Eletromagnetismo - Aula 16

AVISO: P_2 TRANSFERIDA PARA 27/10/17

Na aula anterior obtivemos Biot-Savart:

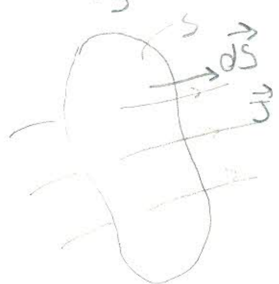
$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int_V d^3x' \, \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times (\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

Podemos reescrevê-la de uma forma mais familiar se lembrarmos que a corrente J está contida num fio. E podemos substituir a integral de volume por uma integral de caminho

$$\vec{J}\,\delta V \longrightarrow \underbrace{(JA)}_{I}\,\delta\vec{x}$$

Área da Seção Transversal do fio

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$



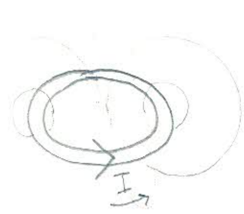
$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{c}\oint_C \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}}$$

E agora vamos tratar uma família de problemas mais complicados:

▷ Dipolos Magnéticos:

(Correntes limitadas em um volume finito)

Exemplo:



Vamos tomar o potencial com $\vec{x}-\vec{x}'$:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{I}{c}\int_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{c}\oint_C \frac{d\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$\cong \frac{I}{c}\oint_C d\vec{x}' \left(\frac{1}{x} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{x^3} + \dots \right)$$

↳ Expansão de Taylor

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Exercício: Verificar} \\ \oint_C \dfrac{d^3x'}{x} = 0\end{array}}$$

Ainda nessa aula vamos provar uma versão + geral disso

$$= \frac{I}{c} \oint d\vec{x}' \left(\frac{1}{x} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{x^3} + \dots \right)$$

⟶ O termo que zera é o que em eletrostática era o termo de monopolo.
Na magnetostática o primeiro termo da expressão é o termo de dipolo.

⟶ Agora precisamos calcular essa integral

Lema: $\vec{g}$ vetor constante.

$$\oint_C d\vec{x}' \vec{g}(\vec{x}\cdot\vec{x}') = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{\nabla}_{x'} \times (\vec{g}(\vec{x}\cdot\vec{x}')) =$$

Stokes

$$\frac{\partial}{\partial x_j'} x_m' = \delta_{jm}$$

$$= \int_S dS_i \, \varepsilon_{ijk} \, \partial_j' (g_k x_m x_m') =$$

$$= \int_S dS_i \, \varepsilon_{ijk} \, g_k x_{\cancel{m}_j} = \int_S g_k \varepsilon_{kij} \, dS_i \, x_j = \vec{g} \cdot \int_S d\vec{S} \times \vec{x}$$

Válido $\forall g \Rightarrow$ removemos $\vec{g}$:

$$\oint_C d\vec{x}' (\vec{x}\cdot\vec{x}') = \int_S d\vec{S} \times \vec{x} = \vec{S} \times \vec{x}$$

$$\underbrace{\vec{S} \equiv \int_S d\vec{S}}_{\text{Vetor Área}}$$

E aplicando isso na integral que queríamos calcular:

$$\frac{I}{c} \oint d\vec{x}' \left(\frac{1}{x} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{x^3} + \dots \right) = 0 + \frac{1}{c} \frac{1}{x^3} I \vec{S} \times \vec{x} = \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{c x^3}$$

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

momento de dipolo magnético

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \left(\frac{3(\vec{m}\cdot\hat{x})\hat{x} - \vec{m}}{x^3} \right)}$$

Com esse exemplo específicos podemos obter o resultado análogo para uma distribuição geral de corrente:

① potencial.

$$A_i(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int_V d^3x' \frac{J_i(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \overset{\text{Taylor}}{=} \frac{1}{c}\int d^3x' \left(\frac{J_i(\vec{x}')}{x} + \frac{J_i(\vec{x}')\,\vec{x}\cdot\vec{x}'}{x^3} + \dots\right)$$

Primeiro termo:

$$\partial'_j(J_j x'_i) = (\partial'_j J_j) x'_i + J(x')_j\, \delta^j_i = J_i(\vec{x}')$$

$$\frac{1}{c}\int_V d^3x' \frac{1}{x}\partial'_j(J_j(\vec{x}')\,x'_i) = 0$$

↳ derivada total

Caso mais geral do que é pedido no exercício da Pg. 1

Segundo Termo:

$$\partial_j(J_j x'_i x'_k) = J_j \delta_i^j x_k + J_j x_i \delta_k^j = J_i x_k + J_k x_i$$

$$\int_V d^3x' J_i x_j x'_j = \int_V d^3x' \frac{x_j}{2}(J_i x'_j - J_j x'_i) =$$

$$\frac{1}{2}\int_V d^3x' (J_i\, \vec{x}\cdot\vec{x}' - x'_i\, \vec{J}\cdot\vec{x})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\hookrightarrow \int_V d^3x' \vec{J}\, \vec{x}\cdot\vec{x}' = \frac{1}{2}\vec{x}\times\int d^3x' \vec{J}\times\vec{x}'$$

E o potencial de dipolo p/ uma distribuição geral fica

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\frac{\vec{m}\times\vec{x}}{x^3}}$$

onde

$$\boxed{\vec{m} \equiv \frac{1}{2}\int_V d^3\vec{x}'\, \vec{x}'\times\vec{J}(\vec{x}')}$$

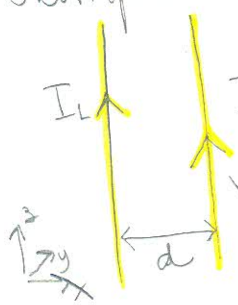
Momento de Dipolo Magnético

Essa é a generalização da definição que vimos anteriormente p/ a espira.

→ Forças Magnéticas ($\vec{v} = d\vec{x}/dt$ não relativístico)

$$\boxed{\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B}} \quad (1)$$

Exemplo:



$I_1 \to \frac{2I_1}{cd}\hat{y}$ → Campo magnético devido à I_1 experimentado por I_2

→ $\vec{J}_2 = J_2\hat{z}$

→ $J_2 = I_2/A$

$$\vec{F} = q\vec{v}\left(\frac{2I_1}{cd}\hat{y}\right)$$

Força por unidade de comprimento:

$$\vec{f} = nA\vec{F} = \frac{2}{c}\frac{I_1 I_2}{d}\hat{z}\times\hat{y} \to -\hat{x}$$

de cargas na unidade de comprimento

$$\boxed{\vec{f} = -\frac{2}{c}\frac{I_1 I_2}{d}\hat{x}}$$

$I_1 I_2 > 0$ → atrativa

$I_1 I_2 < 0$ → repulsiva

Vamos tratar agora do caso mais geral, em que temos duas densidades de corrente quaisquer $\vec{J}_1$ e $\vec{J}_2$:

$\vec{B}$ devido à $\vec{J}_1$:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x'\,\frac{\vec{J}_1(\vec{x}')\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

$$\boxed{\vec{F} = \int d^3x\,\vec{J}_2(\vec{x})\times\vec{B}(\vec{x})}$$

$\vec{J}_1, \vec{J}_2$ ao longo de fios:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{c}I_1 I_2\oint_{C_1}\oint_{C_2} d\vec{x}_2 \times\left(\frac{d\vec{x}_1\times(\vec{x}_2-\vec{x}_1)}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|^3}\right)}$$

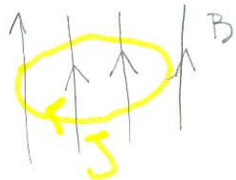
→ Mas essa integral é difícil...

Se $\vec{J}_1$ e $\vec{J}_2$ estiverem bem separados podemos aproximá-los usando expansão em multipolo

Mas antes vamos tratar uma versão simplificada:

$\vec{B}$ de fundo

$\vec{J}$ imerso em $\vec{B}$



Qual é a força experimentada por $\vec{J}$?

Teremos 2 efeitos:

1) Deslocamento do centro de massa da espira

2) Torque

$$\vec{F} = \int_V d^3x\, \vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

se $\vec{B}$ varia pouco perto de $\vec{x} = \vec{R}$ → centro de massa da espira

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{x}) \cong B(\vec{R}) + (\vec{x}\cdot\vec{\nabla}')\, B(\vec{R}') + \dots$$

$$\vec{F} = \underbrace{-B(\vec{R}) \times \int_V d^3x\, \vec{J}(\vec{x})}_{\substack{\text{Como visto antes} \\ =0 \text{ (corrente em contorno fechado)}}} + \int_V d^3x\, \vec{J}(\vec{x}) \times \left((\vec{x}\cdot\vec{\nabla}')\, \vec{B}(\vec{R}')\right) + \dots =$$

Explicitando a forma da atuação de nabla

$$= \int_V d^3x\, \underbrace{\vec{J}(\vec{x}) \times \left(\vec{x}\cdot\vec{\nabla}'\, \vec{B}(\vec{x}')\Big|_{x'=\vec{R}}\right)}$$

$$\vec{J}(\vec{x}) \times (\vec{x}\cdot\vec{\nabla}'\, \vec{B}(\vec{x}')) = -\vec{\nabla}' \times \left(\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}')\, \vec{J}(\vec{x})\right)$$

Vamos provar isso:

$$\varepsilon_{ijk} J_j(\vec{x})\, x_l\, \partial'_l B_k(\vec{x}') = \varepsilon_{ijk} J_j(\vec{x})\, x_l\, \partial'_k B_l(\vec{x}') \; ?$$

$$\varepsilon_{ijk} J_j(\vec{x})\, x_l \underbrace{\left(\partial'_l B_k(\vec{x}') - \partial'_k B_l(\vec{x}')\right)}_{\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0} \qquad \text{OK.}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}' \times \int_V d^3x\, (\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}'))\, \vec{J}(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}'=\vec{R}}$$

Usando a identidade citada:

$$\vec{F} \int_V d^3x\, (\vec{B}\cdot\vec{x})\,\vec{J} = \tfrac{1}{2}\vec{B}\times\int_V d^3x\, \vec{J}\times\vec{x} = -\vec{B}\times\vec{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{m})$$

$(\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0)$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\vec{m})}$$

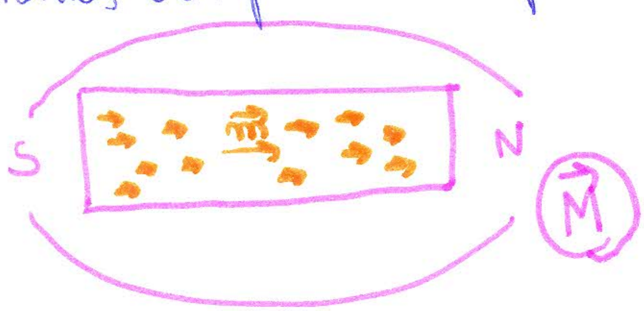
$$\boxed{U = -\vec{B}\cdot\vec{m}}$$

↳ "Energia Potencial" da força magnética

→ Algumas palavras sobre o momento magnético $\vec{m}$:

O arquétipo do ~~el~~ magnetismo ñ é caracterizado por correntes, mas sim por imãs (materiais magnéticos)

Cujo campo nada mais é do que a sobreposição de vários momentos de dipolo microscópicos.



E esses momentos magnéticos são gerados pelos spins dos elétrons

↳ momento angular intrínseco.

$S = \frac{1}{2}\hbar$

$$\boxed{\vec{m} = g\frac{e}{2m}\vec{S}}$$

↳ Fator $g = 2{,}002319304299\ldots$

Previsão Teórica ◁ bate mto bem c/ resultado experimental.

(Número físico + bem conhecido)

Fim da Magnetostática