Eletromagnetismo 1 - Aula 3

... Queremos chegar a transformações de Lorentz e Gauge

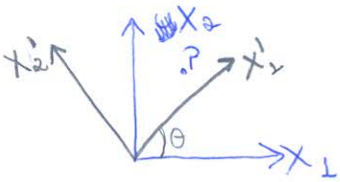
Antes vamos falar um pouco mais sobre Transformações mais simples

↳ Isso é muito importante pq os tipos de campos que vemos (escalar, vetorial, tensorial) só podem ser assim definidos em função da transformação escolhida

↳ "algo é um escalar sob determinada transformação"

→ Rotações

- 2D



Transformação passiva: Transformação do referencial c/ P fixo

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

↳ $x^{i'} = \sum_{j=1} R^{ij} x^j$

Convenção de Einstein: Considera-se que se está somando sobre índices repetidos

→ $\boxed{R^{ij} x^j = x^{i'}}$

→ $\vec{x}\cdot\vec{x} = x^i x^i$ deve ser invariante sob uma rotação

↳ e portanto um escalar

$$\vec{x}'\cdot\vec{x}' = x^{i'} x^{i'} = R^{ij} R^{ik} x^j x^k =$$
$$= x^j x^j = \vec{x}\cdot\vec{x}$$
$$= \delta^{jk} x^j x^k$$

Então a equação que define a rotação é → $\boxed{R^{ij} R^{ik} = \delta^{jk}}$

na forma matricial: $(R^T R = \mathbb{1})$

→ Saímos de 2D, mas isso vale p/ qualquer dimensionalidade

↳ P/ generalizar basta fazer $i = 1 \dots D$

→ Mas isso que definimos ainda não é uma rotação...

É o que chamamos de Transf. Ortogonal $O(D)$

...

↳ A nossa matriz tinha um determinante

$$\det(R^T R) = \det(\mathbb{1})$$

$$(\det R^T)\,(\det R) = 1$$

$$(\det R)^2 = 1$$

$$\boxed{\det R = \pm 1}$$

↳ Rotações são um tipo especial de Transf. Ortogonais ($SO(D)$) c/ $\det R = 1$

"Special"

↓

Rotação:

$$SO(D): \begin{cases} R^T R = \mathbb{1} \\ \det R = 1 \end{cases}$$

→ E sob rotações podemos então definir:

<u>Escalar</u>: Algo que ñ se transforma

Vetor: Algo que se transforma como

$$V^i \to V^{i'} = R^{ij} V^j$$

Tensor: Algo que se transforma como

$$W^{ij} \to W^{ij'} = R^{ik} R^{jl} W^{kl} \longrightarrow \text{Ranque 2 ou Ordem 2}$$

$$W^{ijk} \to W^{ijk'} = R^{im} R^{jn} R^{kl} W^{mnl} \to \text{Ranque 3 ou Ordem 3}$$

⋮

Exercício:

D_2 $\begin{cases} \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \text{ é um vetor sob } SO(2) \\ \vec{q} = \begin{pmatrix} a p_1 \\ b p_2 \end{pmatrix} \text{ é um vetor?} \end{cases}$

D_3 $\begin{cases} \vec{p} = (p_1, p_2, p_3),\ \vec{q} = (q_1, q_2, q_3) \text{ são vetores sob } SO(3)\text{?} \\ \begin{pmatrix} p_2 q_3 \\ p_3 q_1 \\ p_1 q_2 \end{pmatrix} \text{ é um vetor?} \end{cases}$

Exercício:

- Demonstre que δ^{ij} é invariante sob $SO(D)$
- Demonstre que $\epsilon^{i_1 \dots i_D}$ é também invariante sob $SO(D)$

$$D=2 \begin{cases} \epsilon^{12}=1 & \epsilon^{21}=-1 \\ \epsilon^{11}=0 & \epsilon^{22}=0 \end{cases}$$

Vamos falar um pouco mais de Tensores (W^{ij}):

em $D=3$

$$W^{ij} \to W^{ij'} = R^{ik} R^{jl} W^{kl}$$

Se olharmos apenas o caso $i=1$, $j=1$:

$$w^{11'} = R^{1k} R^{1l} w^{kl} = R^{11} R^{11} W^{11} + \dots + R^{12} R^{11} w^{21} + \dots + R^{13} R^{13} W^{33}$$

$w^{11'}$ é uma combinação linear dos coeficientes w originais

E podemos reescrever matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} w^{11'} \\ w^{12'} \\ \vdots \\ w^{33'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} R^{11}R^{11} & R^{11}R^{12} & \dots \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{9\times 9} \begin{pmatrix} W^{11} \\ W^{12} \\ \vdots \\ W^{33} \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ Isso é o que chamamos de Representação 9-dimensional de $SO(3)$

↳ E é uma transformação redutível

Redutível: Algumas combinações das w^{ij} se transformam somente entre elas.

Exemplo

$$A^{ij} = w^{ij} - w^{ji}$$

$$A^{ij'} = W^{ij'} - w^{ji'} = R^{ik} R^{jl} W^{kl} - \underbrace{R^{jk} R^{il} W^{kl}}_{R^{jl} R^{ik} w^{lk}} = \dots$$

$\ldots = R^{ik} R^{jl} (\omega^{kl} - \omega^{lk})$ $\underbrace{\qquad}_{A^{kl}}$

Exercício: $S^{ij} = \dfrac{\omega^{ij} + \omega^{ji}}{2}$ → Simétrica: $S^{ij} = S^{ji}$

Demonstre que $S^{ij\prime} = R^{ik} R^{jl} S^{kl}$

... Redutível: Algumas combinações dos ω^{ij} se transformam somente entre elas → Isso se manifesta como partes da representação que só se transformam entre elas.

quais são essas partes?

ω^{ij} → $A^{ij} = \omega^{ij} - \omega^{ji}$ (Antissimétrica) 3 componentes

ω^{ij} → $\tilde{S}^{ij} = S^{ij} - \dfrac{S^{ij} S^{kk}}{D}$ (Simétrica s/ o Traço) 5 Componentes

ω^{ij} → $Tr(S) = S^{ii}$ (Traço) 1 componente

$\boxed{\text{Obs: O Traço é invariante: } S^{ii\prime} = R^{ik} R^{il} S^{kl} = (R^{ki})^T R^{il} S^{kl} = \delta^{kl} S^{kl} = S^{ll} \blacksquare}$

Como essas partes aparecem na representação?

P/ Espaço 3D: $3 \oplus 5 \oplus 1 = 9$ → Dimensão da nossa representação

↳ Soma direta

$$\begin{pmatrix} 3\times3 & 0 & 0 \\ 0 & 5\times5 & 0 \\ 0 & 0 & 1\times1 \end{pmatrix}_{9\times9}$$

A^{ij} → 3×3; $\tilde{S}^{ij}$ → 5×5; $Tr(S)$ → 1×1

Dimensão do Tensor antissimétrico: $\dfrac{D(D-1)}{2}$ → D: Dimensão do espaço

D	D(D-1)/2
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10

→ Espaço 3D é o único em que a dimensão de Espaço coincide com a do Tensor antissimétrico A:

↳ formam uma base:

$$\boxed{J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Geradores das rotações 3D

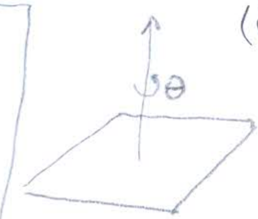
...ções em funções dos geradores:

→ 2D: $R = \mathbb{1} + A + \mathcal{O}(A^2) = \begin{pmatrix}\cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \theta \\ -\theta & 1\end{pmatrix} + \cancel{\mathcal{O}(\theta^2)} \cong$

$\cong \mathbb{1} + \begin{pmatrix}0 & \theta \\ -\theta & 0\end{pmatrix} = \mathbb{1} + \theta \begin{pmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$

↳ Gerador de Transformação p/ o espaço 2D

→ Parâmetro da Transformação (Ângulo)

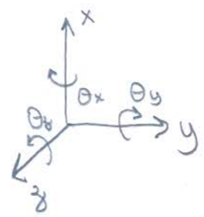


→ 3D:

→ Parâmetros

$R = \mathbb{1} + A = \mathbb{1} + \theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z$

→ Geradores



→ 4D (Espaço-Tempo):

$D = 4 \rightarrow$ ~~[illegible]~~ $D(D-1)/2 = 6$

↳ 6 Geradores → 6 "eixos de rotação"

3 serão as rotações usuais do espaço 3D...

E as outras 3 serão os Boosts de Lorentz