Eletromagnetismo - Aula 7

... Precisamos falar da diferença entre invariante e covariante

Covariante ↳ "O valor muda, mas a forma não"

↳ O valor muda de uma maneira específica

↓

Ex: eq. do movimento: $\frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = 0$

Invariante ↳ "Não muda de valor"

↓

Ex: Ação é um escalar de $SO(1,3)$

... Anteriormente trabalhamos com uma partícula relativística em um campo de fundo.

- partícula relativística ↳ dinâmica
- campo de fundo ↳ $\bar{\text{N}}$ dinâmico

Sob uma ação:

$$S = \underbrace{-m\int d\xi \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\xi}\frac{dX^\nu}{d\xi}}}_{\text{termo cinético}} + \underbrace{\int d\xi \, A_\mu(X(\xi))\frac{dX^\mu}{d\xi}}_{\text{termo potencial}}$$

⇓ 2 ingredientes

partícula ← $X^\mu(\xi)$ $\qquad$ $A_\mu(X)$ → campo

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$A_\mu(X)$ → Está em função de X porque estamos interessados no campo ao longo da trajetória/linha de mundo da partícula

Fazendo uma variação com respeito à X^μ

$$0 = \delta S = \int d\tau \left(-m\,\eta_{\mu\nu}\frac{d^2X^\mu}{d\tau^2}\delta X^\nu + \underbrace{F_{\mu\nu}\frac{dX^\nu}{d\tau}\delta X^\mu}_{F^\mu{}_\nu \frac{dX^\nu}{d\tau}\eta_{\mu\rho}\delta X^\rho}\right)$$

$\xi = \tau$

$$\boxed{m\frac{d^2X^\mu}{d\tau^2} = F^\mu{}_\nu \frac{dX^\nu}{d\tau} \equiv \mathcal{F}^\mu}$$

... Nós havíamos obtido o termo potencial da Ação por um chute baseado em técnicas de promoção e completamento...

Fizemos várias verificações na forma obtida, mas falta verificar a consistência do limite ñ-relativístico:

$$\left.\begin{array}{l} dt = dx^0 \gg dx^i \\ (dx^0)^2 = (dx^i)^2 = d\tau^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{dt \approx d\tau} \simeq 1 \gg \frac{dx^i}{d\tau}$$

$$\mu = i \Rightarrow m\frac{d^2x^i}{dt^2} = F^i{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} = F^i{}_0 \frac{dx^0}{dt} + \cancel{F^i{}_j \frac{dx^j}{d\tau}}$$

$$\begin{array}{l} A_0 = -V \\ A_i = 0 \end{array} \Rightarrow F^i{}_0 = F_{i0} = \partial_i A_0 - \cancel{\partial_0 A_i} = \partial_i(-V)$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\partial_i V \Rightarrow \boxed{m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla} V}$$ → versão ñ relativística ✓

... Com isso verificado podemos voltar a tratar a equação que tínhamos obtido e ver como se conecta com a Força de Lorentz:

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}$$ → A Tese é: Isso é a força de Lorentz. Vejamos...

$$F_{\mu\nu} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0=t & 1=x & 2=y & 3=z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 0=t \\ 1=x \\ 2=y \\ 3=z \end{array}$$

$\underbrace{F_{0i}} = F_{i0}$

Do ponto de vista de SO(3) é um vetor

→ Nomeamos $F_{0i} \equiv -E_i$

$\underbrace{F_{ij} = -F_{ji}}$

Tensor de ordem 2 sob SO(3)

↳ mapear p/ um vetor

→ Podemos usar o símbolo antissimétrico ε_{ijk}:

$$\varepsilon_{ijk}F_{jk} = \varepsilon_{ijk}F^{jk} \Rightarrow \boxed{B_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}}$$

só i é livre

$B_i = \alpha\, \varepsilon_{ijk} F_{jk}$

"multiplica os dois lados por ε_{imn}

$\varepsilon_{imn} B_i = \alpha \underbrace{\varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk}}_{\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj}} F_{jk} = \alpha(F_{mn} - F_{nm}) = 2\alpha F_{mn}$

$F_{mn} = \varepsilon_{imn} B_i$

$F_{xy} = \varepsilon_{ixy} B_i = \varepsilon_{zxy} B_z = +B_z$

...

Ou seja, podemos perceber que E e B ao serem levados p/ SO(1,3) ñ viram 2 quadrivetores, mas são unificados num único Tensor $\boxed{F_{\mu\nu}}$

$F^{\mu\nu} \xrightarrow[SO(1,3)]{} \boxed{(F^{\mu\nu})' = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} F^{\rho\sigma}}$

Sob uma transformação de Lorentz as componentes elétricas e magnéticas vão se misturar

"O que é elétrico e o que é magnético depende do referencial"

Exercício: Descrever o Eletromagnetismo em 2+1 dimensões (SO(1,2)) e obter

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y \\ E_x & 0 & B \\ E_y & -B & 0 \end{pmatrix}$$

onde E_i é um vetor SO(2) e B é um escalar de SO(2)

Exercício: a) Recupere a Força de Lorentz especializando $\mu = i$ na equação

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = f^\mu$$

b) Entender $\mu = 0$ nessa equação

Dica: Lem que define o quadrimomento $p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}$

p^0 = Energia

... Até agora temos uma assimetria: a partícula é dinâmica, mas o campo não. → Queremos dinamizar o campo

→ Encontrar uma ação p/ A_μ

→ $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ contém derivadas de A_μ então pode ser um bom ponto de partida p/ a construção de um candidato

→ ~~$\eta^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0$~~

→ $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$ → inv. sob $SO(1,3)$ ✓ → 2 derivadas ✓

→ Invariante de Calibre

Vamos entender o que é "Simetria de Calibre"

→ Voltemos à componente potencial da ação: $\int dx^\mu A_\mu$

Era invariante sob

$$\boxed{A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)}$$

→ função escalar de $SO(1,3)$ = Parâmetro de Calibre (gauge)

Transformação de Calibre

→ $\int dx^\mu A_\mu \rightarrow \int dx^\mu (A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)) =$

$$= \underbrace{\int dx^\mu A_\mu}_{\text{OK}} + \underbrace{\int dx^\mu \partial_\mu \Lambda(x)}$$

→ $\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} \partial_\mu \Lambda(x(\tau)) = \Lambda(x(\tau))\Big|_{\tau_i}^{\tau_f}$

→ Se escolhemos um parâmetro Λ tal que $\Lambda \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \tau_i, \tau_f$ então a componente será invariante sob calibre

...Voltando p/ $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} \to \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \Lambda) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) =$$

$$= F_{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda}_{0} \Rightarrow F_{\mu\nu} \text{ é invariante de Calibre}$$

$\Downarrow$

E_i e B_i também é invariante de calibre

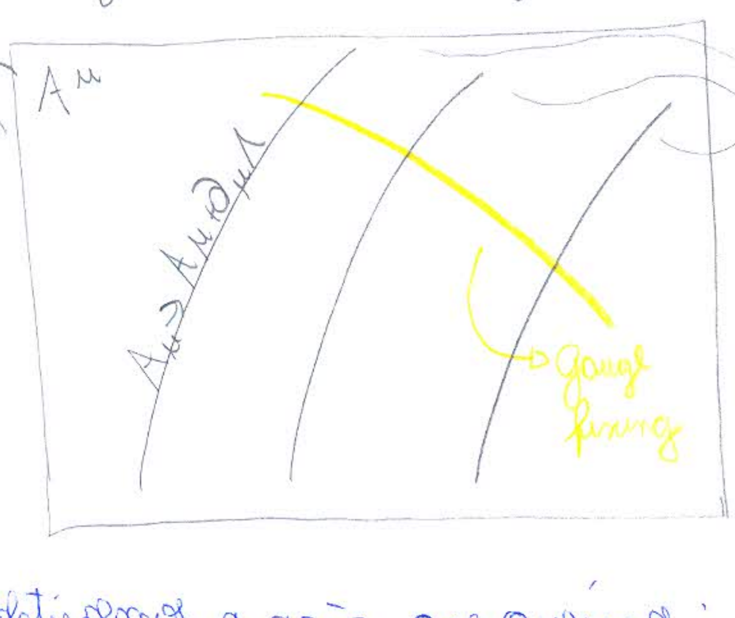
↳ A_μ ñ é

▷ Transf. de Calibre não é uma simetria no sentido ordinário, como uma rotação ou um boost

↳ É uma "redundância" da nossa linguagem de descrever as coisas usando o conceito de campo.

(▷ Para quebrar a redundância será necessário fazer um "Gauge fixing" (Fazer uma escolha de Gauge)

Espaço dos A^μ's possíveis



Órbitas que representam os A_μ invariantes sob calibre.

São várias órbitas → Redundância

... Então obtivemos a ação que queríamos:

Termo de interação entre campos e partículas

$$\boxed{S = \sum_{a=1}^{n} \int \left(-m_a \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_a^\nu} + e_a A_\mu(x_a) dx_a^\mu \right) - \frac{1}{4} \int d^4x \, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}$$

partículas

"Ação de maxwell" ← Campo (acabamos de introduzir)