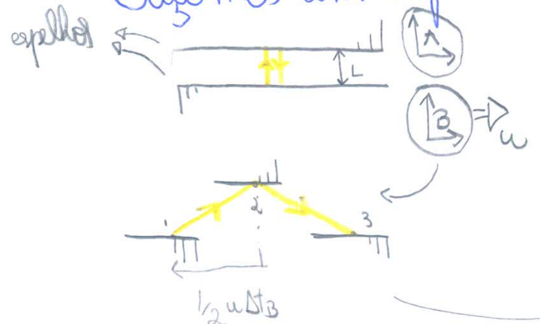
Eletromagnetismo 1 - Aula 4

Hoje vamos entender as consequências de $c = cnst$...

1 no nosso sistema de unidades

Historicamente a constância estava presente nas eq. de Maxell e foi levado até as ultimas consequências por Einstein, levando à Relatividade

Façamos um experimento:



$\Delta x_A = \Delta y_A = \Delta z_A = 0$

$\Delta t_A = \frac{2L}{c_A} = \frac{2L}{c}$ (I)

$\Delta y_B = \Delta z_B = 0$

$\Delta x_B = u \Delta t_B$

$\Delta t_B = dist / c_B$

$c_B \Delta t_B = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} u \Delta t_B\right)^2 + L^2}$ (II)

$$c^2 \Delta t_B^2 = 4\left(\frac{1}{2} u \Delta t_B\right)^2 + 4L^2 = u^2 \Delta t_B^2 + 4L^2 = \Delta x_B^2 + 4L^2$$

$$c^2 \Delta t_B^2 - \Delta x_B^2 = 4L^2 = c^2 \Delta t_A^2$$

posso explicitar na equação as partes nulas

$$\boxed{c^2 \Delta t_B^2 - \Delta x_B^2 - \Delta y_B^2 - \Delta z_B^2 = c^2 \Delta t_A^2 - \Delta x_y^2 - \Delta y_A^2 - \Delta z_A^2}$$

Se nas rotações a norma era invariante, aqui é essa relação do espaço com o tempo é invariante.

Queremos encontrar a transformação que deixa isso invariante

Pegamos a forma infinitesimal da eq:

$$c^2 dt_B^2 - dx_B^2 = c^2 dt_A^2 - dx_A^2 \Rightarrow -c^2 dt_B^2 + dx_B^2 = -c^2 dt_A^2 + dx_A^2$$

Definimos "coordenadas do cone de luz":

$dx_B^+ = dx_B + c\,dt_B$

$dx_B^- = dx_B - c\,dt_B$

$$dx_B^+ dx_B^- = dx_A^+ dx_A^-$$

uma solução dessa eq é:

$$\begin{cases} dx_B^+ = e^{+\varphi} dx_A^+ \\ dx_B^- = e^{-\varphi} dx_A^- \end{cases} \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} c\,dt_B = \frac{1}{2}(dx_B^+ + dx_B^-) = \frac{1}{2}(e^{\varphi}dx_A^+ + e^{-\varphi}dx_A^-) \\ \qquad = ch\varphi\; c\,dt_A + sh\varphi\, dx_A \\ dx_B = \frac{1}{2}(dx_B^+ - dx_B^-) = sh\varphi\, c\,dt_A + ch\,\varphi\, dx_A \end{cases}$$

Obs:
$ch\varphi \Rightarrow$ cosseno hiperbólico
$sh\varphi \Rightarrow$ seno hiperbólico

$\Downarrow$

Boost de Lorentz

$$\boxed{\begin{pmatrix} c\,dt_B \\ dx_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt_A \\ dx_A \end{pmatrix}}$$

$\rhd$ Transformação que deixa aquela combinação invariante

$dx_B = 0 \rightarrow dx_A = -u\,dt_A$

$ch\varphi\, dx_A = -sh\varphi\; c\,dt_A$

$$\boxed{\frac{u}{c} = th\varphi}$$

$\rhd$ tangente hiperbólica

$\rhd$ Relação entre a velocidade do referencial u e o parâmetro φ

$\hookrightarrow$ chamado "rapidez"

E daqui obtemos a adição de velocidades.

$$\rhd\; v_B = \frac{dx_B}{dt_B} \underset{c=1}{=} \frac{dx_A + u\,dt_A}{dt_A + u\,dx_A} = \frac{\frac{dx_A}{dt_A} + u}{1 + u\frac{dx_A}{dt_A}} = \frac{v_A + u}{1 + u v_A} \rhd \neq v_A + u$$

Exercício: Reintroduzir $c \neq 1$ nas eq.

Vamos tentar entender o que significavam aquelas "coordenadas do cone de luz ...

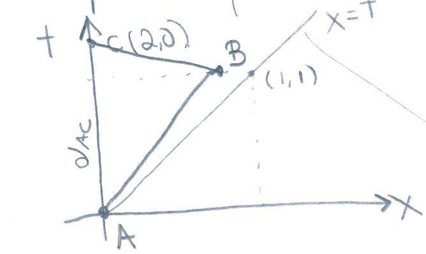
$$\underbrace{d\vec{x}^2 \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2}_{\text{Invariante sob rotações } SO(3)} \Rightarrow \underbrace{ds^2}_{\text{Elemento de linha}} \equiv \underbrace{-c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2}_{\text{Invariante sob transf. de Lorentz } (SO(1,3))}$$

$\hookrightarrow$ Separação entre 2 eventos no "espaço-tempo"

O elemento de linha pode ter sinais diferentes, que definem os tipos de eventos:

$$ds^2 = \begin{cases} >0 \rightarrow \text{tipo espaço} \\ =0 \rightarrow \text{tipo luz} \\ <0 \rightarrow \text{tipo tempo} \end{cases}$$

Exemplo:



$\rightarrow : \int_A^C ds$

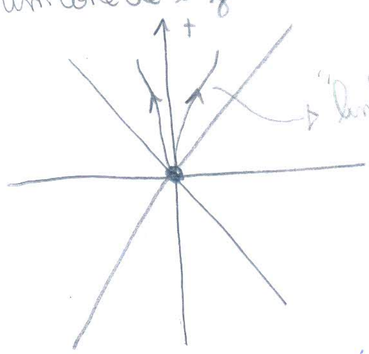
$d_{AC} = \sqrt{2^2 - 0^2} = 2$

$d_{AB} = d_{BC} = \sqrt{1-x^2}$

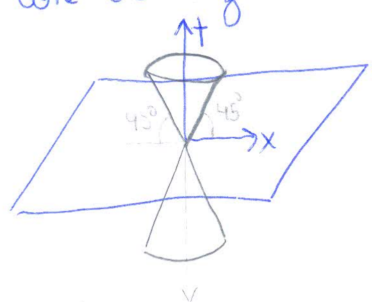
$d_{AB} + d_{BC} = 2\sqrt{1-x^2} < 2 = d_{AC}$

Essa linha define o que chamamos de "cone-de-luz"

Para uma partícula em uma porção qualquer desenhamos um cone de luz



"linhas de mundo possíveis"



No cone

$ds^2 = 0$

$\downarrow$

$c^2 dt^2 = dx^2$

$\downarrow$

$\boxed{v^2 = c^2}$

Dentro do cone:

$v < c$

Fora do cone.

$v > c$

$\nexists$

Um evento só pode influenciar e ser influenciado por eventos dentro do seu cone-de-luz $\leftrightarrow$ Causalidade

$\rightarrow$ Na mecânica clássica todos os eventos estão em contato causal uns com os outros

→ Vamos introduzir um pouco de notação

↳ Voltando às Transformações de Lorentz:

Sabemos que o elemento de linha ds^2 é invariante...

Vamos ver que tipo de estrutura se transforma como um vetor sob Lorentz:

$$dx^\mu = \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

Podemos escrever:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → métrica de Minkowski

$$ds^2 = dx^\mu \underbrace{dx^\nu \eta_{\mu\nu}} = -(c\,dt)^2 + dx^2$$

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu$$

↳ definimos uma nova forma de vetor:

$$\boxed{\text{Vetor covariante: } dx_\mu = dx^\nu \eta_{\mu\nu}}$$

→ $\boxed{dx^\mu = \text{vetor sob } SO(1,3)}$

↳ contravariante

→ Nas rotações não nos preocupávamos com a posição dos índices. Agora temos que nos preocupar (Índices repetidos devem aparecer em baixo e em cima).

→ Queremos colocar T. de Lorentz num formato equivalente ao das rotações:

Vetor:

$$V^{\mu'} = \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu} V^\nu$$

↳ Tem que ser tal que os escalares sejam invariantes:

↳ $V^{\mu}V_{\mu} = V^{\mu}V^{\nu}\eta_{\mu\nu}$

$$V'^{\mu}V'_{\mu} = V'^{\mu}V'^{\nu}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}(\Lambda^{\mu}{}_{\rho}V^{\rho})(\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}V^{\sigma}) = V^{\mu}V^{\nu}\eta_{\mu\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}}$$

⇝ "Definição de T de Lorentz"

↳ Na forma matricial:

$$\Lambda^{T}\eta\Lambda = \eta$$

↳ $$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} & \text{BOOSTS} \\ \hline \text{BOOSTS} & R \end{array}\right) & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

↳ Rotações

ortócrona → $\Lambda^{0}{}_{0} > 0$

própria → $\det \Lambda = 1$

Exercício:

Convença-se de que

$\det \Lambda = +1 \Rightarrow d^4x' = d^4x$

↳ medida de Integração no espaço-tempo de Minkowski $dx^0dx^1dx^2dx^3$ é invariante sob Transf. Lorentz