Aula de 10/10

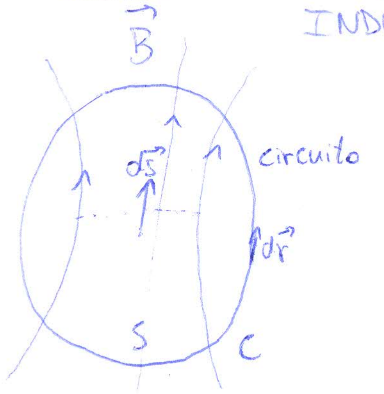
Aviso: A P2 abordará o conteúdo contido até a lista 10.

→ Eletrodinâmica

Campos E, B podem depender do tempo

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\underbrace{\vec{B}\text{ dependente do tempo} \rightarrow \text{produz } \vec{E} \rightarrow \text{acelera cargas} \rightarrow \text{corrente}}_{\text{INDUÇÃO}}$$



$$\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\vec{ds}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{ds}$$

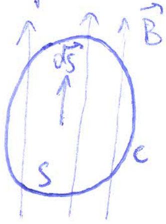
$$\underbrace{\int_C\vec{E}\cdot\vec{dr}}_{\text{"Força" Eletromotriz } (\mathcal{E})}=-\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_S\vec{B}\cdot\vec{ds}}_{\text{Fluxo } (\Phi)}$$

*S, C não dependem do tempo

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt}$$ Lei de Faraday

(−) → Lei de Lenz

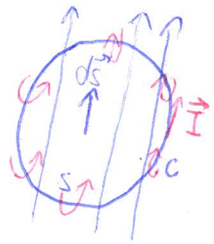
- Exemplo de Lei de Lenz (Lei de Inércia para a eletrodinâmica)



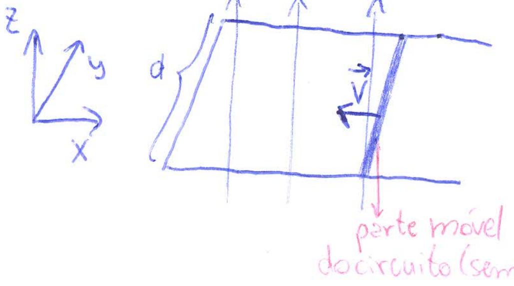
$\vec{B}$ uniforme

S, C ainda independentes do tempo

$\frac{d\Phi}{dt}<0 \rightarrow \mathcal{E}>0 \rightarrow I$ antihorário



- Exemplo: "aquecimento para C, S dependentes do tempo"



$\vec{v}=v(-\hat{x})$ constante

$\vec{B}=B\hat{z}$ constante

Como existem cargas por todo o circuito, na barra móvel temos cargas q com $\vec{v}$ em $\vec{B}$

↓

Força de Lorentz

$\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B})=qvB\hat{y}$

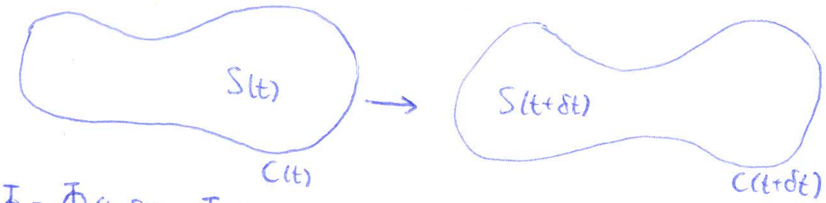
↓

$\mathcal{E}=vBd$

↳ f.e.m. por carga unitária

S está diminuindo com $\vec{B}$ constante → $\frac{d\Phi}{dt}=-vBd$

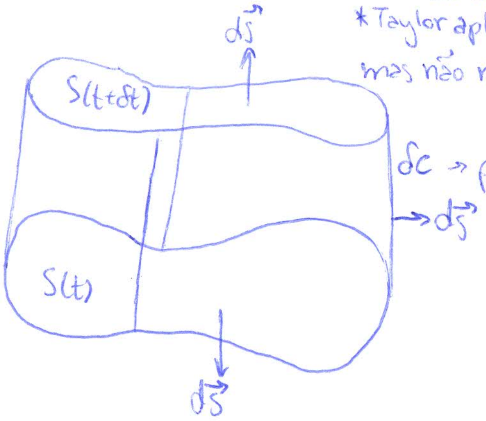
- Caso Geral



$$\delta\Phi = \Phi(t+\delta t) - \Phi(t)$$

$$= \int_{S(t+\delta t)} \vec{B}(t+\delta t)\cdot d\vec{s} - \int_{S(t)} \vec{B}(t)\cdot d\vec{s} \overset{\text{Taylor}}{=} \left(\int_{S(t+\delta t)} - \int_{S(t)}\right)\vec{B}(t)\cdot d\vec{s} + \int_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\delta t \cdot d\vec{s} + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

*Taylor aplicado na função mas não na borda



δc → paredes laterais $\quad S_{total} = S_c \cup S_{(t+\delta t)} \cup S^{-1}_{(t)}$ ← orientada na direção oposta

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \to \int_{S_{total}} \vec{B}(t)\cdot d\vec{s} = 0$$

$$\left(\int_{S(t+\delta t)} - \int_{S(t)}\right)\vec{B}(t)\cdot d\vec{s} = -\int_{S_c} \vec{B}(t)\cdot d\vec{s}$$

Para S_c, temos $d\vec{s} = (d\vec{r}\times\vec{v})\delta t$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\Phi}{\delta t} = \int_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} - \int_{S_c} \vec{B}\cdot(d\vec{r}\times\vec{v}) = -\int_{S(t)} (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{s} - \int_{S_c} (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{r}$$

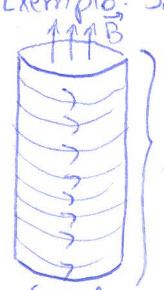
$$\overset{\text{Stokes}}{=} \underbrace{-\int_{S_c}\left(\vec{E} + (\vec{v}\times\vec{B})\right)\cdot d\vec{r}}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

→ Indutância

$\xrightarrow{\text{Biot Savart}}$ $\vec{B}$ produzido pela corrente → tem fluxo $\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$

Por isso, definimos $L = \frac{\Phi}{I}$, que depende apenas da geometria de C

- Exemplo: Solenoide



área A
$l \gg \sqrt{A}$

$B = \frac{4\pi}{c} IN$ ← número de espiras por unidade de comprimento

$\Phi = \frac{4\pi}{c} INA$

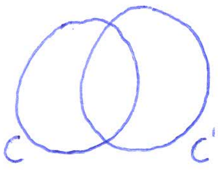
$\Phi_{total} = \frac{4\pi}{c} INA\,Nl = \frac{4\pi}{c} IN^2V \to L = \frac{4\pi}{c}N^2V$

→ Combinando Ampére e Biot-Savart

Deve-se lembrar neste momento da característica topológica da Lei de Ampére, devido à qual o importante para um certo resultado é aquilo que está contido dentro do contorno, e não o contorno em si.

Ampére → $\oint_C B\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi I}{\cancel{c}}$ usaremos $c=1$

Biot-Savart → $d\vec{B} = \frac{I}{\cancel{c}}\frac{d\vec{r}\times\vec{r}}{r^2} \longrightarrow \vec{B} = \frac{-I}{\cancel{c}}\int_C \frac{(\vec{r}-\vec{r}')\times d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

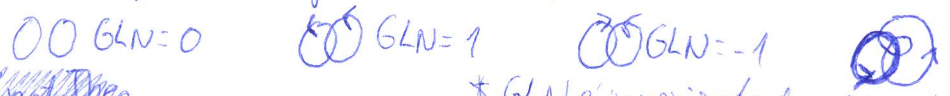


$$\int_{C} \vec{B}\cdot d\vec{l} = -I\oint_C\oint_{C'}\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}')\times d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]\cdot d\vec{l} = 4\pi \underbrace{N}_{\text{número de voltas em } C} I$$

*Leitura indicada pelo professor para interessados em topologia:

- página 218 do Geometry of Physics, T. Frankel. Fala a respeito do Gauss Linking Number

  Gauss Linking Number (GLN) é o número de nós entre dois caminhos dados, com sinal influenciado pela orientação dos contornos.

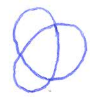
~~Knot Theo~~

* GLN é invariante topológico (não muda com deformações contínuas)

- "The Knot Book", Colin Adams

  Classificação dos nós.

  Exemplos com um único circuito: Unknot 

  Trefoil 

→ Energia associada a $\vec{B}$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \overset{\Phi = LI}{=} -L\frac{dI}{dt}$$

variando I sem mudar a geometria do sistema (L constante)

olhando para a carga $I\delta t$ se movimentando no circuito, temos

$$\delta W = \mathcal{E} I \delta t = -LI\frac{dI}{dt}\delta t$$

$$\frac{dW}{dt} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta W}{\delta t} = -LI\frac{dI}{dt} = -\frac{L}{2}\frac{d(I^2)}{dt}$$

$$U = -W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Phi I$$

$$U = \frac{1}{2}I\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}I\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{A})\,d\vec{s} = \frac{1}{2}I\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\int d^3x\, \vec{J}\cdot\vec{A} \overset{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}}{=} \int d^3x\,(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\vec{A}\cdot\frac{c}{8\pi}$$

$$U = \frac{c}{8\pi}\int d^3x\,(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\vec{A} = \frac{c}{8\pi}\int d^3x\,(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{A})}_{\text{superfície}\to 0} + \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})) = \frac{c}{8\pi}\int d^3x\,\vec{B}^2$$

$$U = \frac{1}{8\pi}\int d^3x\,(E^2 + cB^2)$$

* Um problema desta demonstração é que usamos fontes dos campos magnéticos. Eletromagnetismo 2 terá uma abordagem sem fontes do mesmo problema.