Eletromagnetismo - Aula 12

Obs: O assunto da Aula de hoje está no Jackson.

Até aqui fizemos eletrostática com cargas (puntiformes ou distribuições contínuas) fixadas e ~~com~~ sem condições de contorno "interessantes"

↳ Nossas condições eram do tipo $V(\vec{x}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

$$V(\vec{x}) = \# \int \frac{\rho(\vec{x}')\,d^3x}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Agora vamos trabalhar com cargas "livres" e com condições de contorno $\bar{n}$ - triviais.

E p/ isso precisamos falar de condutores

Condutores:

↳ P/ nós um condutor é tal que:

↳ Dentro do condutor $\vec{E} = 0$)

↳ $\vec{E} = 0 \Rightarrow \varphi = \text{cnte}$

↳ $\vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \rho = 0$

↳ Podem ser neutros ou carregados

Se houver carga na superfície externa:

↳ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \Rightarrow \perp$ à superfície do condutor

↳ Fora do condutor: $\vec{E} = 4\pi\sigma\hat{n}$

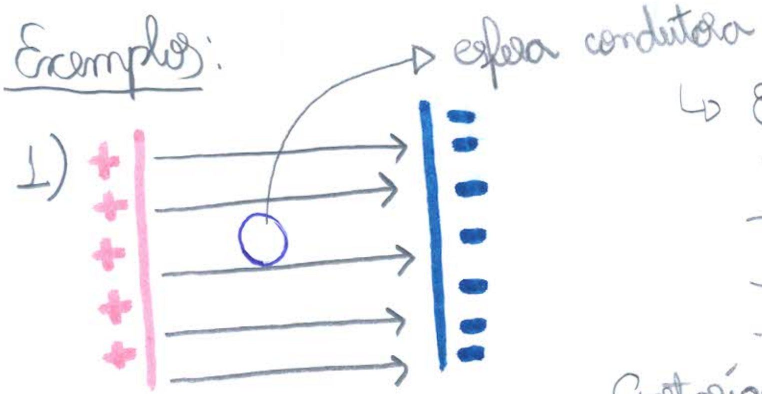
E da condição de descontinuidade

> Obs: A partir daqui mudaremos a notação:
>
> $V \to \varphi$
>
> $V = \varphi_1 - \varphi_2$
>
> ↳ V agora simboliza DDP.

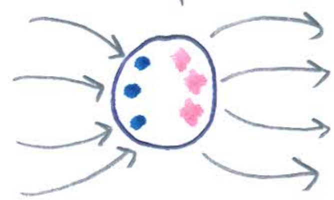
"Note que ao escolher um problema com vários condutores nós temos várias condições de contorno, e não apenas a condição de contorno do infinito que tínhamos antes"

Exemplos:

1)



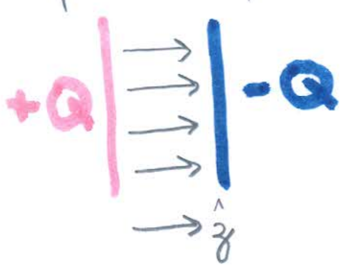
↳ Ela se polariza alterando as linhas de campo



Gostaríamos de entender a distribuição dessas cargas (Esse problema será nossa motivação)

2) Gaiola de Faraday (Vide Griffiths)

3) Capacitores planos:



Sabemos:

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\hat{z} \qquad \sigma = \frac{Q}{Área}$$

Capacitância

$$C \equiv \frac{Q}{V}$$

Temos: $E = -\frac{d\varphi}{dz} = cte \Rightarrow \varphi = -Ez + cte$

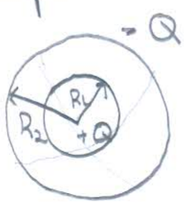
$$V = \varphi(0) - \varphi(d) = Ed = \frac{4\pi Q d}{Área}$$

$$C = \frac{Área}{4\pi d}$$

→ Capacitores permitem armazenar energia:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int d^3x \vec{E}^2 = \frac{Área}{8\pi}\int_0^d dz (4\pi\sigma)^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

4) Capacitor Esférico (Vide Livro)



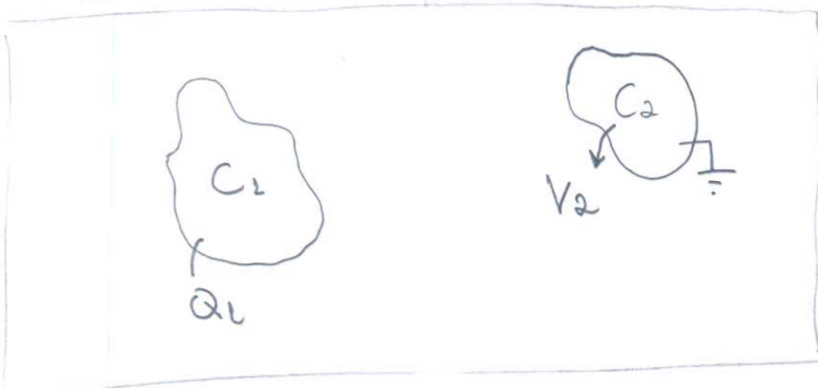
$$\left.C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right\} \text{Caso concêntricos}$$

Condutores → Carga fixada Q
ou
→ Potencial fixado V

} → dois tipos de condições

↳ Na prática fazemos isso acoplando o condutor a um reservatório de carga (aterrando)

Podemos, inclusive tratar de problemas com vários tipos de condutores, cada um com um tipo de condição diferente (Mas nunca o mesmo condutor com as duas condições)



→ $r=\infty$ (Ainda temos a condição de contorno do ∞)

Resolver $\nabla^2\varphi=0 \xrightarrow[\text{são}]{} C_i \begin{cases} Q_i \to \vec{\nabla}\varphi\cdot\hat{n} \to \text{Neumann (N)} \\ \text{ou} \\ V_i = \text{potencial em } S_i \to \text{Dirichlet (D)} \end{cases}$

↳ S_i é a superfície ∂C_i

Teorema da Unicidade:

"Ou" exclusivo

Se eu especifico (D) ou (N) em cada S_i ⇒ $\nabla^2\varphi=0$ tem uma solução única

Prova (Por absurdo): Suponhamos ∃ 2 soluções φ_1 e φ_2 c/ as mesmas condições de contorno em cada S_i:

$$f \equiv \varphi_1-\varphi_2 \qquad \int_V d^3r\,\vec{\nabla}\cdot(f\vec{\nabla}f) = \int_V d^3r\,(\vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}f + \cancel{f\nabla^2 f}^{\,0})$$

$$= \sum_i \int_{S_i} f\vec{\nabla}f\cdot d\vec{S} + 0 \to \text{da esfera } S^2_\infty$$

$$\underbrace{\sum_i \int_{S_i} f\vec{\nabla}f\cdot d\vec{S}}_{} = \int_V d^3\vec{x}\, |\vec{\nabla}f|^2$$

$=0$ por causa das condições de contorno serem as mesmas p/ φ_1 e φ_2

Ⓓ $\rightarrow f=0$

Ⓝ $\rightarrow \vec{\nabla}f=0$

$\Rightarrow 0 = \int_V d^3\vec{x}\, |\vec{\nabla}f|^2$

$\Downarrow$

$\vec{\nabla}f = 0$ em V

Ⓝ em todos S_i

$f = \text{cnte} \neq 0$

$\varphi_1 = \varphi_2 + \underbrace{\text{cnte}}_{}$

Irrelevante p/ a solução

Ⓓ em alguma $S_i \Rightarrow$ nessa S_i $f=0$

e como $\vec{\nabla}f=0$

então $f=0$ em todo V

$\varphi_1 = \varphi_2$

Com esse teorema sabemos que se encontrarmos uma solução ela é única. Agora precisamos aprender a encontrar uma solução e pra isso vamos precisar descobrir como adaptar a função de Green $G(\vec{x}, \vec{x}')$

Qual é a função de Green sobre condições de contorno?

Teorema de Green:

Corolário do Teorema de Gauss:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d^3x = \oint_{S=\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{S} \quad \text{Ⓘ}, \quad d\vec{S} \to \hat{n}\, dS$$

Escolhendo $\vec{A} = \varphi\vec{\nabla}\psi$

Campos escalares arbitrários

Ⓘⓘ $\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{\nabla}\psi) = \varphi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi \\ \varphi\vec{\nabla}\psi\cdot\hat{n} = \varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial n} \end{cases}$

direção ortogonal à S

E substituindo Ⓘⓘ em Ⓘ obtemos

$$\left(\int_V (\varphi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi)\, d^3x = \oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS \right)$$

E subtraindo disso a mesma expressão com φ trocado por ψ

$$\boxed{\int_V (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\, d^3x = \oint_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS}$$

Vamos introduzir uma escolha física:

$$\begin{cases} \psi = \phi_L \\ \psi = \dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} &\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho \\ &\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \end{aligned}$$

E substituindo no Teorema:

$$\int_V \left(-4\pi\varphi(\vec{x}')\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') + \frac{4\pi}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\rho(\vec{x}')\right) d^3x' =$$

$$= \oint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\frac{\partial \varphi}{\partial n'}\right) ds' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(\vec{x}) = \underbrace{\int_V \frac{\rho(\vec{x}')\,d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{\text{O que tínhamos antes}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint_S \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\frac{\partial\varphi}{\partial n'} - \varphi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right) ds'}_{\text{Mais um termo referente às condições de contorno}}}$$

1) $S \to S^2_\infty$: $\frac{1}{4\pi}\oint_S (\ldots) ds' \to 0$ (Caso original)

2) $\frac{1}{4\pi}\oint_S (\ldots) ds'$ contém $\varphi|_S$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_S$

Analogamente queremos encontrar uma função de Green

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + F(\vec{x},\vec{x}')$$

$\hookrightarrow \nabla^2 F(\vec{x},\vec{x}') = 0$ em V

... Reescolhendo $\psi = G(\vec{x},\vec{x}')$ podemos reescrever o Teorema de Green como:

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V \rho(\vec{x}')\,G(\vec{x},\vec{x}')\,d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left(G(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}\varphi(\vec{x}') - \varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x},\vec{x}')\right) ds'$$

Se eu quiser (D) em S

$$\left[G_D(\vec{x},\vec{x}')=0 \;\; \forall \vec{x}' \in S \right]$$

→ Preciso escolher F tq $\boxed{G_D=0 \;\forall \vec{x}\in S}$

Já se eu escolho (N) em S:

Poderia querer escrever ~~$\frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{x},\vec{x}')=0 \;\forall \vec{x}' \in S$~~

mas ñ posso.

$$\Rightarrow \int \nabla^2_{\vec{x}} \cdot G(\vec{x},\vec{x}') = \int -4\pi\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

↓

$$\oint_S \frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{x},\vec{x}')\, da' = -4\pi \Rightarrow \boxed{\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{4\pi}{S} \quad \forall \vec{x}' \in S}$$

área de S

$$\boxed{\varphi(\vec{x}) = \langle \varphi \rangle_S + \int_V \rho G_N + \frac{1}{S}\oint_S \varphi\, da' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n'} G_N\, da'}$$

⊕ detalhes no cap. 1 do Jackson

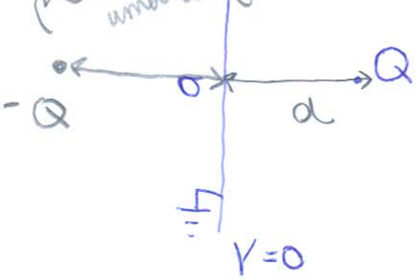
Mas como encontramos F que respeite essa condição.

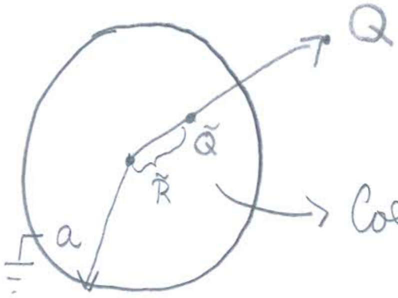
Uma maneira é o método das cargas - imagem

→ $\boxed{\text{Tarefa: Ler sobre o método p/ próxima aula}}$

→ Método das cargas imagens:

Ex1: → Introduzimos uma carga imaginária simétrica na região inacessível





Carga imaginária com $\begin{cases} \boxed{\tilde{R} = \dfrac{a^2}{R}} \\ \tilde{Q} = \dfrac{R}{a} Q \end{cases}$

Esse método funciona, mas raramente se fala porque funciona

A resposta tem haver c/ essa equação

↳ Ela é uma inversão. E nós conseguimos resolver fazendo uma inversão porque a ação de Maxwell $S = \frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ tem uma outra simetria além de Lorentz e Gauge:

As Simetrias Conformes, da qual a inversão é um caso particular.

↳ Uma simetria conforme fácil de ser entendida é a simetria de escala:

Vamos ver que S é invariante sob essa transformação

$$x^\mu \to \lambda x^\mu$$

$$d^4x \to \lambda^4 d^4x$$

$$\left.\begin{aligned} &F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ &\partial_\mu \to \lambda^{-1}\partial_\mu \\ &A_\nu \to A_\nu + \underbrace{\partial_\nu \Lambda}_{\lambda^{-1}\partial_\nu \Lambda} \\ &\text{e por homogeneidade} \\ &A_\nu \to \lambda^{-1} A_\nu \end{aligned}\right\} F_{\mu\nu} \to \lambda^{-2}F_{\mu\nu}$$

$$\to S \to \frac{1}{4}\int \lambda^4 d^4x\, \lambda^{-2}F_{\mu\nu}\, \lambda^{-2}F^{\mu\nu} =$$

$$= \frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = S \text{ (Invariante)}$$

↳ Obs: Apenas em 4 dimensões