

Magnetostática ($\rho = 0, \vec{E} = 0$)
 ↳ sem carga "sobrando"

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{suficiente para problemas com simetrias bastantes}$$

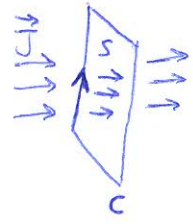
- Equação de Continuidade: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$
 as cargas que entram em um volume são iguais das pelas cargas que saem do mesmo

- Lei de Ampère: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

↳ Stokes

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi I}{c}$$



↳ Regra da mão direita: \hat{n} (versor normal a S) \rightarrow polegar da mão direita
 $\vec{r} \rightarrow$ direção do indicador

- Exemplo 1: Fio condutor infinitamente comprido com corrente estacionária



coordenadas cilíndricas

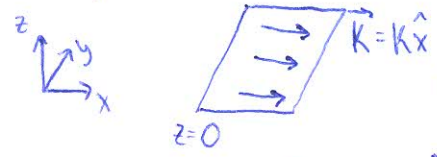
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\vec{B} = B(\rho) \hat{\phi} \rightarrow$ obedece $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ porque, em coordenadas cilíndricas, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(\rho) \int_0^{2\pi} \rho d\phi = 2\pi \rho B(\rho)$$

$2\pi \rho B(\rho) = \frac{4\pi I}{c} \rightarrow B(\rho) = \frac{2I}{c\rho}$ \rightarrow Podemos observar a partir deste resultado que, por motivos geométricos, o campo magnético tende assintoticamente a zero mais lentamente que o campo elétrico.

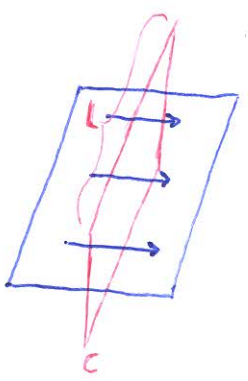
- Exemplo 2: Plano de correntes



O campo magnético se cancela em direções ortogonais e se soma em direções paralelas à superfície.

$$\vec{B} = -B(z) \hat{y}$$

$$\vec{B}(z) = -\vec{B}(-z)$$



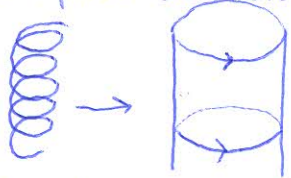
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = LB(z) - LB(-z)$$

$$= 2LB(z)$$

$$2LB(z) = \frac{4\pi}{c} KL \rightarrow B(z) = \frac{2\pi}{c} K, z > 0$$

* Descontinuidades: $\begin{cases} \text{componente paralela de } \vec{B} \rightarrow \text{descontínua} \\ \text{componente perpendicular de } \vec{B} \rightarrow \text{contínua} \end{cases}$ (oposto do que ocorre para campo elétrico)

Exemplo 3: Solenoide infinito



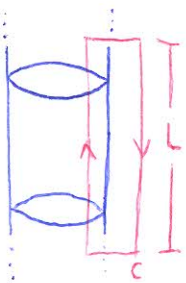
$$\vec{B} = B(\rho) \hat{z} \quad (\text{Assim como no caso do exemplo 1, obedece } \nabla \cdot \vec{B} = 0)$$

Fora do cilindro: $\vec{J} = 0 \rightarrow \nabla \times \vec{B} = 0$

$$\frac{\partial B}{\partial \rho} = 0 \rightarrow B(\rho) \text{ constante}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} B(\rho) = 0 \rightarrow B(\rho) = 0$$

Dentro do cilindro:



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = BL = \frac{4\pi}{c} \underbrace{INL}_k \quad \begin{array}{l} \text{corrente em cada espira} \\ \text{número de espiras} \\ \text{por unidade de comprimento} \end{array}$$

$$B = \frac{4\pi k}{c} \hat{z}$$

Para casos com menos simetria, precisamos usar também $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Introduzimos, então, o potencial vetor \vec{A} .

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \rightarrow B_i = \epsilon_{lmn} \partial_m A_n \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Chegamos a uma equação equivalente à equação de Laplace para V abaixo

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

$$(\nabla \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j B_k = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{kmn} \partial_m A_n) \quad \epsilon_{kmn} = \epsilon_{mnk} = \epsilon_{nkm}$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} \partial_j \partial_m A_n$$

$$= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \partial_j \partial_m A_n$$

$$= \partial_i (\partial_j A_j) - \partial_j \partial_j A_i = \partial_i \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 A_i$$

Portanto, considerando as componentes x, y, z , temos

$$-\nabla^2 \vec{A} + \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

↳ podemos eliminar este termo com uma transformação de calibre (gauge)

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda \quad \nabla \times \vec{A} \text{ não é alterado, pois } B \text{ vem de } F^{\mu\nu}$$

Escolhendo Λ tal que $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$ (calibre de Coulomb), temos (adotando $\nabla \cdot \vec{A} = \Psi(\vec{x})$)

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \Lambda = \Psi(\vec{x}) + \nabla^2 \Lambda = 0$$

$$\rightarrow \nabla^2 \Lambda = -\Psi(\vec{x})$$

Assim, ficamos com

$$\nabla^2 \vec{A}' = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} \rightarrow \nabla^2 A_i = -\frac{4\pi}{c} J_i, \quad i=x, y, z$$

$$\nabla^2 A_i = -\frac{4\pi}{c} J_i \quad \text{função de Green} \rightarrow A_i(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_V d^3x' \frac{J_i(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Checando o calibre de Coulomb

$$\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_V d^3x' \nabla_{\vec{x}} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{c} \int_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \cdot \underbrace{\nabla_{\vec{x}} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)}_{-\nabla_{\vec{x}'} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)}$$

$$= \frac{1}{c} \int_V d^3x' \left(\underbrace{\nabla_{\vec{x}'} \left(\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)}_{\text{termo de borda}} - \underbrace{\left(\nabla_{\vec{x}'} \cdot \vec{J}(\vec{x}') \right) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}_{=0} \right) = 0$$

(zero no infinito)

Temos, então, uma solução para \vec{B}

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \frac{1}{c} \int_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') \wedge (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad \text{Lei de Biot-Savart}$$

Exercício: Reproduzir \vec{B} para um fio condutor com corrente usando a expressão de Biot-Savart.

Discussão sobre o potencial vetor \vec{A}

Mecânica Clássica: \vec{B} é fundamental, \vec{A} não é. É possível resolver os problemas sem o uso de \vec{A} .

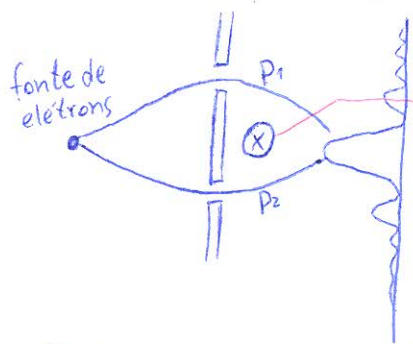
Mecânica Quântica: \vec{A} é fundamental e indiretamente observável

Cargas em um campo de fundo em Mecânica Quântica: Somos levados a formular problemas em termos de \vec{A} , não \vec{B}

(substituição minimal)

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} + e\vec{A}$$

Efeito Bohm-Aharonov (Experimento Chambers PRL 1960)



Emissão de um elétron por vez, impedindo interação entre eles

Solenóide em uma direção ortogonal à folha
↳ impenetrável para o elétron

Interior do solenoide: $\vec{B} = B\hat{z} \rightarrow \vec{A} = ?$

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \underbrace{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right)}_B$$

$$B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \rightarrow A_\phi = \frac{\rho^2}{2\rho} B$$

$\vec{B} = 0$ no exterior do solenoide, então não se espera efeitos novos no ponto de vista clássico ao ligar o solenoide.

Quanticamente, $\vec{B} = 0$, $\Psi = \Psi_{p_1} + \Psi_{p_2}$
↳ função de onda

$\vec{B} \neq \vec{0} \rightarrow$ uma fase para a função de onda depende de \vec{A}
 $e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} \vec{A} \cdot d\vec{x}}$

↳ termo de interação entre a partícula e o campo de fundo

$$\int_{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{x} - \int_{P_1} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_{P_2 \cup (-P_1)} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \equiv \Phi \neq 0$$

$$\Psi = e^{\left(\frac{-ie}{\hbar c} \int_{P_1} \vec{A} \cdot d\vec{x}\right)} \Psi_{p_1} + e^{\left(\frac{-ie}{\hbar c} \int_{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{x}\right)} \Psi_{p_2}$$
$$= e^{\left(\frac{-ie}{\hbar c} \int_{P_1} \vec{A} \cdot d\vec{x}\right)} \left(\Psi_{p_1} + e^{\left(\frac{-ie}{\hbar c} \left(-\int_{P_1} + \int_{P_2}\right) \vec{A} \cdot d\vec{x}\right)} \Psi_{p_2} \right)$$

irrelevante
para a função
densidade de
probabilidade

$$= e^{i\#} \left(\Psi_{p_1} + \underbrace{e^{\left(\frac{-ie}{\hbar c} \Phi\right)}}_{\neq 1} \Psi_{p_2} \right)$$