Aula de 06/10

→ **AVISO**: P2 remarcada para dia 27/10

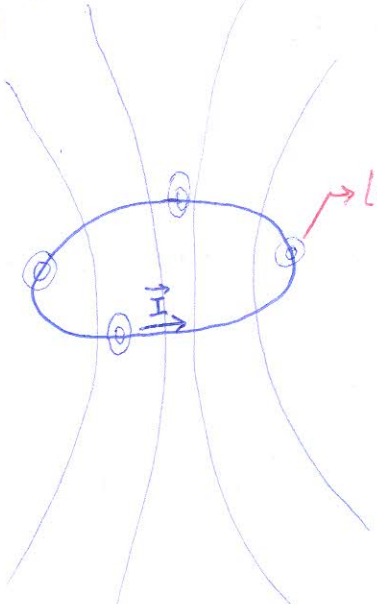
Cairá até Equações de Maxwell, sem **ondas**

→ Dipolos Magnéticos

- Correntes Limitadas em um volume finito

Expansão em multipolos usada na eletrostática também pode ser usada aqui.

Exemplo: Espira



→ Localmente, podemos interpretá-la como um fio infinitamente grande

Usando o potencial magnético para os cálculos (e trocando a notação de $\vec{x}$ para $\vec{r}$)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\int_V d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{I}{c}\oint_C \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \overset{\text{Taylor}}{\cong} \frac{I}{c}\oint_C d\vec{r}'\left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + \dots\right)$$

O primeiro termo, no caso eletrostático, era associado ao monopólo, o que não acontece neste caso, já que o monopólo não existe.

Exercício: Mostrar que $\oint_C \frac{d\vec{r}'}{r} = 0$.

Lema: $\vec{g}$ vetor constante

$$\oint_C d\vec{r}'\cdot\vec{g}(\vec{r}\cdot\vec{r}') \overset{\text{Stokes}}{=} \int_S d\vec{s}\cdot\vec{\nabla}_{r'}\times(\vec{g}(\vec{r}\cdot\vec{r}')) = \int_S ds_i\,\epsilon_{ijk}\,\partial_j(g_k r_m r'_m)$$

$$\partial_j r'_m = \frac{\partial}{\partial r'_j} r'_m = \delta^j_m$$

$$= \int_S ds_i\,\epsilon_{ijk}\,g_k \underbrace{\delta^j_m r_m}_{r_j} = \int_S g_k\,\epsilon_{kij}\,ds_i\,r_j = \vec{g}\cdot\int_S d\vec{s}\times\vec{r}$$

Temos, então, $\oint_C d\vec{r}'(\vec{r}\cdot\vec{r}')\cdot\vec{g} = \vec{g}\cdot\int_S d\vec{s}\times\vec{r}$

Podemos remover $\vec{g}$, já que a identidade vale para qualquer $\vec{g}$, obtendo

$$\oint_C d\vec{r}'(\vec{r}\cdot\vec{r}') = \underbrace{\int_S d\vec{s}}_{\vec{\mathcal{S}}}\wedge\vec{r} = \vec{\mathcal{S}}\wedge\vec{r}$$

$\vec{\mathcal{S}} \equiv \int_S d\vec{s}$ vetor área

Voltando ao potencial, temos $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\oint_C d\vec{r}'\left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + \dots\right) = \frac{I}{c}\frac{1}{r^3}\vec{\mathcal{S}}\wedge\vec{r}$

Definindo $I\vec{S} \equiv \vec{m}$ (momento de dipolo magnético), chegamos a $\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{m}\wedge\vec{r}}{cr^3}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\left(\frac{3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}}{r^3}\right)$$ Comportamento similar, "de longe", ao do dipolo elétrico.

- Caso Geral

$$A_i(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int_V d^3r' \frac{J_i(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{c}\int_V d^3r' \left(\underbrace{\frac{J_i(\vec{r}')}{r}}_{0} + \frac{J_i(\vec{r}')\,\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + \dots\right)$$

Identidade: $\partial_j'(J_j r_i') = (\underbrace{\cancel{\partial_j' J_j}}_{\text{conservação da corrente}})r_i' + J_j(\partial_j' r_i') = J_j\delta_{ij} = J_i$

$$\frac{1}{c}\int_V d^3r' \frac{1}{r}\partial_j'(J_j(\vec{r}')r_i') = 0$$ primeiro termo

Identidade: $\partial_j'(J_j r_i' r_k') = \cancel{\partial_j'(J_j)} r_i' r_k' + J_j \underbrace{(\partial_j' r_i')}_{\delta_{ij}} r_k' + J_j r_i' \underbrace{(\partial_j' r_k')}_{\delta_j^{\,k}} = J_i r_k' + J_k r_i'$

$$\int_V d^3r' \underbrace{\cancel{\partial_j'(J_j r_i' r_k')}}_{0} = \int_V d^3r' (J_i r_k' + J_k r_i')$$

$$\rightarrow \int_V d^3r' (J_i r_k') = \int_V d^3r' (-J_k r_i')$$

Assim, para o segundo termo, temos

$$\int_V d^3r' J_i r_j r_j' = \int_V d^3r' \frac{r_j}{2}(J_i r_j' + J_i r_j') = \int_V d^3r' \frac{r_j}{2}(J_i r_j' - J_j r_i')$$

$$= \frac{1}{2}\int_V d^3r' \left(J_i \vec{r}\cdot\vec{r}' - r_i' \vec{J}\cdot\vec{r}\right)$$

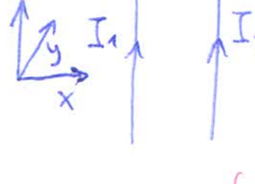
Usando, agora, a identidade $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$, temos que

$$\int_V d^3r' \vec{J}\,\vec{r}\cdot\vec{r}' = \frac{1}{2}\vec{r}\times\int d^3r' \vec{J}\times\vec{r}'$$

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{m} = \frac{1}{2}\int_V d^3r'\, r'\times\vec{J}(\vec{r}')$$ definição mais geral de momento de dipolo magnético

→ Forças Magnéticas (caso não relativístico, $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$) $\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$

- Fios paralelos



$I_1 \rightarrow \vec{B} = \dfrac{2I_1}{cd}\hat{y}$ (seria $\hat{\phi}$, mas estamos preocupados apenas com a região do campo que influencia o outro fio)

$$\underset{\text{força por unidade de comprimento}}{\vec{f}} = \underset{\text{números de cargas por unidade de comprimento}}{n}A\vec{F} = \frac{2}{c}\frac{I_1 I_2}{d}\underbrace{\hat{z}\wedge\hat{y}}_{-\hat{x}} = -\frac{2}{c}\frac{I_1 I_2}{d}\hat{x}$$

→ $I_1 I_2 > 0$: força atrativa

→ $I_1 I_2 < 0$: força repulsiva

Caso mais geral:

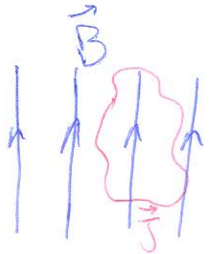
$$\underset{\vec{B}\text{ devido à corrente }J_1}{\vec{B}(\vec{r})} = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\vec{J}_1(\vec{r}')\wedge(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \longrightarrow \vec{F} = \int d^3r\, \vec{J}_2(\vec{r})\wedge\vec{B}(\vec{r})$$

Se $\vec{J}_1$ e $\vec{J}_2$ se moverem ao longo de fios condutores, temos

$$\vec{F} = \frac{1}{c} I_1 I_2 \oint_{C_1}\oint_{C_2} d\vec{r}_2 \wedge \left(d\vec{r}_1 \wedge \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right)$$

Em geral é difícil de resolver essa integral, mas, se J_1 e J_2 forem bem separadas, podemos usar expansões em multipolos.

- Versão simplificada do problema: $\vec{J}$ inserido em um $\vec{B}$ de fundo. Qual a força experimentada por $\vec{J}$?



A análise de energia vai ajudar a refletir sobre forças lineares e torque

$$\vec{F} = \int_V d^3r\, \vec{J}(\vec{r}) \wedge \vec{B}(\vec{r})$$

$\to$ centro de massa da espira

$$\begin{cases} \vec{J}(\vec{r}) \text{ localizada perto de } \vec{r} = \vec{R} \\ \vec{B}(\vec{r}) \text{ varia pouco perto de } \vec{r} = \vec{R} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ podemos expandir em Taylor

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \vec{B}(\vec{R}) + (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})(\vec{B}(\vec{r})) + \dots$$

$$\vec{F} = \underbrace{-\vec{B}(\vec{R}) \wedge \int_V d^3r\, \vec{J}(\vec{r})}_{=0 \text{ corrente em contorno fechado}} + \int_V d^3r\, \vec{J}(\vec{r}) \wedge ((\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}(\vec{r})) + \dots$$

$$= \int_V d^3r\, \vec{J}(\vec{r}) \wedge \left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}'\vec{B}(\vec{r}')\big|_{\vec{r}'=\vec{R}}\right)$$

Identidade: $\varepsilon_{ijk} J_j(\vec{r}) r_\ell \partial'_\ell B_k(\vec{r}') = \varepsilon_{ijk} J_j(\vec{r}) r_\ell \partial'_k B_\ell(\vec{r}')$?

Se sim, então $\varepsilon_{ijk} J_j(\vec{r}) r_\ell \underbrace{(\partial'_\ell B_k(\vec{r}') - \partial'_k B_\ell(\vec{r}'))}_{\vec{\nabla}\times\vec{B}=0} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0 \to$ Portanto, a igualdade é verdadeira

Assim, temos $\vec{F} = \int_V d^3r\, \vec{J}(\vec{r}) \wedge (\vec{r}\cdot\vec{\nabla}'\vec{B}(\vec{r}')) = -\vec{\nabla}' \times (\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}))$

Exercício: Chegar em $\int_V d^3r\, (\vec{B}\cdot\vec{r})\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \int_V d^3r\, \vec{J}\wedge\vec{r} = -\vec{B}\wedge\vec{m}$.

Com o resultado do exercício, temos

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\times(\vec{B}\wedge\vec{m}) \overset{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0}{=} \vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\vec{m}) \longrightarrow U = -\vec{B}\cdot\vec{m}$$

esse potencial está associado tanto à variação do centro de massa quanto ao torque.

Observações finais: Sobre m (dipolo magnético).

$\vec{M}$ ímã formado por vários $\vec{m}$ microscópicos que são gerados pelo spin dos elétrons $\vec{S} = \frac{1}{2}\hbar$

$$\vec{m} = g\frac{e}{2m}\vec{S}$$

$e \to$ carga do elétron

$m \hookrightarrow$ massa do elétron

- $\to$ fator g $\to$ se girarmos uma esfera macroscópica, obteremos $g=1$
- $\to$ associado ao spin: $g = 2,\underbrace{002319304199{,}22}_{12 \text{ casas}}$ $\to$ número melhor conhecido da Física