Ondas No Vácuo

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \end{cases} \quad e \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \; ; \; \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

1) $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\times\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\times(-\vec{\nabla}\times\vec{E}) \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{E}}$

2) $\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E}) \Rightarrow -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\times\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\Rightarrow -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\times(c^2\,\vec{\nabla}\times\vec{B}) \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{B}}$

Exemplo

- $\vec{E} = (0, E(t,x), 0)$ onde $E(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct)$

$\Rightarrow E(t,x) = E_0 \, \mathrm{sen}(kx - \omega t)$, $k = \frac{\omega}{c}$

- $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E} \longrightarrow \vec{B} = (0, 0, B(t,x))$

$\Rightarrow \frac{\partial B(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x} = -k E_0 \cos(kx - \omega t) = -\frac{E_0}{c}\,\omega \cos(kx - \omega t)$

$\Rightarrow B(t,x) = \frac{E_0}{c}\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$

Onda Geral

$\vec{E}(t,\vec{x}) = \int \frac{\vec{E}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}}{(2\pi)^3}\, d^3k \leftrightarrow$ Superposição

OBS: Tomar a parte real da notação complexa

Polarização em onda monocromática

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \quad ; \quad \vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

• Linear ($\vec{E}_0, \vec{B}_0 \in \mathbb{R}$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \iff \vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$$

$\Rightarrow$ "As oscilações de $\vec{B}_0$ e $\vec{E}_0$ são ortogonais à direção $\vec{k}$ de propagação"

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \iff \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \iff \vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0 \Rightarrow$$ "$\vec{E}_0$ e $\vec{B}_0$ são ortogonais"

• Elíptica ($\vec{E}_0, \vec{B}_0 \in \mathbb{C}$)

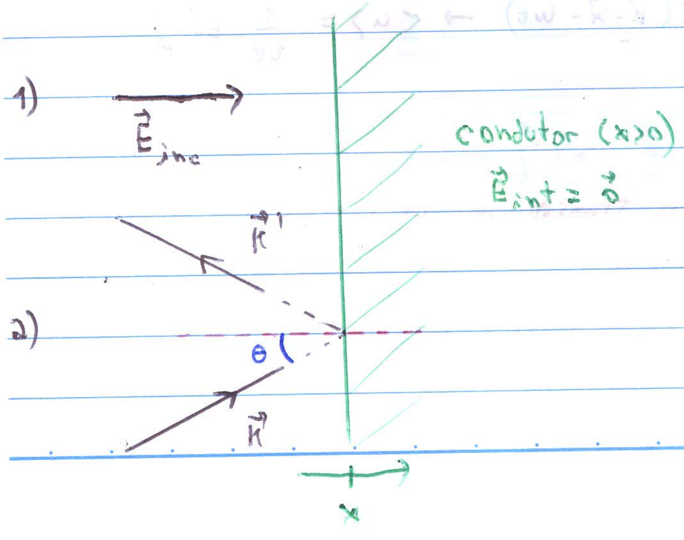
$$\vec{E}_0 = \vec{\alpha} + i\vec{\beta} \Rightarrow Re(\vec{E}) = \vec{\alpha}\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) + \vec{\beta}\,sen(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) \quad \begin{cases} \vec{\alpha}\cdot\vec{k} = 0 \\ \vec{\beta}\cdot\vec{k} = 0 \end{cases}$$

• $\vec{\beta} = \vec{k}\times\vec{\alpha}$ (direita) ou $\vec{\beta} = -\vec{k}\times\vec{\alpha}$ (esquerda)

• Caso Especial : Circular

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \quad e \quad |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$$

Exemplo : Reflexão de uma onda



1) $\vec{E}_{i_1} = E_0\,\hat{y}\, e^{i(kx-\omega t)}$

$\vec{k} \parallel \hat{x}$

2) $\vec{E}_{i_2} = E_0\,\hat{y}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

$\vec{k} = k(\cos\theta\,\hat{x} + sen\theta\,\hat{y})$

1) $\vec{E}$ tangente à superfície do condutor, com $\vec{E}(x=0) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{E}_{r_1} = -E_0 \hat{y}\, e^{i(-kx-\omega t)} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{i_1} + \vec{E}_{r_1} \Rightarrow \vec{E}(x=0) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_{i_1} + \vec{B}_{r_1} = \begin{cases} \vec{B}_{i_1} = \frac{E_0}{c} \hat{z}\, e^{i(kx-\omega t)} \\ \vec{B}_{r_1} = \frac{E_0}{c} \hat{z}\, e^{i(-kx-\omega t)} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \vec{B}\cdot\hat{n} = 0 \\ \vec{B}\cdot\hat{z}\Big|_{x=0} = \frac{2E_0}{c} e^{-i\omega t} \end{cases}$$

2) $\vec{E}_{r_2} = -E_0 \hat{z}\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega t)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\vec{E}_{i_2} + \vec{E}_{r_2})\cdot\hat{n} = 0 \\ (\vec{E}_{i_2} + \vec{E}_{r_2})\times\hat{n} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{n} = -\hat{x} \quad \Rightarrow \quad \vec{k}' = k\left(-\cos\theta\, \hat{x} + \operatorname{sen}\theta\, \hat{z}\right)$$

"Lei de Snell $\theta = \theta'$"

Teorema de Poynting

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \operatorname{sen}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) \\ \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E} = \frac{1}{c}(\hat{k}\times\vec{E}_0)\operatorname{sen}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{E_0^2}{4\pi}\hat{k}\operatorname{sen}^2(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) \quad \rightarrow \quad \langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{8\pi}E_0^2\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2\right) = \frac{E_0^2}{4\pi}\operatorname{sen}^2(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) \quad \rightarrow \quad \langle u\rangle = \frac{1}{8\pi}E_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{S} = u\,\hat{k}}$$

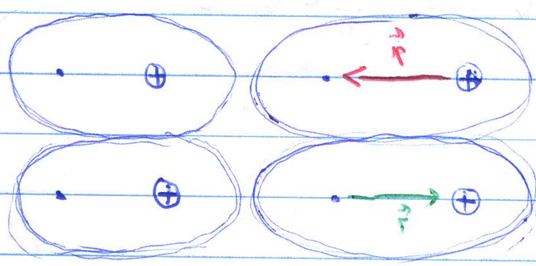
associa-se à transmissão de energia

Eletromagnetismo na matéria

• dielétrico: sem cargas livres → $\rho = 0$

• Modelo simplificado:

Cargas positivas envolvidas por uma nuvem uniforme negativamente carregada de maneira que, na presença de um campo elétrico externo, as cargas deslocam-se $\vec{r}$ da sua posição de equilíbrio criando uma série de dipolos locais $\vec{p}$



• $\vec{p} = \alpha \vec{E}$

↳ polarizabilidade

• $\vec{r} = \dfrac{a^3}{q} \vec{E}$

⇒ como $\vec{p} = \vec{r} q$ ⇒ $\alpha \vec{E} = a^3 \vec{E}$ ⇔ $\alpha = a^3$

⇒ para $r < a$ ⇒ $\vec{E}_{nuvem} = \dfrac{q r}{a^3} \hat{r}$ ⇒ $\vec{E} + \vec{E}_{nuvem} = 0$

• Macroscopicamente

densidade de átomos

$\vec{P}(\vec{r}) = n \langle \vec{p} \rangle$ e $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$

↳ Polarização ↳ Susceptibilidade elétrica

Cargas Ligadas

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \longrightarrow \phi(\vec{r}) = \int_V d^3 r' \, \frac{\vec{P}(\vec{r}\,') \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = \int_V d^3 r' \, \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right)$$

↓

Potencial devido ao dipolo

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \int_S d\vec{S} \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} - \int_V d^3 r' \, \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Redefinição de Campo $\vec{E}$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{ligadas} = \vec{p}\cdot\hat{n} \\ \rho_{ligadas}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{p}(\vec{r}) \end{array}\right. \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\left(\rho_{livres} + \rho_{ligadas}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\left(\rho_{livres} - \vec{\nabla}\cdot\vec{p}\right) \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\overbrace{\left(\frac{\vec{E}}{4\pi} + \vec{p}\right)}^{\vec{D}} = \rho_{livres} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{livres}}$$

Definimos $\vec{D} \equiv \frac{1}{4\pi}\vec{E} + \vec{p} = \frac{1}{4\pi}\vec{E} + \chi_e\vec{E} = \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi} + \chi_e\right)}_{\varepsilon}\vec{E}$

$$\boxed{\vec{D} \equiv \varepsilon\vec{E}}$$

↳ permissividade elétrica

Campos magnéticos na matéria

- Corrente → elétrons orbitando os núcleos
- Spin → momento angular intrínseco

- Proporcionalidade linear
  - ↱ $\vec{M}(\vec{r}) = n\langle\vec{m}\rangle$
  - ↳ $\vec{M} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\chi_m}{1+\chi_m}\right)\vec{B}$ — ↱ Susceptibilidade Magnética

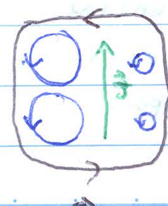
- Diamagnetismo → $-1 < \chi_m < 0$
- Paramagnetismo → $\chi_m > 0$
- Ferromagnetismo → $\vec{M} \neq 0$ mesmo com $\vec{B} = 0$

Correntes ligadas

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V d^3r' \, \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \int_V d^3r' \, \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$$

$$= \underbrace{-\int_S d\vec{S}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\text{devido à } \vec{K}_{ligada} = \vec{M}\times\hat{n}} + \underbrace{\int_V d^3r' \, \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\text{devido à } \vec{J}_{ligada} = \vec{\nabla}\times\vec{M}}$$

↳ Borda ↳ meio



$\vec{K}$

Redefinição da Lei de Ampère

- $$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{B} = 4\pi\left(\vec{J}_{livre} + \vec{J}_{ligado}\right) \\ \vec{J}_{ligado} = \vec{\nabla}\times\vec{M} \end{cases} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{4\pi}\vec{B}\right) = \vec{J}_{livre} + \vec{\nabla}\times\vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{4\pi}\vec{B} - \vec{M}\right) = \vec{J}_{livre} \Leftrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_{livre}, \quad \vec{H} = \frac{1}{4\pi}\vec{B} - \vec{M}$$

- $$\begin{cases} \vec{M} = \chi_m \vec{H} \\ \vec{H} = \frac{1}{4\pi}\vec{B} - \vec{M} \end{cases} \Rightarrow 4\pi\vec{H} + 4\pi\chi_m\vec{H} = \vec{B} \Leftrightarrow \vec{B} = 4\pi(1+\chi_m)\vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu\vec{H}$$

Permeabilidade magnética

Equações de Maxwell

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_{ligado} = \frac{\partial \rho_{ligado}}{\partial t} \\ \rho_{ligado} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \end{cases} \Rightarrow \vec{J}_{ligado} = \vec{\nabla}\times\vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi\left(\vec{J}_{livre} + \vec{J}_{ligado}\right) \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_{livre}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{livre} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_{livre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\vec{H} \end{cases}$$

Ondas ($\rho_{livre} = 0$ e $\vec{J}_{livre} = 0$)

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2\vec{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \\ \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \end{cases}$$

Descontinuidades

$$\begin{cases} \hat{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \\ \hat{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \hat{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \end{cases}$$