Eletromagnetismo - Aula 13

Obs: O professor sugere a leitura do Capítulo 2.6 do Jackson

Vamos continuar vendo Técnicas de Solução da Equação de Laplace ...

→ Separação de Variáveis
↳ Em coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \varphi(x,y,z)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi(x,y,z) = 0$$

Tomamos $\varphi(x,y,z) = X(x), Y(y) Z(z)$ e dividimos por XYZ

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{\substack{f(x) \\ = \text{cnte}}} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{\substack{f(y) \\ = \text{cnte}}} + \underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{\substack{f(z) \\ = \text{cnte}}} = 0$$

⇓

Oscilador harmônico

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2$$

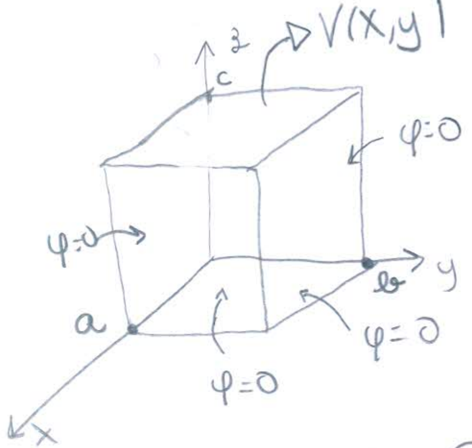
$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2 \qquad \text{tq } \alpha^2+\beta^2=\gamma^2$$

Oscilador harmônico c/ sinal trocado

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = +\gamma^2$$

↳
$$\begin{cases} X \to e^{\pm i\alpha x} \\ Y \to e^{\pm i\beta y} \\ Z \to e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi = e^{\pm i\alpha x \pm i\beta y \pm \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z}}$$

Vejamos um exemplo:



$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \varphi=0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} X=\operatorname{sen}(\alpha x) \\ Y=\operatorname{sen}(\beta y) \\ Z=\operatorname{senh}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z) \end{matrix}\right\} \text{ I}$$

$$\left.\begin{matrix} x=a \\ y=b \end{matrix}\right\} \varphi=0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha a = n\pi \\ \beta b = m\pi \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_n = n\pi/a \\ \beta_m = m\pi/b \end{matrix}\right. \text{ II}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_{nm} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}$$

$m, n \in \mathbb{Z}$

De I e II:

$$\varphi_{nm} = \operatorname{sen}(\alpha_n x)\operatorname{sen}(\beta_m y)\operatorname{senh}(\gamma_{nm} z)$$

Falta impor a condição de contorno da face superior.

Podemos usar o princípio da superposição e tomar.

$$\varphi(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\, \varphi_{nm}(x,y,z)$$

$$\varphi(x,y,z) = V(x,y)$$

$$V(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \operatorname{sen}(\alpha_n x)\operatorname{sen}(\beta_m y)\operatorname{senh}(\gamma_{nm} c)$$

Queremos inverter a série p/ achar o coeficiente A_{nm}

Obs: Podemos fazer isso devido à ortogonalidade das funções seno.

$$\boxed{A_{nm} = \frac{4}{ab\operatorname{senh}(\gamma_{nm} c)} \int_0^a dx \int_0^b dy\, V(x,y)\operatorname{sen}(\alpha_n x)\operatorname{sen}(\beta_m y)}$$

p/ + detalhes sugere-se o Capítulo 2.10 do Jackson

↳ Coordenadas Esféricos (r, θ, ϕ)

A equação de Laplace

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0$$

Supondo $\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\phi)$

$$r^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{Pr^2\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right) + \frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2} = 0 \quad \text{(I)}$$

mas sob as condições

$$\boxed{\begin{gathered} Q(\phi+2\pi) = Q(\phi) \\ |P(\theta)\, Q(\phi)| < \infty \;\; \forall\, \theta \in [0,\pi],\; \phi \in (0, 2\pi] \end{gathered}}$$

Antes vamos nos concentrar no caso puramente angular:

$$\underbrace{\frac{\operatorname{sen}\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right)}_{f(\theta)} + \underbrace{\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2}}_{g(\phi)}$$

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2}\,\alpha^2 \Rightarrow \frac{d^2}{d\phi^2}Q = \alpha^2 Q$$

→ Equação de Autovalores do operador $\frac{d^2}{d\phi^2}$

$$\Downarrow$$

$$Q = e^{\pm\alpha\phi}$$

$$Q(\phi+2\pi) = e^{\pm\alpha\phi}e^{\pm 2\pi\alpha} \overset{!}{=} e^{\pm\alpha\phi}$$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\alpha = im}$ $m \in \mathbb{Z}$

↳ $\boxed{Q = e^{im\phi}}$

E agora podemos tratar o restante da equação...

(Tomando $\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2} = -m^2$)

...

II $\begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\dfrac{dP}{d\theta}\right)+\lambda-\dfrac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}P=0 & (a) \\ \dfrac{d^2U}{dr^2}-\dfrac{\lambda}{r^2}U=0 \end{cases}$ → Onde λ é uma nova cnte do movimento que introduzimos

Exercício: Verificar a passagem da eq I p/ o sistema II

Reescrevendo II.a como

$$\frac{d^2P}{d\theta^2}+\operatorname{cotg}\theta\frac{dP}{d\theta}+\left(\lambda-\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)P=0 \quad \text{III}$$

Exercício: Verificar a passagem da eq III p/ a Eq de Legendre

Substituindo $\cos\theta \equiv x \quad -1\leq x\leq 1$

$$\boxed{(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-2x\frac{dP}{dx}+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P=0}$$

Equação de Legendre

→ Digressão na solução dessa eq $(p/\, m=0)$:

→ Problema: Temos singularidades em $x=\pm1$ e $x=\infty$, mas podemos reescrever a eq como:

$$P''+p(x)P'+q(x)P=0 \longrightarrow p(x)=\frac{-2x}{1-x^2} \text{ e } q(x)=\frac{\lambda}{1-x^2}$$

→ Dois tipos de pontos

→ regulares: $p(x), q(x)$ são regulares

→ singulares: $p(x), q(x)$ convergem

→ regulares e singulares (pontos fuchsianos)

→ são tais que $\exists \begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)p(x) \\ q_0=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x) \end{cases}$

...

...→ Quando temos pontos desse tipo podemos escrever uma "eq. indicial":

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0 \longrightarrow \rho_1, \rho_2 \text{ raízes} \quad \text{→ Expoentes característicos}$$

$$\rightarrow \boxed{P_i = (x - x_0)^{\rho_i} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(i)} (x - x_0)^n} \quad i = 1, 2$$

↳ Isso vale qndo $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$

Se $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\begin{aligned} P_1 &= (x - x_0)^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \\ P_2 &= a P_1 \log(x - x_0) + (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \end{aligned}}$$

... Voltando ao nosso caso específico:

Nossos pontos-problema eram:

$\boxed{x = 1}$ → fuchsiano

$$\begin{cases} p_0 = \lim_{x \to 1} (x - 1)\, p(x) = \lim_{x \to 1} (x - 1) \dfrac{-2x}{(1-x)(1+x)} = 1 \\ q_0 = \lim_{x \to 1} (x - 1)^2 q(x) = 0 \end{cases}$$

A equação se reduz a $\rho^2 = 0 \Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = 0$

↳ Caímos no caso $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$ então a solução fica:

$$\boxed{P = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - 1)^n}$$

↳ P_2 ñ é admissível por causa da polidromia do log

E ~~agora~~ vamos substituir nossa solução nossa equação p/ obter uma relação de recursão p/ os coeficientes C_n

...

$$\left\{\begin{array}{l} \xi(\xi+2)\dfrac{d^2P}{d\xi^2} + 2(\xi+1)\dfrac{dP}{d\xi} - \lambda P = 0 \qquad \boxed{\xi = x-1} \\ P = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_n C_n\left((\xi^2+2\xi)\, n(n-1)\,\xi^{n-2} + 2(\xi+1)\, n\xi^{n-1} - \lambda \xi^n \right) =$$

$$= \sum_n C_n\left(\xi^n\left(n(n+1)-\lambda \right) + 2n^2\xi^{n-1} \right) =$$

$$= \sum_n \left(C_n\left(n(n+1)-\lambda\right) + 2(n+1)^2 C_{n+1} \right)\xi^n$$

É uma soma de termos funcionais independentes que se anula ⇒ só se todas as funções se anularem separadamente

$$\boxed{C_{n+1} = \frac{\lambda - n(n+1)}{2(n+1)^2}\, C_n}$$

podemos redefinir

$\lambda = \nu(\nu+1)$

inspirados por essa estrutura

$$C_{n+1} = -\frac{(n-\nu)(n+\nu+1)}{2(n+1)^2}\, C_n$$

C_0 = arbitrário $\rightarrow$ $\boxed{C_0 \equiv 1}$

... Podemos reescrever C_n reiteradamente

$$C_n = (-1)^n \frac{-\nu(\nu+1)}{2 \cdot 1^2} \cdot \frac{(-\nu+1)(\nu+2)}{2 \cdot 2^2} \cdots \frac{(-\nu+n-1)(\nu+n)}{2n^2}$$

E podemos reescrever em função de $\left\{\begin{array}{l} (a)_0 \equiv 1 \\ (a)_n \equiv a(a+1)(a+2)\ldots \\ \ldots(a+n-1) \end{array}\right.$

$$C_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{(-\nu)_n (\nu+1)_n}{(1)_n} \frac{1}{n!}$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_n(\nu+1)_n}{(1)_n} \frac{1}{n!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^n$$

Def.: Função ~~Geom~~ Hipergeométrica:

$$\boxed{F(a,b,c,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{\xi^n}{n!}}$$

$$P(x) = F\left(-\nu, \nu+1, 1, \frac{1-x}{2}\right)$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{Em } x=+1 \text{ OK} \\ \text{Em } x=-1 \quad F(a,b,c,1) \text{ diverge}\end{array}\right.$

P/ impedir divergência temos que cortar a soma

$\nu = \ell, \quad \ell \in \mathbb{Z} \geq 0$

$$(-\ell)_\ell = -\ell(-\ell+1)\dots(-1) = (-1)^\ell \ell!$$

$$(-\ell)_{\ell+k} = \ell(-\ell+1)\dots(-1)(0)(1)(k-1) = 0$$

$$P(x) = F\left(-\ell, \ell+1, 1; \frac{1-x}{2}\right) \equiv P_\ell(x)$$

$\ell = 0, 1, 2, \dots$

Polinômios de Legendre

Obs: P/ $m \neq 0$ você pode encontrar a derivação no Jackson (Cap. 3