Aula de 29/09

→ Transformações de Coordenadas

Em duas dimensões

coordenadas cartesianas → coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = dr\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta \\ dy = dr\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2\cos^2\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, r\,dr\,d\theta + r^2\mathrm{sen}^2\theta\, d\theta^2 + dr^2\mathrm{sen}^2\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, r\,dr\,d\theta + r^2\cos^2\theta\, d\theta^2$$
$$= dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Em três dimensões

coordenadas cartesianas → coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2$$

Assim, vemos que podemos representar ds^2 como

$$ds^2 = g_{ij}(x)\,dx^i dx^j$$

↳ métrica, ferramenta usada para medir distâncias

Em um espaço plano tridimensional, g_{ij} toma a forma:

- Coordenadas cartesianas → $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Coordenadas esféricas → $g_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\mathrm{sen}^2\theta \end{pmatrix} & \begin{array}{c} r \\ \theta \\ \phi \end{array} \\ \begin{array}{ccc} r & \theta & \phi \end{array} & \end{array}$

- Corolário: Escrever a métrica de uma esfera S^2 em R^3 com raio a

$$ds^2 = \cancel{dr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2$$
$$= a^2 d\theta^2 + a^2\mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2$$

Exemplo facultativo: Buracos Negros de Kerr (podem ser descritos apenas pelo momento angular)

Usa-se as coordenadas de Boyer-Lindquist, úteis para os Buracos Negros de Kerr porque estes apresentam simetria axial.

$$\begin{cases} x = f(r)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ y = f(r)\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = f'(r)\,dr\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + f(r)\cos\theta\, d\theta\cos\phi - f(r)\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\phi \\ dy = f'(r)\,dr\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + f(r)\cos\theta\, d\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + f(r)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\, d\phi \\ dz = dr\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta \end{cases}$$

escolhemos f de modo que a parcela vá a zero

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (f'^2\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\,dr^2 + (f^2\cos^2\theta + r^2\mathrm{sen}^2\theta)\,d\theta^2 + (f^2\mathrm{sen}^2\theta)\,d\phi^2 + \underline{2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,(f'f - r)\,dr\,d\theta}$$

Com a escolha de f, chegamos a

$$ds^2 = \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 + a^2}\,dr^2 + (r^2 + a^2\cos^2\theta)\,d\theta^2 + (r^2 + a^2)\,\mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2$$

$a = 0$ → esferas

$a \neq 0$ → elipsóides

$r = 0$ → disco de raio a

→ Transformações Gerais de Coordenadas

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\theta \end{cases}$ é não linear em θ, mas a versão infinitesimal é linear

$dr = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $d\theta = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$

$dx'^i = \underbrace{\boxed{\dfrac{\partial x'^i}{\partial x^j}}}_{S^i{}_j(x)} dx^j$ invertível $\left(dx^j = \dfrac{\partial x^j}{\partial x'^i} dx'^i \right)$

· Transformação da Métrica

$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j = g'_{mn}(x')dx'^m dx'^n \to \underbrace{g'_{mn}(x') = g_{ij}(x)}_{\text{mesmo ponto P nos dois sistemas de coordenadas}} \dfrac{dx^i}{dx'^m} \dfrac{dx^j}{dx'^n} dx'^m dx'^n$

- Vetores e Tensores

$\begin{cases} S^i{}_j(x) = \dfrac{dx'^i}{dx^j} \\ (S^{-1})^i{}_j(x) = \dfrac{dx^i}{dx'^j} \end{cases}$

A transformação de vetores se dá por

$\begin{cases} W'^i(x') = S^i{}_j(x) W^j & \text{vetor contravariante} \\ W'_i(x') = W_j (S^{-1})^j{}_i & \text{vetor covariante} \end{cases}$

$\begin{cases} W'^{ij} = S^i{}_m S^j{}_n W^{mn} & \text{tensores} \\ \vdots \end{cases}$

Um resultado interessante é o produto

$V'_i(x') W'^i(x') = V_j(x) \underbrace{(S^{-1}(x))^j{}_i S^i{}_m(x)}_{\delta^j{}_m} W^m(x) = V_j(x) W^j(x)$

que, como mostrado, é um escalar sob Transformações Gerais de Coordenadas

· Área e Volume

d^3x não é escalar, pois, pegando o exemplo cartesianas → esféricas, sabemos que $dx\,dy\,dz \neq dr\,d\theta\,d\phi$

Como sabemos, existe um termo de correção, o jacobiano, tal que

$d^3x = d^3x' J$, $J = \det\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right)$

Precisamos, portanto, introduzir uma nova medida que seja invariante sob Transformações Gerais de Coordenadas

Tirando o determinante da métrica, temos

$\underbrace{\det[g'_{mn}(x')]}_{g'} = \det\left[g_{ij}(x) \dfrac{\partial x^i}{\partial x'^m} \dfrac{\partial x^j}{\partial x'^n}\right] = \underbrace{\det[g_{ij}(x)]}_{g} J^2$

E então temos que $d^3x\sqrt{g}$ é um escalar sob TGC, pois

$d^3x\sqrt{g} \to d^3x' J\sqrt{g} = d^3x' J \dfrac{\sqrt{g'}}{J} = d^3x'\sqrt{g'}$

Exemplo: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta\, d\phi^2$

$g' = r^4 \text{sen}^2\theta \to \sqrt{g'} = r^2 \text{sen}\theta$

– Divergência de vetores

$\partial_i V^i$ não é escalar, pois

$$\partial_i' V'^i = (S^{-1})^j{}_i \partial_j (S^i{}_m V^m) = \underbrace{(S^{-1})^j{}_i S^i{}_m}_{\delta^j{}_m} \partial_j V^m + (S^{-1})^j{}_i (\partial_j S^i{}_m) V^m = \partial_m V^m + (S^{-1})^j{}_i (\partial_j S^i{}_m(x)) V^m$$

Devemos definir um escalar ∂_i + conexão (derivada covariante)

Podemos definir a conexão a partir de um truque. Definimos S

$$S = \underbrace{\int d^3x \sqrt{g}}_{\text{escalar}} \underbrace{W^i(x) \overbrace{\partial_i \phi}^{\phi \to \text{escalar}}}_{\text{escalar } (W^i V_i \text{ é um escalar, } W \text{ e } V \text{ quaisquer})}$$

$\partial_i \phi \to$ vetor, pois ϕ é escalar $\left(\partial_i \phi \to (S^{-1})^j{}_i \partial_j \phi = \frac{dx^j}{dx'^i} \frac{d}{dx^j} \phi = \partial_i \phi\right)$

→ S é escalar sob TGC

$$S = -\int d^3x\, \partial_i(\sqrt{g} W^i)\phi + \underbrace{\int d^3x\, \partial_i(\sqrt{g} W^i \phi_i)}_{\text{termo de superfície} = 0} = -\int \underbrace{d^3x \sqrt{g}}_{\text{escalar}} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i(\sqrt{g} W^i) \underbrace{\phi}_{\text{escalar}}$$

$\to \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i(\sqrt{g} W^i)$ ~~precisa ser escalar~~ é escalar

Assim, definimos a divergência covariante como $D_i W^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i(\sqrt{g} W^i) = \partial_i W^i + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g}\right)}_{\text{Conexão}} W^i$

No caso de coordenadas esféricas, temos $\sqrt{g} = r^2 \operatorname{sen}\theta$. Então

$$D_i W^i = \partial_i W^i + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g}\right) W^i$$

$$= \partial_r W^r + \partial_\theta W^\theta + \partial_\phi W^\phi + \frac{2}{r} W^r + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} W^\theta$$

observação sobre os índices (Jackson usa índices para baixo): usamos a métrica da mesma maneira como fazíamos com a Métrica de Minkowski.

$$\begin{cases} W^i = g^{ij} W_j \\ W_i = g_{ij} W^j \end{cases}$$

caso de esféricas: $g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$

$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \end{pmatrix}$

$$W^r = g^{rr} W_r + \cancel{g^{r\theta}} W_\theta + \cancel{g^{r\phi}} W_\phi = W_r$$

– Laplaciano Covariante

Procedemos de maneira semelhante

$$\underbrace{S}_{\text{escalar}} = \underbrace{\int d^3x \sqrt{g}}_{\text{escalar}} \underbrace{g^{ij} \underbrace{\partial_i \phi}_{\text{vetores}} \underbrace{\partial_j \phi}_{\text{vetores}}}_{\text{escalar}} = -\int d^3x\, \partial_i(\sqrt{g} g^{ij} \partial_j \phi)\phi + \text{~~termo~~ de borda} = -\underbrace{\int d^3x \sqrt{g}}_{\text{escalar}} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i(\sqrt{g} g^{ij} \partial_j \phi) \underbrace{\phi}_{\text{escalar}}$$

Assim, definimos o Laplaciano covariante como $D^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i(\sqrt{g} g^{ij} \partial_j \phi)$

Exercício: Verificar o Laplaciano Covariante no caso de coordenadas esféricas

Exercício: Encontrar o Rotacional Covariante

→ Continuação de Polinômios de Legendre

Na aula anterior, foi desenvolvido o caso $m=0$. Para o caso $m \neq 0$, podemos desenvolver os casos usando $m>0$ sem perda de generalidade (porque m surgiu devido a $e^{im\phi}$). Realizando o mesmo processo que para o caso $m=0$, chegamos, após calcular ρ_1 e ρ_2, a

$$P = (1-x)^{m/2} \sum_n c_n (1-x)^n$$

Então substituimos na Equação de Laplace com $m \neq 0$, encontramos relações de recursão para c_n e chegamos ao resultado

$$P(x) = (1-x^2)^{m/2} F\left(-\nu+m, \nu+m+1, 1+m; \frac{1-x}{2}\right)$$

Esse resultado é, assim como no caso $m=0$, singular regular em 1, mas ainda problemático em -1.
Seguindo a solução que encontramos para $m=0$, definimos $\nu = \ell$, $\ell \in \mathbb{N} \geq m$ para termos $-\ell+m = 0, -1, -2 \ldots$
Assim, a função hipergeométrica se torna um polinômio.

$$P_{\ell m}(x) = \underbrace{C_{\ell m}}_{\text{fator de normalização}} (1-x^2)^{m/2} \underbrace{F\left(-\ell+m, \ell+1+m, 1+m, \frac{1-x}{2}\right)}_{\text{Função Associada de Legendre}}$$

$$\begin{cases} \ell = 0, 1, 2 \ldots \\ m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell \end{cases}$$

Finalmente, obtemos

$$\boxed{P(\theta)Q(\phi) = C_{\ell m} P_{\ell m} \cos\theta \, e^{im\phi}} \rightarrow \underbrace{Y_\ell^m(\theta, \phi)}_{\text{Harmônica Esférica}}$$

Retomando a Equação de Laplace, a parte radial nos dá

$$\frac{U(r)}{r} \rightarrow U(r) = A r^{\ell+1} + B r^{-\ell}$$

Sugestão de leitura do professor: Jackson seção
$\begin{cases} 3.3 \rightarrow \text{equação } 3.38 \ \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum P_\ell \\ 3.6 \rightarrow \text{relação entre Função de Green e funções Harmônicas} \\ 3.7 \rightarrow \text{Função de Bessel} \\ 3.9 \end{cases}$