Aula de 10/11

→ Ondas Planas (monocromáticas)

Notação Complexa

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \hat{y} e^{i(kx-\omega t)} \\ \vec{B} = \frac{E_0}{c} \hat{z} e^{i(kx-\omega t)} \end{cases} \rightarrow \text{na direção } \hat{x}$$

usar notação complexa e tomar a parte real (cálculos lineares)

cálculos não lineares: tomar a parte real antes de fazer o cálculo (ex.: energia $\sim \vec{E}^2, \vec{B}^2$)

- Polarização

palpite mais geral para ondas monocromáticas

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \\ \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \end{cases}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{E}_0, \vec{B}_0 \in \mathbb{C}^3$$

· Onda polarizada linearmente:

$\vec{E}_0, \vec{B}_0$ Reais

$\vec{k}$: vetor de onda

k: número de onda

$\omega^2 = c^2 k^2$ (Equações de Maxwell)

$$\begin{rcases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \rightarrow i\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \rightarrow i\vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0 \end{rcases} \rightarrow \begin{array}{l} \vec{k}: \text{direção de propagação da onda} \\ \vec{B}_0, \vec{E}_0: \text{ortogonais a } \vec{k} \end{array}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow i\vec{k}\times\vec{E}_0 = i\omega\vec{B}_0 \rightarrow \hat{k}\times\frac{\vec{E}_0}{c} = \vec{B}_0 \quad (\text{usando } \omega = ck)$$

· Polarização Elíptica e circular

$\vec{E}_0, \vec{B}_0$ complexos

$\vec{E}_0 = \vec{\alpha} - i\vec{\beta}$

$$Re(\vec{E}) = \vec{\alpha}\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) + \vec{\beta}\,\text{sen}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t), \quad \text{com } \vec{\alpha}\cdot\vec{k} = \vec{\beta}\cdot\vec{k} = 0$$

travando em $\vec{x} = 0 \rightarrow Re(\vec{E}) = \vec{\alpha}\cos(\omega t) - \vec{\beta}\,\text{sen}(\omega t) \rightarrow$ direção de $\vec{E}$ muda no tempo

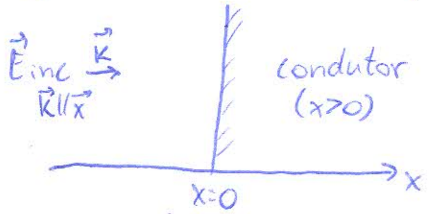
caso especial: $\begin{cases} |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \end{cases} \rightarrow$ fase de $\vec{E}_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}$ polarização circular

$$\begin{cases} \text{polarização circular de mão direita: } \vec{\beta} = \hat{k}\times\vec{\alpha} \\ \text{polarização circular de mão esquerda: } \vec{\beta} = -\hat{k}\times\vec{\alpha} \end{cases}$$

Onda Geral (princípio de superposição): $\vec{E}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$, com $\omega = ck$

↳ mistura de diversos comprimentos de onda

Exemplo: Reflexão de uma onda por um condutor



$\vec{E}_{inc} = E_0 \hat{y} e^{i(kx-\omega t)}$

condutor: $\vec{E}_{int} = 0$

precisamos, então, ter $\vec{E}=0$ em $x=0^-$

adicionamos, então, uma onda refletida

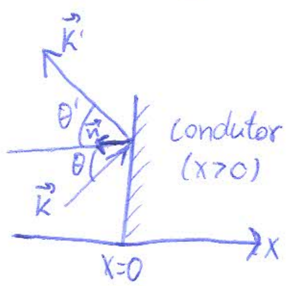
$\vec{E}_{ref} = -E_0 \hat{y} e^{i(-kx-\omega t)}$

$\vec{E} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{ref} \rightarrow \vec{E}(\vec{x}=0) = 0$

$\vec{B} = \vec{B}_{inc} + \vec{B}_{ref} \rightarrow \begin{cases} \vec{B}_{inc} = \frac{E_0}{c} \hat{z} e^{i(kx-\omega t)} \\ \vec{B}_{ref} = \frac{E_0}{c} \hat{z} e^{i(-kx-\omega t)} \end{cases}$

$\vec{B} \cdot \hat{n} = 0$

$\vec{B} \cdot \hat{z} \Big|_{\vec{x}=0} = \frac{2E_0}{c} e^{-i\omega t}$ consistente com a existência de uma corrente de superfície $\vec{K} = \frac{E}{2\pi} \hat{y} e^{-i\omega t}$



$\vec{E}_{inc} = E_0 \hat{y} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

$\vec{k} = k\cos\theta \hat{x} + k \operatorname{sen}\theta \hat{z}$

$\vec{E}_{ref} = -E_0 \hat{y} e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega' t)}$

$\begin{cases} (\vec{E}_{inc} + \vec{E}_{ref}) \hat{n} = 0 \\ (\vec{E}_{inc} + \vec{E}_{ref}) \times \hat{n} = 0 \end{cases} \rightarrow (\hat{n} = -\hat{x})$ $\vec{k}' = -k\cos\theta \hat{x} + k \operatorname{sen}\theta \hat{z} \rightarrow \theta = \theta'$

$\begin{cases} \vec{B}_{inc} = \frac{E_0}{c} (\hat{k} \times \hat{y}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \\ \vec{B}_{ref} = -\frac{E_0}{c} (\hat{k}' \times \hat{y}) e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega' t)} \end{cases}$

Tomando, agora, $Re(\vec{E})$ e $Re(\vec{B})$, temos

$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \operatorname{sen}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \operatorname{sen}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) = \frac{1}{c} (\hat{k} \times \vec{E}_0) \operatorname{sen}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) \end{cases}$

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{E_0^2}{4\pi} \hat{k} \operatorname{sen}^2(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)$ (ondas eletromagnéticas transportam energia na direção $\vec{k}$)

Média de energia transportada em um período: $\bar{\vec{S}} = \frac{E_0^2}{8\pi} \hat{k} = \bar{u} \vec{k}$ $(c=1)$

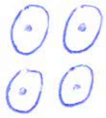
$u = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \frac{1}{4\pi} E_0^2 \operatorname{sen}^2(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) \rightarrow \bar{u} = \frac{1}{8\pi} E_0^2$

→ Meios Materiais

dielétricos: oposto de condutores

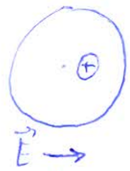
$\rho = 0$

modelo simplificado



cargas positivas com nuvens negativas ($\rho = 0$)

Se não houver um campo elétrico na região em que a carga se encontra (além, é claro, do campo gerado pela própria carga), a parte positiva mantém-se no centro. Caso contrário, temos



$\vec{p}$ dipolo elétrico

Na maioria dos materiais, temos $\vec{p} \sim \vec{E}$ (pelo menos para $\vec{E}$ pequeno), com $\vec{p} = \alpha \vec{E}$, sendo α a ~~polaridade~~ polarizabilidade atômica

Para determinarmos α, podemos tomar um modelo simples, com nuvem de carga negativa uniforme

Assim, temos $\vec{E}_{nuvem} = \frac{qr}{a^3}\hat{r}$ $(r < a)$

a ↳ raio da nuvem

$\vec{E}_{ext} = 0$ → núcleo na origem ($\vec{E}_{ext}$ é o campo "do ambiente")

O núcleo vai ocupar a posição tal que $\vec{E}_{ext} + \vec{E}_{nuvem} = 0$

$\vec{r} = \frac{a^3}{q}\vec{E}_{ext}$ $\quad \vec{p} = \vec{r}q = a^3 \vec{E}_{ext}$

↑ deslocamento $\quad$ ↳ $a^3 = \alpha$

Passando do micro para o macro, podemos definir $\vec{P} = n\vec{p}$. Assim, simplificamos um problema que antes tinha uma distribuição discreta de átomos.

n → densidade de átomos; $\vec{P}$ ↳ polarização

- Caso de matéria que já possuia um momento de dipolo intrínseco (como, por exemplo, a água): se não inserirmos um campo na região, os átomos possuirão momento de dipolo, mas não estarão com alguma orientação específica. Inserindo um campo $\vec{E}$, teremos um momento relacionado ao fato de todas as partículas passarem a ser orientadas segundo o campo $\vec{E}$, na forma $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$, sendo χ_e a suscetibilidade elétrica.

- Cargas Ligadas (que não podem se deslocar muito)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \rightarrow \int_V d^3r' \, \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \int_V d^3r' \, \vec{P}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

↑ potencial devido ao dipolo $\qquad$ ↑ integração sobre todos os dipolos em V

$$= \int_S d\vec{S} \, \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \int_V d^3r' \, \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\sigma_{ligadas} = \vec{P}\cdot\hat{n}$

$\rho_{ligadas}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r})$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho = 4\pi(\rho_{livres} + \rho_{ligadas}) = 4\pi\left(\rho_{livres} - \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r})\right)$$

ρ_{livres} → até agora → fora do dielétrico

Redefinir: $\vec{D} = \frac{\vec{E}}{4\pi} + \vec{P}$

$$\downarrow$$

$$\vec{D} = \frac{\vec{E}}{4\pi} + \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho_{livres} \equiv 4\pi\rho$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

↳ permissividade → $\varepsilon = \frac{1}{4\pi} + \chi_e$

$$\varepsilon > \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$$

- Exercício: Determinar $\sigma_{ligadas}$ na esfera dielétrica (tem no Griffiths)