

⚡ Eletromagnetismo - Aula 15 ⚡

→ Magnetostática:

Agora vamos focar nas outras duas equações de Maxwell:

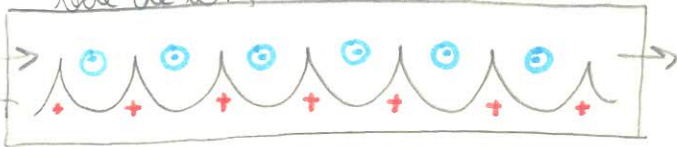
$$\left. \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \right\} \rightarrow \text{Haverá várias semelhanças com a eletrostática: P/ casos C/ mta simétrico. Leg basta P/ outros precisaremos dos dois. (P/ \rho=0 e \vec{E}=0)$$

... Mas antes precisamos entender melhor a corrente

\vec{J} é uma corrente estacionária ←

$\rho=0 \rightarrow$ Cargas \oplus e \ominus existem em mesma quantidade e se cancelam entre si, mas ainda assim se movimentam, gerando corrente.

rede de íons



→ Eq da Continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}) \text{ OK.}$$

→ Cargas \ominus que entram no volume = Cargas \ominus que saem do volume

Como dito temos 2 casos:

- 1) Bastante simétricos: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$ e é suficiente
- 2) Problema mais geral: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

→ 1º Caso: Lei de Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



⇒ Direção do elemento de linha definida pela

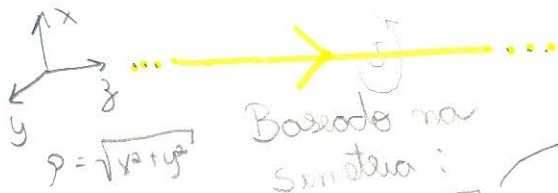
Regra da mão direita:

\hat{n} vetor normal a S
 \vec{x} → direção do 2º dedo
 1º dedo

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{x} = \frac{4\pi}{c} I$$

→ Corrente total em S.

Exemplo: Fio condutor infinito com corrente elétrica
 ↳ coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)



Baseado na simetria:

$$\vec{B} = B(\rho) \hat{\phi}$$

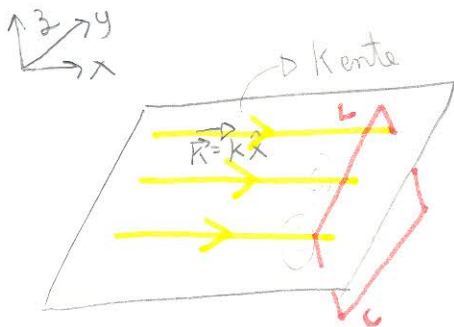
É possível verificar que qualquer campo dessa forma obedece à $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{x} = B(\rho) \int_0^{2\pi} \rho d\phi = 2\pi \rho B(\rho) = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(\rho) = \frac{2}{c} \frac{I}{\rho}$$

↳ O campo eletrostático + simples (Coulombs) vai com $1/r^2$, foi esse com $1/\rho$ devido à geometria. P/ a distribuição infinita + tem corrente com $1/\rho$

Exemplo 2: Plano de correntes



Se pensarmos no plano como um conjunto de fios ficamos com

$$\vec{B} = -B(z) \hat{y}, \text{ e } B(z) = -B(-z)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{x} = LB(z) - LB(-z) = 2LB(z) = \frac{4\pi}{c} K L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(z) = \frac{2\pi}{c} K$$

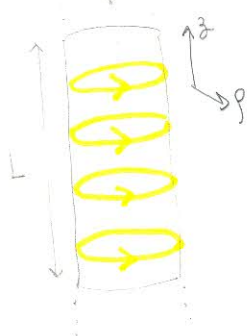
$P/z=0$

↳ Descontinuidade:

Componente paralela de \vec{B} é descontínua enquanto a ortogonal é contínua

↳ Vide Griffiths

Exemplo 3: Solenoide



Pelas simetrias:

$$\vec{B} = B(\rho) \hat{z}$$

Solenoide que a única corrente é na superfície
 ↳ fora da superfície $\vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$

$$\frac{dB}{d\rho} = 0 \Rightarrow B(\rho) = \text{conste}$$

Qual é esse ente

Fora do cilindro: $\rho \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{B} = 0 \Rightarrow B(\rho) = 0$

Dentro do cilindro: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{x} = B L = \frac{4\pi}{c} I N L \Rightarrow \vec{B} = \frac{4\pi}{c} I N \hat{z}$

\rightarrow corrente que passa em cada espira.
 \rightarrow densidade de espiras.

\rightarrow Vejamos agora o que acontece no caso com menor simetria (2º caso) no qual precisaremos também de $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$:

Vamos fazer de forma análoga ao que fizemos p/ o campo elétrico...

Introduziremos o potencial vetor:

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} & \leftarrow B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

E vamos obter um equivalente da eq de Laplace:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \rightarrow B_k = \epsilon_{kmn} \partial_m A_n$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j B_k = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{kmn} \partial_m A_n) =$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} \partial_j \partial_m A_n = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \partial_j \partial_m A_n =$$

$$= \partial_i (\partial_j A_j) - \partial_j \partial_j A_i = \partial_i \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \nabla^2 A_i = \vec{\nabla}$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Queremos eliminar esse termo p/ podermos usar o formalismo que já desenvolvemos p/ a Eq. de Laplace.

Sejam uma transformação de calibre $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$
Escolhamos um Λ t.q. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$
Calibre de Coulomb

Tomemos: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \neq 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \psi(\vec{x})$

Em vez de \vec{A} usamos $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \Lambda = \psi(\vec{x}) + \nabla^2 \Lambda \stackrel{!}{=} 0$$

Λ tem que ser tal que

$$\nabla^2 \Lambda = -\psi(\vec{x})$$

↳ mas isso n' é nada mais que

uma eq. de Laplace que resolvemos antes

↳ e com isso:

$$\nabla^2 \vec{A}' = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

↳ Que contém 3 equações de Laplace

↳ Desacoplamos em coordenadas

$$\nabla^2 A_i = -\frac{4\pi}{c} J_i, \quad i=x,y,z$$

$$A_i(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_V d^3x' \frac{J_i(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

↳ Função de Green

↳ E podemos checar o Calibre de Coulomb:

$$0 \stackrel{?}{=} \vec{\nabla}_x \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_V d^3x' \vec{\nabla}_x \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

$$\partial_i A_i(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)}_{-\vec{\nabla}_x \cdot \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)}$$

$$= -\frac{1}{c} \int_V d^3x' \left(\vec{\nabla}_x \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \left(\vec{\nabla}_x \cdot \vec{J}(\vec{x}') \right) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = 0 \quad \checkmark$$

Substituindo:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \frac{1}{c} \int_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{c} \int_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Lei de Biot-Savart

Exercício: Obter o \vec{B} de um fio condutor (Exemplo 1) usando a lei de Biot-Savart.

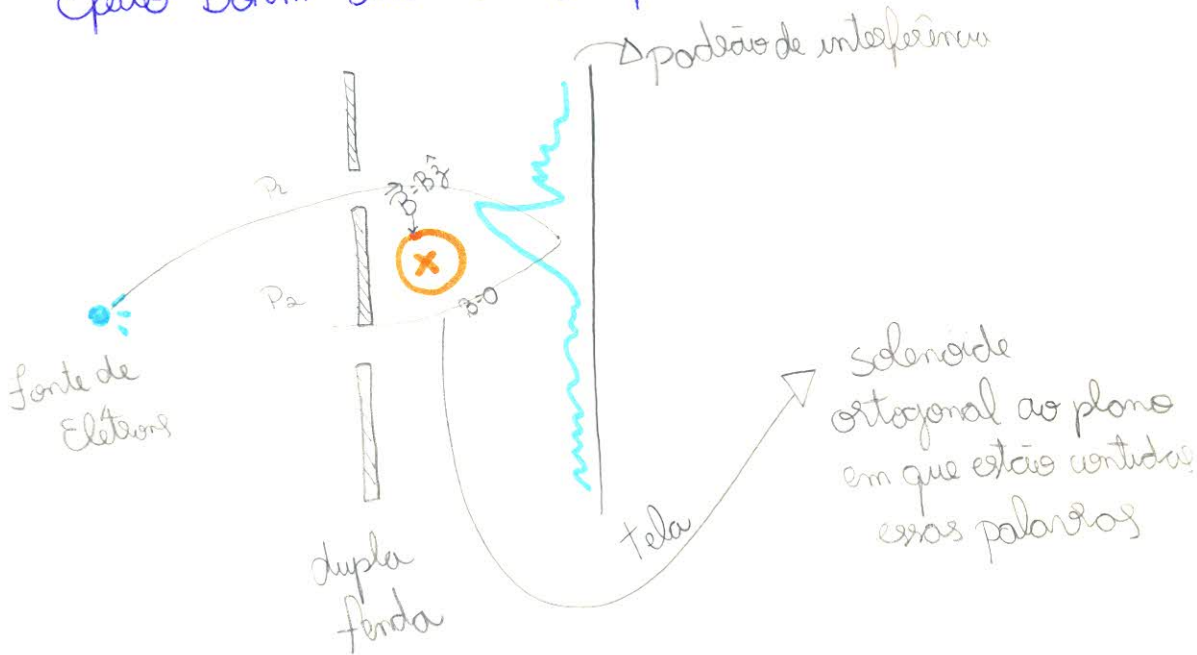
Na discussão que fizemos parece que \vec{A} foi introduzido apenas como um artefato matemático para facilitar a solução.

↳ E em mecânica clássica isso é verdade $\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} \text{ é fundamental} \\ \vec{A} \text{ não é.} \end{array} \right\}$ É possível medir apenas em \vec{B} sem introduzir \vec{A}

↳ Em mecânica quântica não: \vec{A} é fundamental e "eletrônico".

isso fica claro no

efeito Bohm-Aharonov (Experimento: Bombers PRL 1960)



$$\vec{B} = B \hat{z} \Rightarrow \vec{A} = ?$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \Rightarrow A_\phi = \frac{\vec{p}^2}{2\rho} B$$

Do ponto de vista clássico nada deveria acontecer ao ligar o solenoide, pois o elétron não explora a região $\vec{B} \neq 0$

é quanticamente $\rho \mid \vec{B} = 0 \mid \psi = \psi_{P_1} + \psi_{P_2}$

função de onda do elétron

$\rho \mid \vec{B} \neq 0 \mid$

Tem uma fase em ψ dependendo de A :

$$e^{-\frac{i}{\hbar} e \int_{\text{fonte}}^{\text{tela}} \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{A} dt}$$

$$\int_{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{x} - \int_{P_1} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_{P_2 \cup (-P_1)} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi \neq 0$$

Stokes

Embora ao longo de P_1 e P_2 não haja campo magnético há o potencial vetor como um fluxo magnético não nulo.

$$\begin{aligned} \psi &= e^{i\frac{ie}{\hbar c} \int_{P_1} \vec{A} \cdot d\vec{x}} \psi_{P_1} + e^{i\frac{-ie}{\hbar c} \int_{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{x}} \psi_{P_2} = \\ &= e^{-i\frac{ie}{\hbar c} \int_{P_1} \vec{A} \cdot d\vec{x}} \left(\psi_{P_1} + e^{\frac{ie}{\hbar c} (-S_{P_1} + S_{P_2})} \psi_{P_2} \right) = \\ &= e^{i\theta} \left(\psi_{P_1} + e^{\frac{ie}{\hbar c} \Phi} \psi_{P_2} \right) \rightarrow \text{O padrão de interferência muda} \end{aligned}$$

se eu ligo o solenoide devido à presença do potencial - vetor.