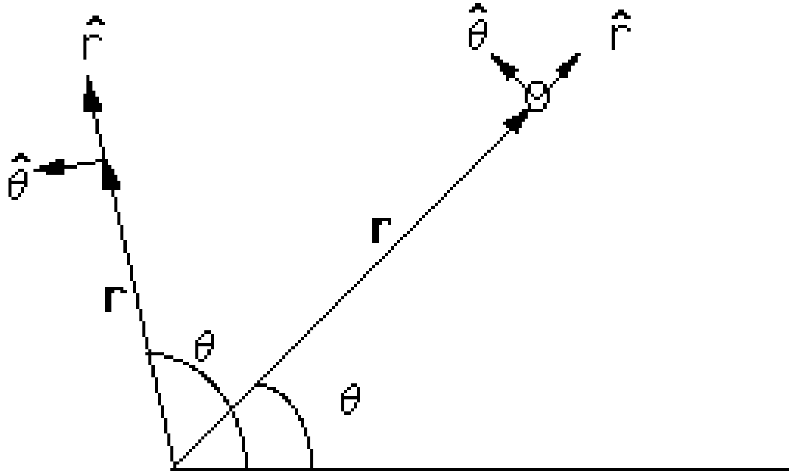
$$\vec{e}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{e}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad \vec{e}_w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$$

Em geral não são normalizados e nem ortogonais.

Base dual: tomando-se o gradiente

$$\vec{e}^u = \vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{z}$$

$$\vec{e}^v = \vec{\nabla} v = \ldots, \quad \vec{e}^w = \vec{\nabla} w = \ldots$$



Para um sistema de coordenadas ortogonal base dual = base natural, mas, em geral, são diferentes.

Notação: coordenadas $u^i = (u, v, w), \quad i = 1, 2, 3$

base natural $e_i = (\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$

base dual $e^i = (\vec{e}^u, \vec{e}^v, \vec{e}^w)$

Espaço Euclidiano em 3D

Expansão de um vetor $\vec{v} = v^i \vec{e}_i = v_i \vec{e}^{\,i}$

v^i componentes contravariantes de $\vec{v}$

v_i componentes covariantes de $\vec{v}$

Espaço Euclidiano em 3D

Expansão de um vetor $\vec{v} = v^i \vec{e}_i = v_i \vec{e}^i$

v^i componentes contravariantes de $\vec{v}$

v_i componentes covariantes de $\vec{v}$

Vetor posição infinitesimal $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} du^i = \vec{e}_i du^i$

Norma $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j du^i du^j = g_{ij} du^i du^j$

$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ é a métrica no sistema de coordenadas dado.

Espaço Euclidiano em 3D

Expansão de um vetor $\vec{v} = v^i \vec{e}_i = v_i \vec{e}^i$

v^i componentes contravariantes de $\vec{v}$

v_i componentes covariantes de $\vec{v}$

Vetor posição infinitesimal $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} du^i = \vec{e}_i du^i$

Norma $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j du^i du^j = g_{ij} du^i du^j$

$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ é a métrica no sistema de coordenadas dado.

Coordenadas Cartesianas

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

Coordenadas esféricas

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$

Espaço Euclidiano em 3D

Tranformação de coordenadas: (u, v, w) para (u', v', w')

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_i &= \frac{\partial u'^j}{\partial u^i}\vec{e}'_j, \quad \vec{e}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j}\vec{e}'^j \\
v'^i &= \frac{\partial u'^i}{\partial u^j}v^j, \quad v'_i = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i}v_j
\end{aligned}
$$

Espaço Euclidiano em 3D

Tranformação de coordenadas: (u, v, w) para (u', v', w')

$$\begin{aligned} \vec{e}_i &= \frac{\partial u'^j}{\partial u^i}\vec{e}'_j, \quad \vec{e}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j}\vec{e}'^j \\ v'^i &= \frac{\partial u'^i}{\partial u^j}v^j, \quad v'_i = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i}v_j \end{aligned}$$

Tensor tipo (r, s) contravariante de ordem r e covariante de ordem s:

$$T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \frac{\partial u'^{i_1}}{\partial u^{k_1}} \cdots \frac{\partial u^{l_1}}{\partial u^{j_1}} \cdots T^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s}$$

Espaço Euclidiano em 3D

Tranformação de coordenadas: (u, v, w) para (u', v', w')

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_i &= \frac{\partial u'^j}{\partial u^i}\vec{e}'_j, \quad \vec{e}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j}\vec{e}'^j \\
v'^i &= \frac{\partial u'^i}{\partial u^j}v^j, \quad v'_i = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i}v_j
\end{aligned}
$$

Tensor tipo (r, s) contravariante de ordem r e covariante de ordem s:

$$
T'^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = \frac{\partial u'^{i_1}}{\partial u^{k_1}}\cdots\frac{\partial u^{l_1}}{\partial u^{j_1}}\cdots T^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s}
$$

A métrica é um tensor covariante de segunda ordem

Espaço Euclidiano em 3D

Tranformação de coordenadas: (u, v, w) para (u', v', w')

$$\begin{aligned}
\vec{e}_i &= \frac{\partial u'^j}{\partial u^i}\vec{e}'_j, \quad \vec{e}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j}\vec{e}'^j \\
v'^i &= \frac{\partial u'^i}{\partial u^j}v^j, \quad v'_i = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i}v_j
\end{aligned}$$

Tensor tipo (r, s) contravariante de ordem r e covariante de ordem s:

$$T'^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = \frac{\partial u'^{i_1}}{\partial u^{k_1}} \ldots \frac{\partial u^{l_1}}{\partial u^{j_1}} \ldots T^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s}$$

A métrica é um tensor covariante de segunda ordem

Isto é o cálculo tensorial no espaço Euclidiano

Espaço Euclidiano em 3D

Tranformação de coordenadas: (u, v, w) para (u', v', w')

$$\begin{aligned} \vec{e}_i &= \frac{\partial u'^j}{\partial u^i}\vec{e}'_j, \quad \vec{e}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j}\vec{e}'^j \\ v'^i &= \frac{\partial u'^i}{\partial u^j}v^j, \quad v'_i = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i}v_j \end{aligned}$$

Tensor tipo (r, s) contravariante de ordem r e covariante de ordem s:

$$T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \frac{\partial u'^{i_1}}{\partial u^{k_1}} \dots \frac{\partial u^{l_1}}{\partial u^{j_1}} \dots T^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s}$$

A métrica é um tensor covariante de segunda ordem

Isto é o cálculo tensorial no espaço Euclidiano

Pode ser estendido para a relatividade restrita