Aula de 17/10

Exercício: imaginar como seria um circuito hídrico, pensando como seriam os componentes de natureza mecânica equivalentes aos componentes dos circuitos elétricos.

* Comentário sobre pergunta referente à aula passada: ao discutir a Lei de Lenz, parecia haver uma incoerência entre o efeito observado e a natureza do campo magnético $\vec{B}$, já que parece que este gera uma força que realiza trabalho. Esse problema se explica pelo fato da velocidade $\vec{v}$ da barra móvel ser perpendicular à direção do deslocamento dos elétrons. Se tivéssemos $\vec{v} \parallel d\vec{r}$, então teríamos $\int e(\vec{v}\times\vec{B})\,d\vec{r} = 0$, como de costume.

→ Resistência

atrito na propagação da corrente

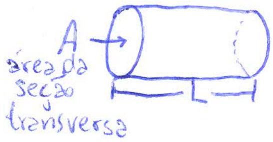
- carga acelerada irradia
- a carga interage com vibrações da rede de íons → "phonons"
- o meio físico contém impurezas

→ Lei Fenomenológica: Lei de Ohm ($\mathcal{E} = RI$)

$$\mathcal{E} = \int \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int -\vec{\nabla}V\,d\vec{r} = V \quad \text{diferença de potencial}$$

↳ $V = RI$

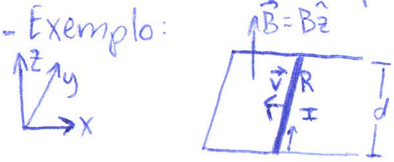
↳ dado pela geometria e pelas características físicas do condutor



$R = \rho \dfrac{L}{A}$ (ρ: resistividade) $\quad \sigma = \dfrac{1}{\rho}$ (σ: condutividade)

* Modelo de Drude para condutores (a ser visto em Novembro) → explica a Lei de Ohm.

- Exemplo:



$\vec{F} = IBd\hat{x}$

$m\ddot{x} = IBd$ equação para a posição da barra condutora

mas I também varia com o tempo

$$RI = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bd\dot{x}$$

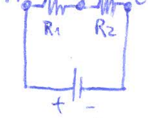
$$I = \frac{-Bd\dot{x}}{R}$$

Assim, temos $m\ddot{x} = -\dfrac{B^2d^2}{R}\dot{x} \rightarrow \dot{x}(t) = -V_0\, e^{-\frac{B^2d^2t}{mR}}$

* Se adicionarmos uma bateria ao problema, temos $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{ind} = \mathcal{E}_0 - Bd\dot{x} \rightarrow m\ddot{x} = -\dfrac{Bd}{R}(\mathcal{E}_0 - Bd\dot{x})$

- Digressão sobre circuitos

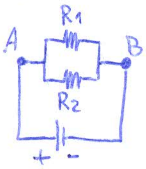
Resistores em série:



Nos caminhos AB e BC, temos a mesma corrente, porém ddp's diferentes

$$\begin{cases} V_A - V_B = R_1 I \\ V_B - V_C = R_2 I \end{cases} \rightarrow V_A - V_C = (R_1 + R_2)I$$

Resistores em paralelo:

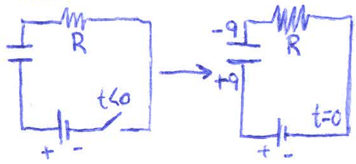


$$V_A - V_B = V$$

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \frac{V}{R_{eq}} \rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

→ Circuito RC

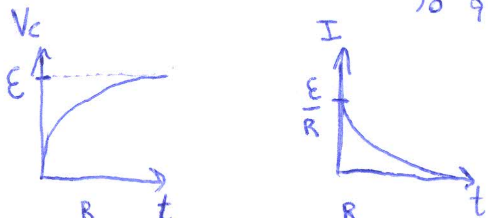
Carga →



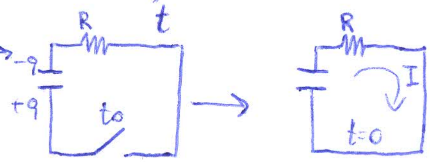
$$\mathcal{E} = V_R + V_C = RI(t) + \frac{q(t)}{C} \qquad I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$R\frac{dq}{dt} = \mathcal{E} - \frac{q}{C}$$

$$\int_0^q \frac{dq'}{q'-C\mathcal{E}} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \rightarrow q(t) = C\mathcal{E} + e^{\frac{t}{RC}} \rightarrow \text{tempo característico } \tau$$



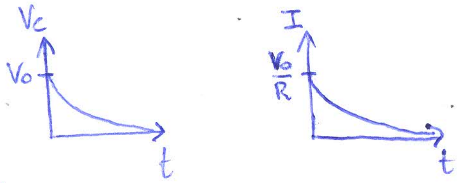
Descarga →



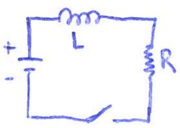
$$V_C = V_R \rightarrow \frac{q(t)}{C} = RI(t) \qquad I(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q(t)}{RC}$$

$$q(t) = q_0 e^{\frac{-t}{RC}} \rightarrow \text{tempo característico } \tau$$



→ Circuito RL



$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = RI$$

$$\mathcal{E} = L\frac{dI}{dt} + RI \rightarrow \int \frac{dI}{\mathcal{E}-RI} = \int \frac{dt}{L}$$

$$\rightarrow \mathcal{E} - RI = Ae^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow \tau = \frac{L}{R}$$

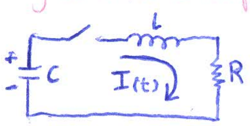
$t=0$ → fechamento do circuito

Assumindo $I(0)=0 \rightarrow I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$

$t'=0$ → abertura do circuito

$I'(0) = I(\infty)$ o comportamento vai ser similar ao caso anterior, mas com R tendendo ao infinito. A indução, que antes agia de modo a diminuir o ímpeto do aumento da corrente, agora tentará impedir que esta diminua.

→ Circuito RLC



$$\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} = RI \qquad I = -\frac{dq}{dt}$$

↓ derivando em t

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0 \qquad \text{Oscilador Harmônico Amortecido}$$

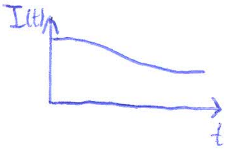
$$I(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

Usando $\frac{R}{L} = 2\gamma$ e $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, temos α_1 e α_2 raízes de $\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

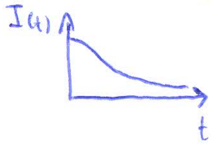
Se $\gamma^2 > \omega_0^2 \rightarrow R^2 > \frac{4L}{C} = R_c^2$

$$I(t) = e^{-\gamma t}\left(A e^{t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} + B e^{-t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\right)$$



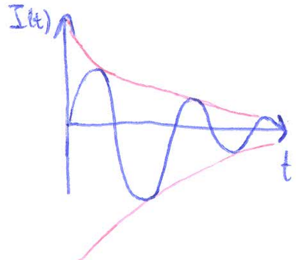
Se $\gamma^2 = \omega_0^2$

$$I(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt)$$

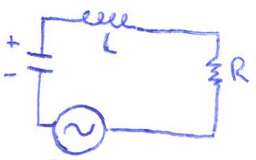


Se $\gamma^2 < \omega_0^2$

$$I(t) = D e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



→ Circuito RLC com corrente alternada do gerador



$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$ estado transiente permanente

$$\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi) - L\frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} + RI \rightarrow \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = \frac{-\omega \mathcal{E}_0}{L} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

chute para a solução particular: $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$

determinando que as parcelas com cossenos se anulem e a parcela com seno se iguale a $-\frac{\omega \mathcal{E}_0}{L} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$, temos

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

se $\omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$

→ Termo de Maxwell

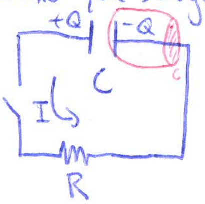
Ampére: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$ → não é suficiente para reproduzir $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{c}{4\pi}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$$

Mas sabemos da derivação das equações de Maxwell que, em geral, temos $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{termo de Maxwell}}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{1}{c}\vec{\nabla} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow 0 = 4\pi \vec{\nabla} \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\overbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}^{4\pi\rho} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

· Paradoxo que surge se não considerarmos o termo de Maxwell



$$\int_c \vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I \quad \text{região hachurada}$$

$$\int_c \vec{B}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{região branca}$$

Com Maxwell:

região branca $\int_c \vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{c}\int \frac{d\vec{E}}{dt}\cdot d\vec{a} = \frac{4\pi}{c} I$

porque $E = \frac{4\pi Q}{A} \rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{A}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{4\pi I}{A}$