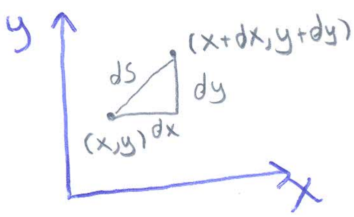
Eletromagnetismo - Aula 14

Vamos continuar falando sobre a Equação de Laplace em coordenadas esféricas, mas antes precisamos falar um pouco melhor sobre...

(Ou como escrever ∇^2 em esféricas semelhar no Jackson)

Transformação de Coordenadas:

Em 2D:



$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$(x,y) \rightarrow (r,\theta)$

cartesianas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = dr\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta\, d\theta \\ dy = dr\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Em 3D: $(x,y,z) \rightarrow (r,\theta,\varphi)$

$$\rightarrow ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\,\text{sen}^2\theta\, d\varphi^2 \quad \text{(I)}$$

Vamos ver a teoria de transformação de coordenadas
(Até aqui trabalhamos quase-intuitivamente sobre coordenadas familiares)

→ Tratando de coordenadas genéricas (3D): → "métrica" → Aqui abre-se uma porta interessante p/ a relatividade geral

x^i (coordenadas) $\rightarrow ds^2 = g_{ij}(x)\, dx^i dx^j$

"medir distâncias"

Em cartesianas $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$

Em polares
$$g_{ij}(x) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\,\text{sen}^2\theta \end{pmatrix} & \begin{array}{c} r \\ \theta \\ \varphi \end{array} \\ \begin{array}{ccc} r & \theta & \varphi \end{array} & \end{array}$$

Corolário: Escreva a métrica de uma esfera S^2 em $\mathbb{R}^3$ com raio a:

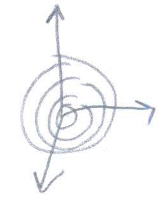
$r = a$

de (I)

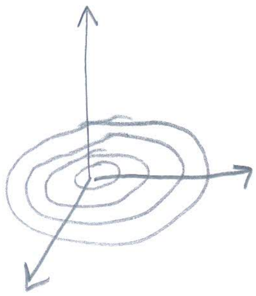
$$ds^2 = 0 + a^2 d\theta^2 + a^2\,\text{sen}^2\theta\, d\varphi^2 =$$
$$= a^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\varphi^2)$$

→ Digressão: Como estamos descrevendo o espaço?

↳ Estamos "folheando" o espaço com cascas esféricas.



Tomando um buraco negro de Kerr → Caracterizados apenas pelo momento J



↳ P/ descrevê-los ao invés de folhearmos o espaço c/ esferas, é mais útil folheá-los com elipses (Coordenadas de Boyer-Lindquist)

P/ tal fazemos uma variação sobre as esféricas:

$$\begin{cases} x = f(r)\,\text{sen}\theta\cos\varphi \\ y = f(r)\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = f'(r)\,dr\,\text{sen}\theta\cos\varphi + \dots \\ \dots \end{cases} \Rightarrow$$

$dx^2+dy^2+dz^2 = (f'^2\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)dr^2 + \dots (\;)d\theta^2 + (\;)d\varphi^2 + (\;)\overset{0}{dr\,d\theta}$

↳ com escolha de f

$$ds^2 = \frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2}dr^2 + (r^2+a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + (r^2+a^2)\,\text{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$

↳ $a = 0$ → esféricas

$a \neq 0$ → ellipsoides

Agora podemos ver transformações gerais de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\theta \end{matrix}\right\}$$ pode ñ ser linear

$x^i \to x^{i'}$

↓

mas a versão infinitesimal é linear:

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}dx^j$$

$$\begin{cases} dr = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ d\theta = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\boxed{dx^{i'} = S^i{}_j(x)\,dx^j}$$

$$S^1{}_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad S^1{}_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

...

Métrica:

$$ds^2 = \overbrace{g_{ij}(x)\, dx^i dx^j}^{g_{ij}(x)\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x^j}{\partial x'^n} dx'^m dx'^n} = g'_{mn}(x')\, dx'^m dx'^n$$

$$ds^2 = \underbrace{dx^2 + dy^2}_{\delta_{ij}\, dx^i dx^j} = \underbrace{dr^2 + r^2 d\theta^2}_{g'_{mn}(x')\, dx'^m dx'^n}$$

$$x^i = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad x'^i = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$\to g'_{mn}(x')\, dx'^m dx'^n = g_{ij}(x) \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^j}{\partial x'^n} dx'^m dx'^n$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{g'_{mn}(x') = g_{ij}(x) \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^j}{\partial x'^n}}$$

Como a métrica se transforma

Mesmo ponto nos 2 sistemas de coordenadas

→ Transformações Gerais de Coordenadas

Vetores sob TGC (difeomorfismos)

$$\boxed{\begin{cases} S^i{}_j(x) \equiv \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^j} \\ (S^{-1})^i{}_j(x) = \dfrac{\partial x^i}{\partial x'^j} \end{cases}} \to \begin{cases} W'^i(x') = S^i{}_j(x)\, W^j & \text{contravariante} \\ W'_i(x') = W_j\, (S^{-1})^j{}_i(x) & \text{covariante} \end{cases}$$

$\varphi'(x') = \varphi(x)$ escalar

tensores $\begin{cases} W'^{ij} = S^i{}_m S^j{}_n W^{mn} \\ \vdots \end{cases}$

Como se transforma a contração?

$$\to V'_i(x) W'^i(x') = V_j(x) \underbrace{(S^{-1}(x))^j{}_i\, S^i{}_m(x)}_{\delta^j{}_m} W^m(x) =$$

$$= V_j(x) W^j(x) \quad (\text{um escalar})$$

(*) Área e Volume:

d^3x <u>não é um escalar sob TGC</u> $\quad (dx\,dy\,dz \neq dr\,d\theta\,d\varphi)$

$\hookrightarrow d^3x = d^3x' J \Rightarrow J = \det\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right)$

Precisamos definir uma nova medida de integração que seja invariante sob TGC:

$$\det\left[g'_{mn}(x) = g_{ij}(x) \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^j}{\partial x'^n} \right]$$

$$\underbrace{\det g'_{mn}(x')}_{=\,g'} = \underbrace{\det\,(g_{ij}(x))}_{=\,g} J^2 \Rightarrow \boxed{g' = g\,J^2}$$

E podemos definir como medida de integração

$$\boxed{d^3x\sqrt{g'}} \rightarrow d^3x' J \frac{\sqrt{g'}}{\sqrt{J^2}} = d^3x' \sqrt{g'}$$

Ex: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$

$g = r^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow \sqrt{g} = r^2 \operatorname{sen}\theta$

Agora estamos prontos para ver como o divergente de um vetor se transforma.

<u>$\partial_i V^i$ não é escalar</u> $\longrightarrow$ não é a definição correta de divergência em coordenadas arbitrárias

$\hookrightarrow \partial_i' V'^i = (S^{-1})^j{}_i\, \partial_j (S^i{}_m(x) V^m)$

$$= \underbrace{(S^{-1})^j{}_i S^i{}_m}_{\delta^j{}_m} \partial_j V^m + (S^{-1})^j{}_i (\partial_j S^i{}_m(x)) V^m =$$

$$= \partial_m V^m + \boxed{(S^{-1})^j{}_i (\partial_j S^i{}_m(x)) V^m}$$

$\hookrightarrow$ <u>termo extra!</u>

Vamos, então redefinir a derivada:

$$\underbrace{\partial_i + \text{“Termo de conexão”}}_{\text{derivada covariante}}$$

de forma a manter o divergente invariante sob TGC.

Precisamos descobrir o termo de conexão:

$$\text{Ação} \leftarrow S = \int \underbrace{d^3x \sqrt{g}}_{\text{escalar}} \underbrace{W^i(x) \underbrace{\partial_i \varphi(x)}_{\text{vetor}: \ \partial_i\varphi \to (S^{-1})^j{}_i \partial_j \varphi}}_{\text{escalar}} \quad \text{(o escalar: } \varphi)$$

$\hookrightarrow S$ é escalar sob TGC

Em S temos a derivada de um escalar, queremos a derivada do vetor... Vamos integrar por partes:

$$S = -\int d^3x \, \partial_i(\sqrt{g}\, W^i)\varphi + \underbrace{\int d^3x \, \partial_i(\sqrt{g}\, W^i \varphi_i)}_{\to 0} =$$

$$= -\int \underbrace{d^3x \sqrt{g}}_{\text{escalar}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i(\sqrt{g}\, W^i)}_{\text{o que sobrar tem que ser escalar.}} \underbrace{\varphi}_{\text{escalar}}$$

$$\Downarrow$$

Divergência Covariante:

$$\boxed{D_i W^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g}\, W^i)} =$$

$$= \partial_i W^i + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g}\right)}_{\text{Termo de conexão}} W^i$$

Verifiquemos:

P/ $\sqrt{g} = r^2 \operatorname{sen}\theta$

$$\boxed{D_i W^i = \partial_i W^i + \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i \sqrt{g}\right) W^i = \partial_r W^r + \partial_\theta W^\theta + \partial_\varphi W^\varphi + \frac{2}{r} W^r + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} W^\theta}$$

↳ O que queríamos.

P/ ficar igual ao Jackson ↵
Tem que abaixar os índices.
↳ P/ tal fazemos como
fazíamos c/ a métrica de Minkowsky:
↳ $W^i g^{ij} W_j$ ...

→ Laplaciano Covariante:

$S = \int d^3x \sqrt{g}\; g^{ij} \partial_i \varphi \partial_j \varphi$

$\cancel{\int d^3x}$ ... $\boxed{D^2\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} \partial_j \varphi\right)}$

Exercício: Verificar em coordenadas esféricas

Exercício: Obter Rotacional covariante

Voltemos aos Polinômios de Legendre ($m=0$)

$m \neq 0$ ($m > 0$) (sem perda de generalidade) → Calcular de novo os expoentes característicos ρ_1, ρ_2

$$P = (1-x)^{m/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (1-x)^n$$

↳ Botar na eq. de Laplace c/ $\neq 0$

↳ Relações de recorrência p/ c_n

$$\rightarrow P(x) = (1-x^2)^{m/2} F\left(-\nu+m, \nu+1+m, 1+m, \frac{1-x}{2}\right)$$

regularidade em $x=-1$ → $-\nu + m = 0, -1, -2, \dots$

$\nu = l \quad l \in \mathbb{N} \geq m$

a Função hipergeométrica vira um polinômio:

$$P_{lm}(x) = C_{lm} (1-x^2)^{m/2} F\left(-l+m, l+1+m, 1+m, \frac{1-x}{2}\right)$$

função associada de Legendre

... Unindo c/ a parte dependente de ϕ:

$$\boxed{P(\theta)Q(\phi) = \underbrace{C_{lm} P_{lm}(\cos\theta) e^{im\phi}}_{\equiv Y_l^m(\theta,\phi)}}$$

(harmônico esférico)

↳ Aparecem também em Mecânica Quântica

Agora unimos a parte radial:

$$\boxed{U(r) = A r^{l+1} + B r^{-l}}$$

Obs: Recomenda-se a leitura do Jackson 3.3, 3.6, 3.7 e 3.9

(Está num nível superior ao ser cobrado na prova)