Eletromagnetismo - Aula 5

...Nos Últimas Aulas...

Definimos vetores:

Sob $SO(1,3)$:

$$X^\mu = (ct \equiv X^0, X^1, X^2, X^3)$$ → contravariante

covariante → $X_\mu = \eta_{\mu\nu} X^\nu = (\eta_{0\nu} X^\nu, \dots \eta_{3\nu} X^\nu) =$

$$= (-X^0, X^1, X^2, X^3)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Uma Transf. de Lorentz é tal que $\boxed{X^\mu X^\nu \eta_{\mu\nu}}$ é invariante

↳ $= X^\mu X^\nu$

→ Para fazer o inverso e obter um vetor contravariante à partir de sua forma covariante fazemos:

$$V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu$$

↳ Métrica Inversa → $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$

↓

No caso da métrica de Minkowsky:

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Nós tínhamos a ação:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L$$

P/ uma partícula livre ($V=0$) $\underline{\tilde{n}\ \text{relativístico}}$

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2\, dt$$ → Simetrias → Rotação → Galileu

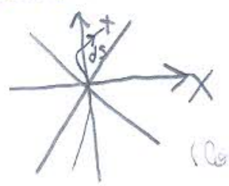
Queremos Generalizar p/ o caso relativístico

↳ Procuramos algo que seja invariante sob $SO(1,3)$ (Lorentz)

↳ Procuramos algo com 2 derivadas (que gere uma dinâmica)

↳ Quando ($c \to \infty$) temos de recuperar o limite ñ relativístico

Vamos tentar algo como...

$S \propto \int ds \longrightarrow$ 

(Cone de Luz)

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 < 0$$

↳ $= \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$

↳ P/ uma trajetória do tipo-tempo

Esse sinal é p/ deixar o ds^2 positivo

$$S \propto \int ds = \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$$

↳ É Lorentz-Invariante

↳ N̄ tem 2 derivadas nos tem 2 diferenciais (Já é um caminho)

↳ E o limite não-relativístico?

Vejamos:

Vamos abrir:

$$S \propto \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \int \sqrt{c\,dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2}$$

$$= \int c\,dt\sqrt{1 - \frac{d\vec{x}^2}{c^2dt^2}}$$

$$\frac{d\vec{x}^2}{c^2dt^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2$$

$$= \int c\,dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}v^2}$$

$$\simeq \int c\,dt\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \int \cancel{c\,dt} - \frac{1}{2c}\int dt\left(\frac{d\vec{x}}{dT}\right)^2 =$$

$\frac{v^2}{c^2} \ll 1$

$$\doteq \int dt\,\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2$$

⇒ Constante de proporcionalidade para fazer valer o limite n̄ relativístico

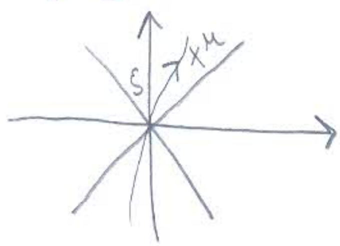
$-mc$

$$\boxed{S = -mc\int dS}$$

$$\boxed{S = -mc \int \underbrace{\sqrt{-\eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu}}_{L}}$$

Obs: Essa equação ñ vale p/ $m=0$... Resolveremos isso depois, introduzindo o campo auxiliar

Vamos encontrar as equações do movimento:



Precisamos escolher uma parametrização p/ X^μ em um parâmetro ξ : $X^\mu = X^\mu(\xi)$

No caso ñ relativístico o tempo era o nosso parâmetro, agora ele é uma coordenada, assim como o espaço

$$\frac{\partial L}{\partial X^\mu} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dX^\mu}{d\xi}\right)} \neq 0$$

$$\boxed{\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dX^\mu}{d\xi}\right)}\right) = 0}$$ Equação do movimento

abrindo

$$\boxed{\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{L}\eta_{\mu\nu}\frac{dX^\nu}{d\xi}\right) = 0}$$

p/ simplificar isso podemos reparametrizar (S é invariante por reparametrizações $\tilde{\xi}(\xi)$ monotônicas)

Façamos: $\xi = s$ → tempo próprio

$d\xi^2 = -ds^2 = d\tau^2$

$L \rightarrow 1$ (Depois de tomar as derivadas)

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{1}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)$$

$$0 = \eta_{\mu\nu}\frac{d^2X^\nu}{d\tau^2} = \frac{d^2X_\mu}{d\tau^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2X^\mu}{d\tau^2} = 0}$$ Equação de uma partícula livre relativística

Agora que temos o resultado para uma partícula livre, vamos introduzir o potencial...

$$\bar{N}R: S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\tfrac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \right)$$

Como generalizar isso ?

Generalizamos para o caso relativístico

$$-\int_{t_i}^{t_f} dt \, \underbrace{V(\vec{x})}_{\text{escalar sob } SO(3)}$$

Não podemos manter assim.

Pq ñ é invariante sob Lorentz

Pra fazer isso vamos precisar falar sobre

Incluir mais ingredientes

"Completamento" + Promoção → escalar de SO(3) → vira a componente tempo de um vetor SO(1,3)

Começando com um exemplo simples:

Velocidade

$$\vec{v}_{SO(3)} = \frac{d\vec{X}_{SO(3)}}{dt_{SO(3)}} = \frac{\text{vetor de } SO(3)}{\text{escalar de } SO(3)}$$

Promoção

$$\vec{v}_{SO(1,3)} = \frac{d\vec{X}_{SO(3)}}{d\tau} = \frac{\text{componente espaço de um vetor de } SO(1,3)}{\text{escalar de } SO(1,3)}$$

Agora é a componente espaço de um vetor de Lorentz (foi promovido)

Precisa ser completado p/ se tornar um vetor de Lorentz.)

"Completamento"

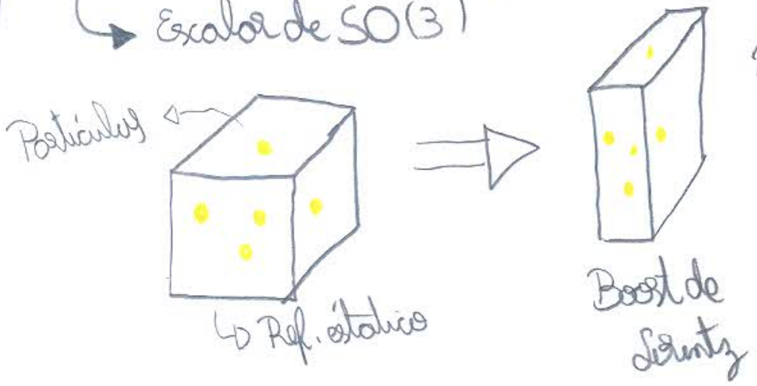
$$v^{\mu}_{SO(1,3)} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{X}}{d\tau} \right)$$

... Vejamos outro exemplo ...

Densidade de número:

$n(t, \vec{x})$ = nº de partículas por volume:

↳ Escalar de SO(3)



⇒ nº de partículas se mantém, mas o volume vai sofrer uma contração de Lorentz, então $n(t, \vec{x})$ não será um escalar de SO(1,3)

↳ $n(t, \vec{x}) \xrightarrow{\text{promoção}}$ componente tempo de um vetor de SO(1,3)

$\boxed{\text{Exercício: Se convencer disso}}$

$\boxed{\text{Completamento}}$

$$j^{\mu}_{SO(1,3)} = \left(n^{0}_{SO(1,3)}, j^{i}_{SO(1,3)}\right)$$

densidade de nº

↳ Isso será a corrente de nº

Veremos com mais atenção na próxima aula.