Eletromagnetismo 1 - Aula 2

Obteremos o Eletromagnetismo através do...

→ Formalismo Lagrangeano (Vantagem: Explicita as simetrias do Problema)

Partimos de dois pontos e queremos encontrar o caminho que um sistema mecânico adotaria entre eles.

$\vec{x}(t_f)$

$\vec{x}(t_i)$

→ Existem vários caminhos possíveis

↳ p/ cada um deles calculamos

$$\boxed{L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})}$$

→ Lagrangeana (Poderia depender explicitamente do tempo)

e

$$\boxed{S(t_i,t_f) = \int_{t_i}^{t_f} L(\vec{x},\dot{\vec{x}})\,dt}$$

→ Ação: Um Funcional (Recebe uma função como entrada, no caso o caminho)

Os caminhos desejados: A trajetória do sistema extremiza a ação

↳ Não só minimiza: Pontos de sela também podem ser soluções

- Extremizando a ação:

$\vec{x}+\delta\vec{x}$ $\quad$ $\vec{x}$

$$0 = \delta S = S[\vec{x}+\delta\vec{x}] - S[\vec{x}] =$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt\left(\frac{1}{2}m(\dot{\vec{x}}+\delta\dot{\vec{x}})^2 - V(\vec{x}+\delta\vec{x}) - \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x})\right) =$$

→ Termo da ordem de $\delta\dot{\vec{x}}^2$

Como é uma variação infinitesimal podemos expandir em série de Taylor

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt\left(\frac{1}{2}2m\dot{\vec{x}}\cdot\delta\dot{\vec{x}} - \vec{\nabla}V\cdot\delta\vec{x}\right) + O(\delta\vec{x}^2) =$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt\left(m\frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}}\cdot\delta\vec{x}) - m\frac{d}{dt}(\dot{\vec{x}})\cdot\delta\vec{x} - \vec{\nabla}V\cdot\delta\vec{x}\right) + O(\delta\vec{x}^2)$$

δ e $\frac{d}{dt}$ comutam

$$0 = \delta S = \cancel{\int_{t_i}^{t_f} dt\,\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{x}}\cdot\delta\vec{x})}^{\,0} + \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt\,(-m\ddot{\vec{x}} - \vec{\nabla}V)\cdot\delta\vec{x}}_{\text{Só pode zerar se o integrando for nulo, ou seja:}} + O(\delta\vec{x}^2)$$

$$\boxed{m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V}$$

→ 2ª Lei de Newton → Equivalência entre os formalismos

...Vamos fazer o mesmo sem especificar a forma da Lagrangeana:

$$0 = \delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{x} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \cdot \delta\dot{\vec{x}}}_{} \right) =$$

↳ Apenas Tomar $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$ qualquer

Integrando esse termo por partes

$$= \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \cdot \delta\vec{x}\right)}_{=0} + \int_{t_i}^{t_f} dt \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\right)}_{} \cdot \delta\vec{x} + O(\delta\vec{x}^2)$$

P/ Anular o integrando deve ser nulo

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}}$$

→ Eq de Euler-Lagrange

↳ Mais geral que 2ª Lei de Newton

→ P/ $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})$ obtemos 2ª Lei

podemos generalizar p/ x_i partículas

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i}}$$

... Agora vamos generalizar esse formalismo de partículas para campos

Partículas	X	Campos
(puntiformes) Sistema descrito pela trajetória $\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)$		A posição deixa de ser um grau de liberdade e passa a ser um parâmetro do campo $\varphi(\vec{x}, t)$

↳ Tipos de Campos:

- escalares (Temperatura)
- vetoriais (Velocidades de um líquido)
- tensoriais (...)

→ Diferem em dimensionalidade, ou nº de índices

... Para Generalizar o formalismo precisamos generalizar a Lagrangeana p/ o campo:

$$L = \int d\vec{x}\, \mathcal{L}\left(\varphi(\vec{x}, t), \underbrace{\frac{d}{dt}\varphi, \vec{\nabla}\varphi}_{\partial_\mu \varphi}\right)$$

$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$

Antes dependia da posição e suas derivadas, agora do campo

Densidade Lagrangeana

... Vamos Extremizar essa nova L:

Uma Generalização do produto escalar $\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} \cdot \partial \vec{x}$

$$0 = \delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d\vec{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \delta \partial_\mu \varphi} \right) =$$

A derivada e o δ comutam

Podemos integrar por partes

$$= \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \int d\vec{x}\, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \delta \varphi \right)}_{\text{Componente de Superfície}} - \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \int d\vec{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \varphi} \right) \delta \varphi}_{\text{Componente de Volume}}$$

0

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \int d\vec{x} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial}{\partial t} \varphi} \delta \varphi \right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial}{\partial x} \varphi} \delta \varphi \right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial}{\partial z} \varphi} \delta \varphi \right)} \right)$$

pela mesma razão de antes

→ 0 no ∞ porque os campos vão p/ 0 no ∞

Veremos esse sinal em mais detalhes depois, mas spoiler: vem da métrica

e a componente de Superfície 0

P/ Extremizar a ação temos que o integrando zera e obtemos ...

$$\boxed{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}}$$

→ Eq de Euler-Lagrange p/ o campo

Explicitando esse termo em coordenadas cartesianas:

$$\equiv -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x}} \right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial z}} \right)$$

▷ Simetrias

→ P/ Partícula Livre (V=0)

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$$

→ Simetria de Translação:

$$\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a} \quad \text{→ cnte}$$

$$\dot{\vec{x}} \to \frac{d}{dt}(\vec{x}+\vec{a}) = \dot{\vec{x}} + 0$$

→ Simetria de Rotação:

$$\dot{\vec{x}}^2 = \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}$$

→ Voltaremos nisso depois

Contínuas

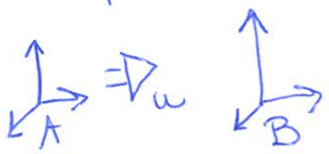
→ Paridade $\vec{x} \to -\vec{x}$

Inv. Temp $t \to -t$

Discretas

→ Transformações de Galileu (Relacionam tempo e espaço)

Inerciais ◁–



$\Delta t_A = \Delta t_B$ ▷ Diferença de tempo entre dois eventos é a mesma nos dois referenciais

$$\Delta x_B = \Delta x_A + u \Delta t_A$$

$$m_A = m_B$$

→ Eq. do Movimento.

$$m_A \frac{d^2}{dt_A^2} x_A = 0$$

$$m_B \frac{d^2}{dt_B^2} x_B = m_A \frac{d^2}{dt_A^2}(x_A + u t_A) = m_A \frac{d^2}{dt_A^2} x_A + m_A u \cancelto{0}{\frac{d^2}{dt_A^2} t_A}$$

e a equação do movimento se mantém (porque o u é constante. se u variasse outros termos apareceriam)

↳ Ação:

$$S_B = \int dt_B \, \tfrac{1}{2} m_B \, \dot{\vec{x}}_B^{\,2} = \int dt_A \, \tfrac{1}{2} m_A \left(\dot{\vec{x}}_A + \vec{u}\right)^2 =$$

$$= \int dt_A \, \tfrac{1}{2} m_A \left(\dot{\vec{x}}_A^{\,2} + 2\dot{\vec{x}}_A \cdot \vec{u} + \vec{v}^{\,2}\right) = S_A + \boxed{\int dt_A \, m_A \dot{\vec{x}}_A \cdot \vec{u} + \int dt_A \, m_A \vec{u}^{\,2}}$$

↳ $\Delta t_A \, m_A$

↳ que some nas eq do movimento na derivada.

↳ Um termo de superfície: Pode ser escrito como

$$\int dt_A \frac{d}{dt_A} \left(m_A \vec{x}_A \cdot \vec{u}\right)$$

↳ E novamente não entra nas equações do movimento