26/09/2017

Indicação do Professor: Ler 2.6 do Jackson (carga fora da esfera condutora resolvida usando funções de Green)

→ Separação de variáveis

- Coordenadas Cartesianas

Equação de Laplace: $\nabla^2\phi = 0$

1) Assumir que seja possível fazer a separação $\phi(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$

$$\nabla^2\phi = 0$$
$$YZ\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$
$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

Como a primeira parcela depende apenas de x, a segunda, apenas de y e a terceira, apenas de z, podemos dizer que as três parcelas são constantes.

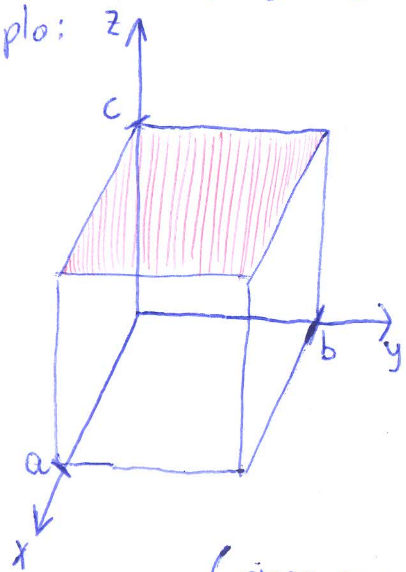
$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\alpha^2 \\ \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\beta^2 \\ \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \gamma^2 \end{array}\right\} \quad \alpha^2+\beta^2=\gamma^2$$

escolha arbitrária de sinais

Assim, temos X se comportando como $e^{\pm i\alpha x}$, Y, como $e^{\pm i\beta y}$ e Z, como $e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z}$

E obtemos $\phi(x,y,z) = e^{\pm i\alpha x \pm i\beta y \pm \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z}$

Exemplo:



Na face hachurada: $\phi = \phi(x,y)$

Nas outras faces: $\phi = 0$

$$\begin{cases} \phi(0,y,z) = 0 \rightarrow X = \operatorname{sen}(\alpha x) \\ \phi(x,0,z) = 0 \rightarrow Y = \operatorname{sen}(\beta y) \\ \phi(x,y,0) = 0 \rightarrow Z = \operatorname{senh}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(a,y,z) = 0 \rightarrow \operatorname{sen}(\alpha a) = 0 \rightarrow \alpha a = n\pi \rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \\ \phi(x,a,z) = 0 \rightarrow \operatorname{sen}(\beta b) = 0 \rightarrow \beta b = m\pi \rightarrow \beta_m = \frac{m\pi}{b} \end{cases}$$

Como $\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, temos $\gamma_{nm} = \sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}$

Portanto: $\phi_{nm} = \operatorname{sen}(\alpha_n x)\operatorname{sen}(\beta_m y)\operatorname{senh}(\gamma_{nm} z)$

Fixando, agora, a face superior

superposição $\phi(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\,\phi_{nm}(x,y,z)$

$$\phi(x,y,c) = V(x,y) = \sum_{n,m}\operatorname{sen}(\alpha_n x)\operatorname{sen}(\beta_m y)\operatorname{senh}(\gamma_{nm} c)A_{nm}$$

série de Fourier

Podemos achar A_{nm} através do Truque de Fourier, encontrando

$$A_{nm} = \frac{4}{ab\,\text{senh}(\gamma_{nm} c)} \int_0^a \int_0^b V(x,y)\,\text{sen}(\alpha_n x)\,\text{sen}(\beta_m y)\,dy\,dx$$

Leitura: caso específico, similar ao exemplo na seção 2.10 do Jackson

---

- Coordenadas Esféricas

$$\phi(r,\theta,\varphi) \to \nabla^2\phi = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right) = 0$$

Laplace

Separação de variáveis: $\phi(r,\theta,\varphi) = \dfrac{U(r)}{r}\,P(\theta)\,Q(\varphi)$

↳ inserido para simplificar o primeiro termo do Laplaciano

Substituindo ϕ no Laplaciano, temos

$$r^2\,\text{sen}^2\theta\left(\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{Pr^2\,\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right) + \frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = 0$$

Pelo mesmo argumento usado na parte das coordenadas cartesianas, temos que $\frac{1}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2}$ é constante

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = \alpha^2 \to Q = e^{\pm\alpha\varphi}$$

Mas Q é uma função de φ, e por isso deve ser periódica

$$Q(\varphi+2\pi) = Q(\varphi) \to \alpha = im,\ m \in \mathbb{Z} \to Q(\varphi) = e^{im\varphi}$$

Assim, ficamos com

$$r^2\,\text{sen}^2\theta\left(\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{Pr^2\,\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right) + (-m^2) = 0$$

dividindo por $\text{sen}^2\theta$

$$\underbrace{\frac{r^2}{U}\frac{d^2U}{dr^2}}_{\text{depende apenas de } r} + \underbrace{\frac{1}{P\,\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\text{sen}^2\theta}}_{\text{depende apenas de } \theta} = 0$$

Como a soma das duas partes é zero, podemos igualar uma a λ e a outra a $-\lambda$ e obter

alternadamente!

Lembrando que λ é constante pelo mesmo argumento usado para as coordenadas cartesianas

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\text{sen}\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\dfrac{dP}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{\text{sen}^2\theta}\right)P = 0 \to \dfrac{d^2P}{d\theta^2} + \text{cotg}\theta\dfrac{dP}{d\theta} + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{\text{sen}^2\theta}\right)P = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2U}{dr^2} - \dfrac{\lambda}{r^2}U = 0 \end{cases}$$

Fazendo a mudança de variável $x = \cos\theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx}\right)P + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{d\theta}\frac{dP}{dx} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P = 0$$

$$\cancel{\text{sen}\theta}\quad (1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - 2x\frac{dP}{dx} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P = 0$$

Equação de Legendre

Digressão (Aqui, o professor se propôs a explicar um algoritmo sem explicar porque funciona.)

Adotando $m=0$ na Equação de Legendre, temos

$$P''(1-x^2)-2xP'+\lambda P=0 \to P''-\frac{2xP'}{1-x^2}+\frac{\lambda P}{1-x^2}=0 \to P''+p(x)P'+q(x)P=0$$

Agora precisamos analisar o que ocorre com $p(x)$ e $q(x)$ em $x=1$ e $x=-1$. Os pontos de uma função podem ser classificados como regulares (a função tem valor definido naquele ponto) e singulares (a função diverge). Porém, para uma função $f(x)$, caso exista um ponto singular x_0, podemos classificá-lo como ponto singular regular se existe um valor f_0 tal que $f_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^n f(x)$, sendo n a ordem desse pólo.

Sendo $p_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)$

$q_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 q(x)$

Temos a equação indicial $\rho^2+(p_0-1)\rho+q_0=0$ e definimos ρ_1 e ρ_2 como suas raízes.

As soluções para a equação diferencial são, então $P_i=(x-x_0)^{\rho_i}\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(i)}(x-x_0)^n$, $i=1,2$

Se $\rho_1-\rho_2=$ inteiro, podemos expressar P_1 e P_2 como

$$P_1=(x-x_0)^{\rho_1}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

$$P_2=aP_1\log(x-x_0)+(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n$$

Aplicando, na Equação de Legendre, o algoritmo

$$p(x)=\frac{-2x}{1-x^2} \qquad q(x)=\frac{\lambda}{1-x^2}$$

$$p_0=\lim_{x\to1}(x-1)p(x)=\lim_{x\to1}(x-1)\frac{-2}{(1-x)(x+1)}=1$$

$$q_0=\lim_{x\to1}(x-1)^2q(x)=\lim_{x\to1}(x-1)^2\frac{\lambda}{(1-x)(1+x)}=0$$

$$\rho^2+(1-1)\rho+0=0 \to \rho^2=0 \to \rho_1=\rho_2=0$$

$$P=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n$$

a solução com logaritmo não é aceita por não permitir periodicidade (lembrar que originalmente tínhamos uma função $P(\theta)$)

Usando agora $x-1=\xi$, temos

$$\begin{cases}\xi(\xi+2)\dfrac{d^2P}{d\xi^2}+2(\xi+1)\dfrac{dP}{d\xi}-\lambda P=0\\ P=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n\xi^n\end{cases} \to 0=\sum_n c_n\left((\xi^2+2\xi)n(n-1)\xi^{n-2}+2(\xi+1)n\xi^{n-1}-\lambda\xi^n\right)$$

$$0=\sum_n c_n\left(\xi^n(n(n+1)-\lambda)+2n^2\xi^{n-1}\right)$$

$$0=\underbrace{\sum_n\left(c_n(n(n+1))-\lambda)+2(n+1)^2c_{n+1}\right)\xi^n}_{\text{É uma base, e, portanto, para ser zero, todos os coeficientes devem ser zero}}$$

$$c_{n+1}=\frac{\lambda-n(n+1)}{2(n+1)^2}c_n \overset{\lambda=\nu(\nu+1)}{=} -\frac{(n-\nu)(n+\nu+1)}{2(n+1)^2}c_n$$

Como a equação de Legendre é homogênea, a solução não é afetada por uma constante multiplicativa.

Portanto, podemos definir $c_0 = 1$.

Assim, chegamos a

$$c_n = (-1)^n \left(\frac{-\nu(\nu+1)}{2\cdot 1^2}\right)\left(\frac{(-\nu+1)(\nu+2)}{2\cdot 2^2}\right)\cdots\left(\frac{(-\nu+n-1)(\nu+n)}{2\cdot n^2}\right)\cdot \underbrace{c_0}^{1} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n (-\nu)_n (\nu+1)_n}{(1)_n}\,\frac{1}{n!}$$

Na última passagem, definimos $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$

E $P(x)$ se reduz a

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_n(\nu+1)_n}{(1)_n}\,\frac{1}{n!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^n$$, que é uma Função Hipergeométrica $\left(F(a,b,c;\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\,\frac{\xi^n}{n!}\right)$

Portanto, $P(x) = F(-\nu, \nu+1, 1; \frac{1-x}{2})$

Por construção, temos que $F(a,b,c;\xi=0) = 1$

Então, para $x=1$, temos $P(1) = F(-\nu,\nu+1,1;0) = 1$ portanto, temos solução regular

Para o ponto $x=-1$, $P(x)$ diverge

O problema do comportamento de $P(x)$ para $x=-1$ tem que ser resolvido, pois a função tem que ser regular em todo o intervalo $[-1;1]$.

Para isso, devemos impor $\nu = \ell$, ℓ inteiro, pois

$$(-\ell)_\ell = -\ell(-\ell+1)\dots(-1) = (-1)^\ell \ell!$$

$$(-\ell)_{\ell+k} = -\ell(-\ell+1)\dots(-1)(0)(1)\dots(k-1) = 0$$

Assim, a partir de uma parcela determinada, todas as parcelas serão zero, e assim evitamos que ocorra uma soma infinita. Chegamos, então, a

$$P(x) = F(-\ell, \ell+1, 1; \tfrac{1-x}{2}) \equiv P_\ell(x) \quad \ell = 0,1,2\dots$$

Polinômio de Legendre

Na próxima aula, o professor comentará sobre o caso $m \neq 0$, em que temos como resultado

$$P(x) = (1-x)^{\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (1-x)^n$$

(pode ser lido no Jackson, cap.3)