Eletromagnetismo - Aula 6

... Um ponto sobre a última aula ...

S é invariante quanto ao parâmetro ξ que se escolhe para a reparametrização:

$$S = -m \int d\xi \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\xi} \frac{dX^\nu}{d\xi}}$$

$$\xi \to \tilde{\xi}(\xi)$$

$$-m \int \frac{d\xi}{d\tilde{\xi}} d\tilde{\xi} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{\frac{dX^\mu}{d\xi}}{\frac{d\xi}{d\tilde{\xi}}} \frac{dX^\nu}{\frac{d\xi}{d\tilde{\xi}} d\tilde{\xi}}} =$$

$$= -m \int d\tilde{\xi} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\tilde{\xi}} \frac{dX^\nu}{d\tilde{\xi}}} \quad \blacksquare$$

... Outro ponto: Como obter a ação para uma partícula de $m=0$?

Introduzir $e(\xi)$ $\quad \dot{X}^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\xi} \frac{dX^\nu}{d\xi}$

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \int d\xi \left(e^{-1} \dot{X}^2 - m^2 e \right)$$

↳ e é não propagante / não-dinâmico

Eqs do movimento de $(e(\xi))$: $\frac{dL}{de} = 0 \quad \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dL}{d\dot{e}}\right) = 0$

$$\frac{dL}{de} = 0 \to \boxed{m^2 e^2 + \dot{X}^2 = 0}$$

$$\boxed{e^2 = -\dot{X}^2 / m^2}$$

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \int d\xi \left(\sqrt{\frac{-m^2}{\dot{X}^2}} \dot{X}^2 - m \sqrt{\frac{-\dot{X}^2}{m^2}} \right) =$$

$$= \boxed{-m \int d\xi \sqrt{-\dot{X}^2}} \checkmark$$

↳ Equivalente à outra ação

Exercício:

P/ uma partícula de $m=0$

a ação é $\tilde{S} = \frac{1}{2}\int d\xi\,(e^{-1}\dot{x}^2)$.

Encontre as equações do movimento

P/ X^μ

e veja que $v=c$

... Na última aula falamos de propagação e completamento

e encontramos $n^\mu(x) = (n^0(x), n^i(x))$ → corrente de $n^{\underline{o}}$

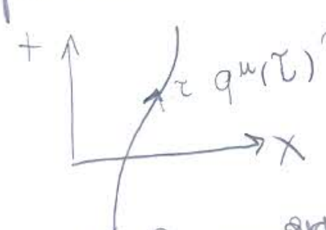
densidade de $n^{\underline{o}}$ ↳ $x = (t, \vec{x}) = x^\mu$

Em SO(3)

↳ 1 partícula na origem: $\begin{cases} n(t,\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \\ \int d^3x\, n(t,\vec{x}) = 1 \end{cases}$

Generalizar para o caso relativístico

Supor uma linha de mundo:



→ Parametrizar pelo tempo próprio

P/ uma partícula na origem: $q^\mu(\tau) = \begin{cases} q^0 = \tau \to \text{só o tempo passa.} \\ \vec{q} = \vec{0} \to \text{parado na origem} \end{cases}$

$\downarrow$

$(q^0, \vec{q})$

Sabemos que $d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}\,dq^\mu dq^\nu$

$$\delta^3(\vec{x}) = \int \delta^3(x)\, d\tau\, \delta(x^0 - q^0(\tau)) =$$

$\vec{q}(\tau) = 0$

$$= \int d\tau \frac{dq^0}{d\tau}\, \delta(x^0 - q^0(\tau))\, \delta^3(\vec{x} - \vec{q}(\tau)) =$$

$\frac{dq^0}{d\tau} = 1$

$$= \int d\tau \frac{dq^0}{d\tau}\, \delta^4(x - q(\tau))$$

↳ $\delta^4(x - q(\tau))$ é um escalar de SO(1,3)

E assim promovemos $\delta(\vec{x})$ p/ $\delta^4(x-q(\tau))$ em $SO(1,3)$

agora podemos completar:

$$n^\mu(x) = \int d\tau \frac{dq^\mu}{d\tau} \delta^4(x-q(\tau))$$

vetor sob $SO(3)$

Generalização p/ mais Partículas

$$n^\mu(x) = \sum_a \int d\tau_a \frac{dq_a^\mu}{d\tau_a} \delta^4(x-q_a(\tau_a))$$

$$\underbrace{J^\mu(x) = \sum_a \int d\tau_a \frac{dq_a^\mu}{d\tau_a} \delta^4(x-q_a(\tau_a))}_{\text{mas queremos vetor corrente de cargas e não de nº}}$$

Corrente de nº

Introduzimos a carga

$$\boxed{J^\mu(x) = \sum_a e_a \int d\tau_a \frac{dq_a^\mu}{d\tau_a} \delta^4(x-q_a(\tau_a))}$$

Corrente eletromagnética

Vamos pensar sobre conservação:

$$\frac{d}{dt} n(t,\vec{x}) = 0 \quad (\bar{N}\text{-Relativístico})$$

$$\partial_\mu n^\mu = 0 \qquad \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (\text{Versão Relativística})$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu} n^\mu = 0}$$

$\hookrightarrow \partial_\mu n^\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} n^\mu(x) = \frac{\partial}{\partial t} n^0 + \frac{\partial}{\partial x^i} n^i =$

$$= \boxed{\frac{\partial}{\partial t} n^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{n} = 0}$$ Equação de conservação

Exercício: Repetir essa analise para uma densidade de energia $\rho(t, \vec{x})$

$\hookrightarrow$ Levar à $SO(1,3)$

$\rightarrow$ Agora podemos voltar ao problema de estender a ação para caso com um potencial $V(\vec{x})$:

$$dt\, V(\vec{x}) \xrightarrow{\text{promovemos}} dt\, A_0(t,\vec{x}) \xrightarrow{\text{completamos}} dt A_0(t,\vec{x}) + dx^i A_i(t,\vec{x}) =$$

$$= dx^0 A_0(x) + dx^i A_i(x) = \boxed{dx^\mu A_\mu(x)}$$ $\rightarrow$ Invariante sob $SO(1,3)$ ✓

$\rightarrow$ E podemos reescrever:

$$\boxed{S = \int \left(-m\sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} + A_\mu(x)\, dx^\mu\right)}$$ $\rightarrow$ Invariante sob $SO(1,3)$ ✓

$\hookrightarrow$ Mas pra podermos adotar isso ainda precisamos checar se se reduz ao caso relativístico e se as equações do movimento provenientes dessa ação fazem sentido

$\hookrightarrow$ Eq do movimento:

$$S = -m\underbrace{\int d\xi \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int d\xi \frac{dx^\mu}{d\xi} A_\mu(x(\xi))}_{\mathrm{II}}$$

$\delta S = 0$

I $\quad \delta\left(-m\int d\xi \sqrt{\dots}\right) = m\int d\tau\, \eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\delta x^\nu =$

$$= -m\int d\tau\, \eta_{\mu\nu}\left(\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\right)\delta x^\nu$$

II $\quad \delta\left(\int d\xi A_\mu(x(\xi))\frac{dx^\mu}{d\xi}\right) =$

$$\xrightarrow{\xi=\tau} \int d\tau\left(A_\mu \frac{d}{dt}x^\mu + (\partial_\nu A_\mu)\delta x^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau}\right) =$$

$$= \int -d\tau\left(\frac{dA_\mu}{d\tau}\right)\delta x^\mu + \int d\tau\,(\partial_\nu A_\mu)\frac{dx^\mu}{d\tau}\delta x^\nu =$$

$\hookrightarrow (\partial_\nu A_\mu)\frac{dx^\nu}{d\tau}$

$$= \int d\tau\left(-(\partial_\nu A_\mu)\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\mu + (\partial_\nu A_\mu)\frac{dx^\mu}{d\tau}\delta x^\nu\right) =$$

troco μ e ν

$$= \int d\tau\, \underbrace{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}_{\simeq\ \boxed{F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu}A_\mu}}\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\mu$$

$\rightarrow$ tensor de ordem 2 sob SO(1,3)

antissimétrico

$(F_{\mu\nu} = F_{\nu\mu}$

Juntando I e II :

$$\delta S = 0 \Rightarrow \int d\tau \left(-m \eta_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \delta x^\nu + F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\mu \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \equiv f^\mu} \rightarrow \text{Força de Lorentz}$$

Exercício

$$\hookrightarrow F^\mu{}_\nu \equiv \eta^{\mu\lambda} F_{\lambda\nu}$$