Aula de 22/09

Até agora → Eletrostática com cargas em posições fixas
- → puntiformes
- → distribuições contínuas

→ Sem condições de contorno interessantes (Apenas $V(\vec{r}) \to 0$ para $\vec{r} \to \infty$)

Agora estudaremos casos com outras condições de contorno

→ Condutores (= metais)

- Podem ser neutros ou carregados, mas a carga sempre se distribui de modo a "zerar" o campo elétrico no interior do condutor. Os casos que serão estudados terão apenas a fase com as cargas já bem distribuídas analisada.

$\vec{E} = 0 \xrightarrow[\text{NOTAÇÃO}]{\text{TROCA DE}} \phi = \text{constante}$

$V \to \phi$

$\Delta\phi \to V$ ou seja, V agora será usado apenas para a diferença de potencial

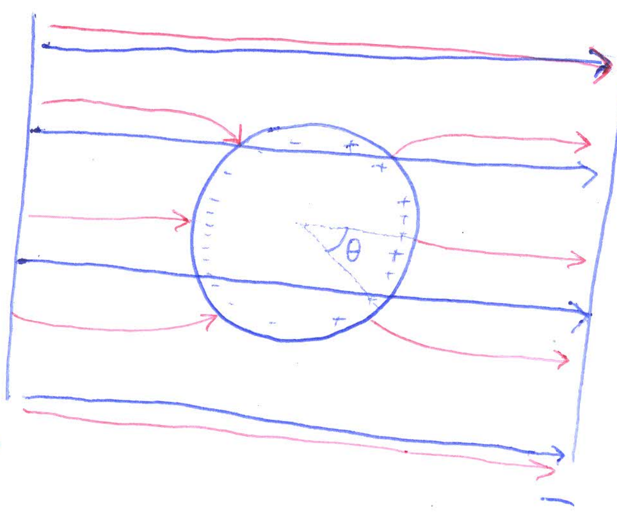
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \to \rho = 0$ (sem cargas no interior)

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ é perpendicular à superfície do condutor, no lado externo $\to \vec{E} = 4\pi\sigma\hat{n}$

- Agora há condições de contorno nas superfícies dos condutores.
- A Função de Green precisa ser complementada.

Exemplos de casos a serem estudados:

① Esfera Condutora



planos extensos (sem efeito de borda)

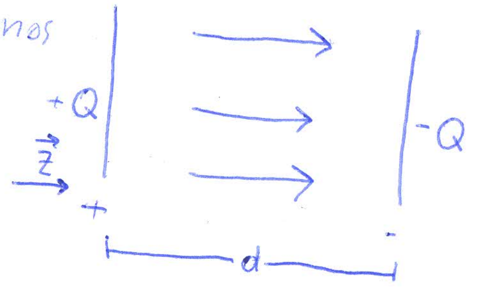
↗ linhas do campo antes da inserção da esfera

↗ linhas do campo depois da inserção da esfera (ortogonais à superfície da esfera)

σ em função de θ

② Gaiola de Faraday

③ Capacitores planos



$\vec{E}_{interno} = 4\pi\sigma\hat{z}$

$\sigma = \frac{Q}{A}$

$C \equiv \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\Delta\phi}$

$\vec{E} = -\frac{d\phi}{dz} = \text{constante} \to \phi = -Ez + \text{constante}$

$V = \phi(0) - \phi(d) = Ed = \frac{4\pi Q d}{A} \to C = \frac{QA}{4\pi Q d} = \frac{A}{4\pi d}$

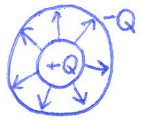
Energia armazenada

$U = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\, \vec{E}^2 = \frac{A}{8\pi}\int_0^d dz\, (4\pi\sigma)^2 = Ad2\pi\sigma^2 = \frac{Q^2}{2C}$

$Q = \sigma A$

$C = A/4\pi d$

④ Capacitores Esféricos



$$C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Existem casos em que podemos manter V constante ao invés de q constante na superfície de um condutor.
↳ deixando em contato com alguma espécie de "reservatório de V", fazendo analogia com o banho térmico.
Exemplo: Aterrar o condutor 

Assim, para cada corpo condutor em um problema, podemos estabelecer um valor de Q ou um valor de V.
Especificar ambos os valores pode levar a um problema superdeterminado que poderá não ter solução.

C_i → $Q_i \rightarrow \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n}$ (Condição de Contorno de Neumann)
ou
↳ V_i = potencial em S_i (Condição de Contorno de Dirichlet)

$\nabla^2\phi = 0$ com condições de contorno nas superfícies $S_i = \partial C_i$

→ Teorema de Unicidade: Neumann e Dirichlet aplicados garantem solução única. Ou seja, aplicando uma dessas condições para cada condutor, temos apenas uma solução para $\nabla^2\phi = 0$.

Demonstração: Supondo ϕ_1 e ϕ_2 soluções com mesmas condições de contorno, definimos $f = \phi_1 - \phi_2$

nas aulas anteriores, era igual a zero porque a única borda analisada era o infinito

$$\int_V d^3r\, \vec{\nabla}\cdot(f\vec{\nabla}f) = \int_V d^3r\,(\vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}f + \cancel{f\vec{\nabla}^2 f}) \rightarrow \nabla^2 f = \nabla^2(\phi_1 - \phi_2) = \nabla^2\phi_1 - \nabla^2\phi_2 = 0 - 0 = 0$$

$$\partial V = \bigcup_i S_i \cup S_\infty$$

$$\int_V d^3r\, \vec{\nabla}\cdot(f\vec{\nabla}f) = \underbrace{\sum_i \int_{S_i} f\vec{\nabla}f\, d\vec{s}}_{=0} = \underbrace{\int_V d^3r\, |\vec{\nabla}f|^2}_{\text{Só é zero se } |\vec{\nabla}f| = 0}$$

$= 0$ pelas condições de contorno:
- Dirichlet: $\phi_1 - \phi_2 = 0$
ou
- Neumann: $\nabla(\phi_1 - \phi_2) = 0$
↳ pode gerar ϕ_1 e ϕ_2 que diferem por uma constante, mas isso não representa soluções físicas diferentes

Só é zero se $|\vec{\nabla}f| = 0$ → $\vec{\nabla}(\phi_1 - \phi_2) = 0$

Portanto, os critérios usados para resolver um problema retornam uma única solução.

→ Determinando como fica $G(r, r')$ no caso com condutores

Teorema de Green (Corolário da Lei de Gauss)

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d^3x = \oint_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{s} \rightarrow \hat{n}\,ds$$

Adotando $\vec{A} = \varphi\vec{\nabla}\psi$ → campos escalares arbitrários

$$\nabla(\varphi\vec{\nabla}\psi) = \varphi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\psi$$

$\varphi\vec{\nabla}\psi\cdot\hat{n} = \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}$ (notar ausência do "sinal de vetor" em ds)

$$\text{I} \quad \int_V (\varphi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\psi)\, d^3x = \oint \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) ds$$

$$\text{II} \quad \int_V (\psi\nabla^2\varphi + \vec{\nabla}\psi\vec{\nabla}\varphi)\, d^3x = \oint \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) ds \quad (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

$$\text{I} - \text{II} \quad \int_V (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\, d^3x = \oint \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) ds \quad \text{TEOREMA DE GREEN}$$

Definindo $\varphi \equiv \phi$ e $\psi = \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho \qquad \nabla^2\psi = -4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Temos $\displaystyle\int_V \left(-4\pi\phi(\vec{r}\,')\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,') + \frac{4\pi}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\rho(\vec{r}\,')\right)d^3x' = \int_S \left(\phi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial\phi}{\partial n'}\right)ds'$

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')d^3x'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi}\oint_S\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\right)ds'}$$

Condições

① $S \to S_\infty$: $\frac{1}{4\pi}\oint_S (\ldots)\,ds' \to 0$

② $\frac{1}{4\pi}\oint_S (\ldots)\,ds'$ contém $\underset{\text{Dirichlet}}{\phi|_S}$ e $\underset{\text{Neumann}}{\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_S}$

Queremos escrever $G(r,r') = \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + f(\vec{r},\vec{r}\,')$, com $\nabla^2 f(\vec{r},\vec{r}\,') = 0$ em V

Agora G tem um termo com r e r' para cancelar as condições de Dirichlet ou Neumann na superfície

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}\,')G(\vec{r},\vec{r}\,')d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S\Big(\underbrace{G(r,r')\frac{\partial}{\partial n'}\phi(\vec{r}\,')}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\phi(\vec{r}\,')\frac{\partial}{\partial n'}G(r,r')}_{\mathrm{II}}\Big)ds'$$

Se usar condições de Dirichlet em S (sem I)

$G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = 0 \ \forall \vec{r}\,' \in S$

Escolher f tal que $G_D = 0 \ \forall \vec{r}\,' \in S$

Se usar condições de Neumann em S

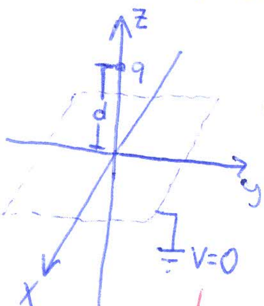
Tentação: $\frac{\partial}{\partial n'}G_N(\vec{r},\vec{r}\,') = 0 \ \forall \vec{r} \in S$ (não está correto, pois $\nabla^2_r G(\vec{r},\vec{r}\,') = \int -4\pi\delta^{(3)}(r-r')\,da$

Usar $\displaystyle\oint_S \frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{r},\vec{r}\,')da' = -\frac{4\pi}{\text{Área}} \ \forall \vec{r}\,' \in S$

→ valor médio do campo na superfície

$$\phi(\vec{r}) = \underbrace{\langle\phi\rangle_S}_{\frac{1}{S}\int_S \phi\, da'} + \int_V \rho G_N d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial\phi}{\partial n'}G_N\, ds$$

→ Método das Cargas Imagens



Caso de Dirichlet

Qual é o potencial imediatamente acima do plano? Não pode ser simplesmente $\frac{q}{r}$, pois induziria carga na vizinhança do condutor. Ou seja, tanto a carga q quanto o plano influenciam o potencial.

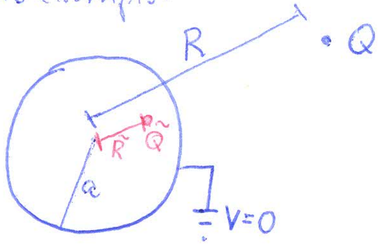
Para resolver o problema, admitimos que existe uma carga $-q$ em $(0,0,-d)$ e que não há um plano condutor.

Assim, temos $V = \dfrac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \dfrac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}$

Segue que $V(x,y,0) = 0$ e $V \to 0$ para $x^2+y^2+z^2 \gg d^2$, como se esperava para o caso original. Também é importante que continua havendo apenas uma carga em $z \geq 0$ (a região $z<0$ mudou completamente, mas não é de interesse do problema)

Pelo Teorema da Unicidade, $V = \dfrac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \dfrac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}$ é a solução do problema original (ou seja, em $z \geq 0$)

Outro exemplo:



caso de Dirichlet

$\tilde R$ é escolhido de modo que $\frac{\tilde R}{a} = \frac{a}{R}$ (inversão)

A escolha de $\tilde R$ funciona porque a Ação de Maxwell tem simetria conforme (inversão é uma transformação conforme)

$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

preserva ângulos

Exemplo: simetria de escala

$x^\mu \to \lambda x^\mu$

$d^4x \to \lambda^4 d^4x$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \to \lambda^{-2} F_{\mu\nu}$

$\partial_\mu \to \lambda^{-1}\partial_\mu$

$A_\nu \to A_\nu + \partial_\nu \Lambda$ → não muda

$\partial_\nu \Lambda \to \lambda^{-1}$

→ tem que mudar em λ^{-1} por conformidade com a parcela seguinte

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \to -\frac{1}{4}\int \cancel{\lambda^4} d^4x\, \cancel{\lambda^{-2}} F_{\mu\nu} \cancel{\lambda^{-2}} F^{\mu\nu}$$

obs.: $\int d^Dx\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \to \int \lambda^D d^Dx\, \lambda^{-2}F_{\mu\nu}\lambda^{-2}F^{\mu\nu}$

Ou seja, a invariância de S só se dá em D=4.