Eletromagnetismo - Aula 8

... Obtivemos a ação do Eletromagnetismo:

$$\boxed{S = \int \sum_a \underbrace{\sqrt{\eta_{\mu\nu}\, dX^\mu_a\, dX^\nu_a}} + e_a A_\mu(X_a)\, dX^\mu_a \quad - \frac{1}{4}\int d^4x \underbrace{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}}$$

$\Rightarrow \nexists$ termos cruzados $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ As partículas interagem através dos campos.

$\hookrightarrow \int dt\, \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L} = \int d^3x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

$\hookrightarrow$ densidade de Lagrangeana do campo

Já fizemos $\dfrac{\delta S}{\delta X^\mu_a} \Rightarrow$ Força de Lorentz

Agora precisamos fazer: $\dfrac{\delta S}{\delta A_\mu} \to$ p/ obter as eq. de Maxwell

I

$$\delta\left(-\frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) =$$

$\hookrightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$\hookrightarrow \delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = 2F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} =$

$$= 2F_{\mu\nu}(\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu) =$$

$$= 2F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu - 2F_{\mu\nu}\partial^\nu A^\mu =$$

$$= 2(F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu})\partial^\mu \delta A^\nu =$$

$$= 4F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A$$

$$= + \int d^4x (\partial_\mu F^{\mu\nu}) \delta A_\nu$$

II $\delta \left(\int \sum_a e_a A_\mu(x_a) \, dx^\mu_a \right) =$

$\hookrightarrow A_\mu(x_a) = \int d^4x \, \delta^4(x - x_a) A_\mu(x)$

$$= \delta \left(\sum_a e_a \int d^4x \, \delta^4(x - x_a) A_\mu(x) \, dx^\mu_a \right) =$$

$$= \delta \left(\sum_a e_a \int d\tau_a \int d^4x \, \delta^4(x - x_a(\tau)) A_\mu(x) \frac{dx^\mu_a}{d\tau_a} \right) =$$

$$= \delta \left(\int d^4x \underbrace{\sum_a e_a \int d\tau_a \frac{dx^\mu_a}{d\tau_a} \delta^4(x - x_a(\tau_a))}_{\text{é um Vetor de Lorentz, específico que já vamos: } J^\mu(x) \to \text{a corrente 4-P}} A_\mu(x) \right) =$$

$$= \delta \left(\int d^4x \, J^\mu(x) A_\mu(x) \right) = \int d^4x \, J^\mu(x) \, \delta A_\mu(x)$$

$\hookrightarrow$ A variação não age sobre $J^\mu(x)$ porque é a variação com respeito à A e $J^\mu(x)$ só depende da posição da partícula x e não do campo A.

Juntando I e II:

I + II $= 0$ (Extremiza a ação) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu}$$

$\hookrightarrow \delta_A S = 0 \Rightarrow \delta_A(\text{I}) + \delta_A(\text{II}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int d^4x \left(\partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu \right) \delta A_\nu = 0$$

Obs: Ainda possuímos uma liberdade nessa estrutura: não definimos explicitamente e_a, que representa a carga da partícula a e que acopla as partículas ao campo.

Exercício: Como será o parâmetro de acoplamento típico em QED (Eletrodinâmica Quântica)?

Dicas: Parâmetro adimensional, usar $c, \hbar, e, m_e \ldots$ } Vetor $\frac{1}{137}$ → constante de estrutura fina (Em primeira ordem)

Exercício: Verifique que $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu$ contém as eq de Maxwell:

Exemplo: $\nu = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu 0} = -J^0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{\partial_0 F^{00}} + \partial_i \underbrace{F^{i0}}_{-E^i} = -J^0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho}$$ → Lei de Gauss.

de $\nu = i \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}$

Usando a equação que obtivemos é fácil verificar a conservação da corrente:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu$$

$$\hookrightarrow \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\nu J^\nu$$

$$\hookrightarrow \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_{\mu \to \nu} \overbrace{F^{\mu\nu \to \nu\mu}}^{= -F^{\mu\nu}} =$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu - \partial_\mu \partial_\nu) F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\nu J^\nu = 0}$$

...Mas espera ... Nós só obtivemos duas eq de Maxwell...

Como obter as outras duas?

Elas vem de identidades de Bianchi:

Introduzamos $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}) = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) =$$

$$= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\partial_\rho A_\sigma = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0}$$ $\rightarrow$ Daqui vem as outras duas equações de Maxwell.

<u>Exercício</u>: Verificar que $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ estão contidos em $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$

E obtivemos as Equações de Maxwell:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu$$

<u>Exercício - Desafio</u>: Derivar a Relatividade Geral seguindo as mesmas idéias

Dica: Colocar o potencial dentro da raiz

Agora podemos partir para a ...

ELETROESTÁTICA

(Problemas num referencial em que $\vec{J}=0$ e $\vec{B}=0$)

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho \;\text{(ou } 4\pi\rho \text{ ou } \rho/\varepsilon_0\text{)}\\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=0\end{array}\right\}$$ E queremos determinar $\vec{E}$

↳ Temos dois Tipos de Situações

↳ Bastante simétricos ⇒ $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho$ é suficiente → Parte + importante p/ P1.

↳ não há bastante simetria ⇒ Precisamos também de $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$

↳ Na prática precisamos introduzir o potencial $V(\vec{x})$

... Vamos começar pelo primeiro caso:

Lei de Gauss:

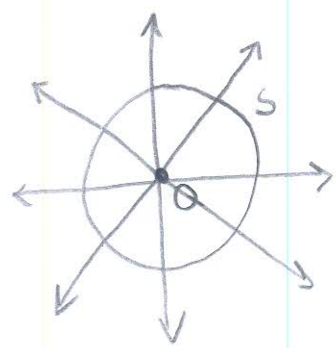
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=4\pi\rho$$

Integra

$$\int_V d^3x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\int_V d^3x\, 4\pi\rho$$

Teorema de Gauss

$$\int_{S=\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_V d^3x\,\rho\equiv Q$$



↳ Precisamos escolher uma superfície Gaussiana que contenha a densidade de carga

Escolhendo uma esfera ...

↳ Lei de Coulomb:

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)\int_S \hat{r}\cdot r^2 d\varphi \, \text{sen}\theta \, d\theta \, \hat{r} \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = 4\pi Q$$

↳ Simetria: $\vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$

↳ $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{r^2}\hat{r}}$

▷ Força de Lorentz:

$\vec{v} = 0$, $\vec{B} = 0$

$$\vec{F} = q\vec{E} = q\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

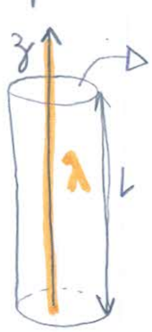
↳ carga de Prova (Supondo que ñ influencia o campo)

Exercício: Verificar que nesse caso $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$

Exercício: Estimar $\left|\frac{F_{coulomb}}{F_{newton}}\right|$ p/ uma dupla elétron/pósitron

Exercício: Calcular o campo para uma esfera uniformemente carregada

Exemplo: Densidade linear:



▷ ñ precisamos nos preocupar com as tampas pq $\vec{E}\cdot\vec{dS}\Big|_{tampas} = 0$

→ $\vec{E} = \frac{2\lambda}{r}\hat{r}$