Eletromagnetismo - Aula 10

Começamos a aula tirando uma dúvida sobre monopolos magnéticos. Agora vamos falar de...

▷ D-Branas (Não cai na prova)

Até agora trabalhamos com $F_{\mu\nu}$, A_μ, J_ν. Seria mais interessante generalizar essas entidades e evitar seus índices... Fazemos isso com formas diferenciais:

▷ Símbolo de Wedge

$$F_{\mu\nu} \to \text{"2-forma"} \quad F_{(2)} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \underbrace{dx^\mu \wedge dx^\nu}_{\text{Operação antissimétrica}}$$

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$$

$$A_\mu \to \text{1-forma} \quad A_{(1)} = A_\mu dx^\mu$$

$$J_\mu \to \text{1-forma} \quad J_{(1)} = J_\mu dx^\mu$$

n-forma

$$A_{(n)} = \frac{1}{n!} A_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots dx^{\mu_n}$$

$$F_{(n+1)} = dA_{(n)} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} A_{\mu_1} \dots A_{\mu_n}\right) dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$$

Como integramos uma forma?

$$\hookrightarrow \int_M F_{(n+1)} = \int_M F_{1 \dots n+1}\, d^{n+1}x$$

- Dual de Hodge: *

▷ dimensão

* atuando numa n-forma → (D-n) forma

$$(*F)_{\mu_1 \dots \mu_{D-n}} = \frac{1}{n!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_{D-n}}{}^{\nu_1 \dots \nu_n} F_{\nu_1 \dots \nu_n}$$

▷ Começamos a ver que o $\tilde{F}_{\mu\nu}$ que vimos anteriormente nada mais é que o Dual de Hodge de F

- Nesse formalismo podemos reescrever as equação de maxwell como:

$$\begin{cases} dF = *J_m \\ d*F = *J_e \end{cases}$$

$\Downarrow$ Integrando essas equações

$$\begin{cases} e = \int_{S^2} *F \\ e_m = \int_{S^2} F \end{cases}$$

→ Partículas Puntiformes (cargas $\delta^3(\vec{x})$)

→ Acoplamento com o campo:

$$e\int d\tau A_\mu \dot{x}^\mu = e\int A_\mu dx^\mu = e\int A_{(1)}$$

→ Uma partícula de dimensão zero → Acopla eletricamente numa 1-forma

↓

0-Brana: → $\boxed{\text{Def: Uma } \underline{p\text{-brana}} \text{ é uma membrana / hiper-superfície com p dimensões espaciais}}$

→ Como uma p-brana se acopla com o campo eletromagnético?

p-brana → "folha de mundo" de $(p+1)$-dimensões no espaço-tempo

$\Big\downarrow$ SE ACOPLARÁ COM

$\boxed{(p+1)\text{-forma}}$

$$A_{(p+1)} \to F_{(p+2)}$$
$$\hookrightarrow \ast F_{(p+2)}$$
$$\underbrace{}_{D-p-2}$$

$\int_{S^{D-p-2}} \ast F_{(p+2)} \to$ "carga elétrica"

$\int_{S^{p+2}} F_{(p+2)} \to$ "carga magnética"

$\triangleright$ Generalizadas

$\triangleright$ Voltemos às Funções de Green...

$$\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\boxed{G(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}$$

Função de Green

$$V(\vec{x}) = -4\pi\int_V d^3x'\, G(\vec{x}-\vec{x}')\rho(\vec{x}') = \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}V(\vec{x}) = -\int d^3x'\,\rho(\vec{x}')\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\int_V d^3x'\,\rho\,\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

Essa integral é normalmente difícil de ser calculada, mas podemos fazer a aproximação de que o ponto em que estamos calculando está <u>bem longe da distribuição</u>

$$(|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|\ \forall x' \in V)$$

$\triangleright$ P/ um <u>Dipolo</u>: (P/ depois generalizar ao problema que estamos interessados)

Q

$-Q$

$$V = \frac{Q}{x} - \frac{Q}{|\vec{x}+\vec{d}|}$$

Expansão de Taylor:

$$f(\vec{x}+\vec{d}) \underset{x \gg d}{\cong} f(x) + \vec{d}\cdot\vec{\nabla}f + \tfrac{1}{2}(\vec{d}\cdot\vec{\nabla})^2 f(\vec{x}) + \dots$$

...

$$\frac{1}{|\vec{x}+\vec{d}|} \cong \frac{1}{r} + \vec{d}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r} + \frac{1}{2}(\vec{d}\cdot\vec{\nabla})^2\frac{1}{r} + \dots =$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{\vec{d}\cdot\vec{x}}{r^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{d}\cdot\vec{d}}{r^3} - \frac{3(\vec{d}\cdot\vec{x})^2}{r^5}\right) + \dots$$

$\boxed{\text{Exercício: Verificar isso}}$

def.: $\vec{p} \equiv Q\vec{d}$
momento de dipolo

$$V_{dipolo} = Q\left(\frac{1}{r} \bullet \frac{1}{r} - \vec{d}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) + \dots =$$

$$= Q\,\frac{\vec{d}\cdot\vec{x}}{r^3}$$

$$\boxed{V_{dipolo} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{r^3}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E}_{dipolo} = -\vec{\nabla}V_{dipolo} = \frac{3\vec{p}\cdot\hat{x}\;\hat{x} - \vec{p}}{r^3}$$

Voltando p/ o nosso caso mais geral ($\vec{d} \to -\vec{x}'$):

$$V(\vec{x}) = \int_V d^3x'\,\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \cong \int_V d^3x'\,\rho(\vec{x}')\left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^3} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\int_V d^3x'\,\rho(\vec{x}') + \frac{1}{r^3}\int_V d^3x'\,\rho(\vec{x}')\,\vec{x}\cdot\vec{x}' =$$

$$= \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{r^3} + \dots$$

$$\boxed{\vec{p} = \int_V d^3x'\,\vec{x}'\rho(\vec{x}')}$$

momento de dipolo da distribuição.

→ Se você olha de longe o suficiente você vê algo com um termo de monopolo, um termo de dipolo e assim por diante ... (Aproximamos como uma carga puntiforme e vamos adicionando uma série de correções).

→ Isso é a primeira amostra de algo que chamamos de Expansão de Multipolos → Veremos isso em mais detalhes depois

Exercício: Continuar a expansão e verificar que o próximo termo (de quadrupolo) é:

$$V_{Quadrupolo} = \frac{x_i x_j Q_{ij}}{2 r^5}$$

onde $Q_{ij} = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') (3x_i' x_j' - \delta_{ij} x'^2)$