Artigo p/ ler arxiv: 1511.02684 physics.ed-ph

2ª lei da Termo

$$dE = T\,dS$$

$$\frac{dE}{dS} = T \qquad dE \propto dM$$

$$\frac{dM}{dS} \propto \frac{1}{GM} \qquad dS \propto GM\,dM$$

$$\Rightarrow S \propto GM^2$$

$$R = 2GM$$

$$M^2 = \frac{R^2}{4G^2} \qquad S \propto \frac{G \cdot R^2}{G^2} \Rightarrow S \propto \frac{R^2}{G}$$

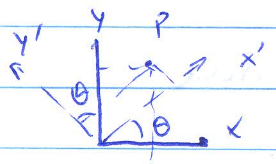
$$\Rightarrow S \propto \frac{R^2}{G} = \frac{\text{Área}}{G}$$

S não é extensiva ($S = S(V)$)

—— // ——

Rotações

transformações passivas: muda o referencial mas não altera a ~~posi~~ partícula.



$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{= R(\theta)} \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{= \vec{r}}$$

$$\vec{r}\,' = R(\theta)\,\vec{r}$$

rotação: transformação que preserva ~~a norma de um vetor~~ o produto escalar de dois vetores

norma do vetor

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}^{\,2} = \vec{p}^{\,T} \cdot \vec{p} = p_1^2 + p_2^2$$

tilibra

$$(\vec{U}+\vec{V})^T \cdot (\vec{U}+\vec{V}) = \vec{U}^2 + \vec{V}^2 + 2.\vec{U}^T.\vec{V} \rightarrow$$

$$\vec{U}'^2 + \vec{V}'^2 + 2\vec{U}'^T.\vec{V}' = (\vec{U}'+\vec{V}')^T \cdot (\vec{U}'+\vec{V}')$$

$\vec{p}^2$ invariante por rotação

$$\Rightarrow \vec{U}'^T \circ \vec{V}' = \vec{U}^T \circ \vec{V}$$

Rotação preserva produto escalar

$$\vec{U}^T \circ \vec{V} = \vec{U}'^T \cdot \vec{V}' = (\vec{U}^T R^T(\theta)) \cdot (R^T(\theta) \vec{V}^T)$$

$$\Rightarrow R^T(\theta) R(\theta) = 1$$

$$\Leftrightarrow R^T(\theta) = R^{-1}(\theta)$$

R é ortogonal

$$R \in O(2)$$

$$\det(R^T.R) = \det I = 1$$

$$\Leftrightarrow (\det R)^2 = 1$$

$$\det R = \pm 1$$

se $\det R = +1$, $R \in SO(2)$

"special orthogonal"

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ inversão de paridade

$P \notin SO(2)$

Rotações infinitesimais (Lie)

$SO(D)$: $R(\theta) \simeq I + A + o(A^2)$

$$R^T R = I = (I+A)^T(I+A) =$$

$$I + A^T + A + A^T A \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow A^T = -A$$

(A é antissimétrica)

p/ $D=2$,

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gerador do espaço das matrizes antissimétricas

tilibra

$$e^x = \lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

p/ $|\theta| \ll 1$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} -$$

$$I + \theta J$$

$$R(\theta) = \lim_{N \to \infty} \left(R\left(\frac{\theta}{N}\right) \right)^N$$

rotação finita

rotação infinitesimal

$$e^{\theta J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n J^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k} J^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1} J^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k} (-1)^k I}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1} (-1)^k J}{(2k+1)!} = \cos\theta . I + \sin\theta J = R(\theta)$$

Obs: estrutura complexa

$$J \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

Mas p/ expandir em Taylor, é necessária uma origem?

$\vec{r}_p = (x, y)$ $\quad\quad$ $\vec{r}_Q = (\bar{x}, \bar{y})$

$\vec{r}_p{}' = (x', y')$ $\quad\quad$ $\vec{r}_Q{}' = (\bar{x}', \bar{y}') = R(\theta)\vec{r}_Q$

$= R(\theta)\vec{r}_p{}'$

$$(\vec{r}_p{}' - \vec{r}_Q{}') = R(\theta)(\vec{r}_p - \vec{r}_Q)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

/ /

no F^2

Definição de vetor: um objeto que se transforma dessa maneira, $\forall R(\theta) \in SO(2)$

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

dx e dy são distâncias infinitesimais

Exemplo de não-vetor: $\vec{p}$ vetor, $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

a e b são escalares, portanto não se transformam

$\begin{pmatrix} ap_1 \\ bp_2 \end{pmatrix}$ é vetor sse $a=b$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ap_1 \\ bp_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap_1\cos\theta + bp_2\sin\theta \\ -ap_1\sin\theta + bp_2\cos\theta \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} ap_1' \\ bp_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap_1\cos\theta + ap_2\sin\theta \\ -bp_1\sin\theta + bp_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

mas $\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1\cos\theta + p_2\sin\theta \\ -p_1\sin\theta + p_2\cos\theta \end{pmatrix}$ a igualdade ocorre sse $a=b$

$SO(3)$: $R = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = 1 + A$ com $A^T = -A$

$= \theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z$

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ são vetores sob $SO(3)$

$\begin{pmatrix} p_2q_3 \\ p_3q_1 \\ p_1q_2 \end{pmatrix}$ é um vetor? NÃO $\begin{pmatrix} p_2q_3 - p_3q_2 \\ p_3q_1 - p_1q_3 \\ p_1q_2 - p_2q_1 \end{pmatrix}$ é um vetor

mostrar isso.

/ /

22/02

1) Rotações sob SO(3): transformações que preservam o produto escalar

$d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$

$\downarrow SO(3)$

$d\vec{x}' \cdot d\vec{x}' = (dx_1')^2 + (dx_2')^2 + (dx_3')^2$

$\Rightarrow R^T(\theta) \cdot R(\theta) = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \det R = \pm 1$

$\det R = 1$ se $R \in SO(3)$

2) Um vetor é definido pelas suas propriedades de transformação sob SO(3): um vetor é um objeto que se transforma como $d\vec{x}$ sob SO(3).

* o produto vetorial $a \times b$ é um vetor sob SO(3) (e um pseudovetor sob O(3))

MQ: representações operatoriais

SO(3): $\mathcal{J}_x, \mathcal{J}_y, \mathcal{J}_z$ ($\mathcal{J}_i$: geradores das matrizes antissimétricas)

$J_x = -i\,\mathcal{J}_x$
$J_y = -i\,\mathcal{J}_y$
$J_z = -i\,\mathcal{J}_z$

operadores Hermitianos (−i as tornam assim)

($\mathcal{J}_x^* = \mathcal{J}_x$ pois suas entradas são reais)

$(J_x)^+ = (J_x^*)^t = (-i)^* (\mathcal{J}_x)^t = i \cdot (-\mathcal{J}_x) = -i\mathcal{J}_x = J_x$

$\mathcal{J}_x^t = -\mathcal{J}_x$

$\Rightarrow (J_x)^+ = J_x$ e J_x é operador hermitiano

Álgebra de SO(3)

$[J_i, J_j] = i \cdot \epsilon_{ijk} J_k$

$(i,j,k = x,y,z)$

i: unidade imaginária

ϵ_{ijk}: tensor de Levi-Civita

$\epsilon_{ijk} = 1$

permutações pares de $\epsilon_{ijk} = 1$

permutações ímpares de $\epsilon_{ijk} = -1$

índices repetidos $\epsilon_{ijk} = 0$

$+$: ~~comp~~ transposto do complexo conjugado

Matrizes Hermitianas: $A^+ = A$

$\epsilon_{ijk} J_k = \sum_{k=x,y,z} \epsilon_{ijk} J_k$ k é dummy index

$[J_i, J_j] = \underbrace{J_i J_j}_{} - \underbrace{J_j J_i}_{}$

1º rotaciona ao redor do eixo j e depois, do eixo i subtraído da rotação ao redor do eixo i e depois do eixo j

Ex: $[J_x, J_y] = i \epsilon_{xyk} J_k = i \sum_{k=x,y,z} \epsilon_{xyk} J_k = i \epsilon_{xyz} J_z = i J_z$

$[J_y, J_z] = i \epsilon_{yzx} J_x = i J_x$

$[J_x, J_z] = i \epsilon_{xzy} J_y = -i J_y$

$[J_i, J_j]^+ = (i \epsilon_{ijk} J_k)^+ = \overset{-i}{i^+} \epsilon_{ijk} \overset{J_k}{J_k^+} = -i J_k \overset{-iJ_k}{=}$

$(J_i J_j - J_j J_i)^+ = (J_j^+ J_i^+ - J_i^+ J_j^+) = (J_j J_i - J_i J_j) = -[J_j, J_i]$

obs: $[A,B] = -[B,A]$

Álgebra de SO(D)

obs: rotações 2-D (SO(2))

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $[J, J] = 0 \Rightarrow$ comuta

a álgebra de SO(2) é abeliana

$i,j = 1,2,\ldots,D$ índice da matriz

$J^{i,j}_{(mn)} = -i(\delta^{mi}\delta^{nj} - \delta^{mj}\delta^{ni})$

↳ etiqueta da matriz $m,n = 1,2,\ldots,D \Rightarrow \frac{D(D-1)}{2}$ possíveis etiquetas

$J(m,n) = -J(n,m)$

p/ $D=3$ $\frac{3.2}{2} = 3$ posso identificar cada dimensão de $\mathbb{R}^3$ com um gerador de rotações

$J_{(12)} = J_z, \; J_{(13)} = J_y, \; J_{(23)} = J_x$

$J^{ij}_{(mn)}$ são os geradores das matrizes antissimétricas d-dimensionais

p/ $D=2$ $\quad \frac{2.1}{2} = 1$ etiqueta

$D=4$ $\quad \frac{4.3}{2} = 6$ etiquetas

$$[J_{(mn)}, J_{(pq)}] = i\left(\delta_{mp} J_{(nq)} + \delta_{nq} J_{(mp)} - \delta_{np} J_{(mq)} - \delta_{mq} J_{(np)}\right)$$

álgebra de SO(D)

vetor de SO(D)

$$x^i \to x^{i'} = R^{ij} x^j = \sum_{j=1}^{D} R^{ij} x^j$$

$$R \in SO(D)$$

Tensor de SO(D)

$$T^{ij} \to (T^{ij})' = \underbrace{R^{ik} R^{jl} T^{kl}}_{\text{regra de transformação}} = \sum_{k=1}^{D} \sum_{l=1}^{D} R^{ik} R^{jl} T^{kl}$$

tensor de rank 2

tensor de rank 3 : $W^{ijk} \to (W^{ijk})' = R^{ia} R^{jb} R^{kc} W^{abc}$

Vetor : $V^i \to (V^i)' = R^{ij} V^j$

construir tensor : atuar com as derivadas

regra da cadeia

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \to \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)' = \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^k} = R^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$dx^i \to R^{ij} dx^j = (dx^i)'$$

$$W^{ij} = \frac{\partial (V^i)}{\partial x^j} \to R^{ik} R^{jl} W^{kl}$$

$$W^{ij}(x) \to \left(W^{ij}(x)\right)' \equiv \frac{\partial V'^{i}(x')}{\partial x'^{j}}$$ parte do vetor

$$(x^i \to x'^i = R^{ij}x^j)$$ parte da derivada $$= R^{jk}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(R^{il}V^l(x)\right)$$

$\frac{\partial (R^{il})}{\partial x^k} = 0$ pois é constante no espaço (falso em espaço-tempo curvo) $\frac{\partial R}{\partial x^k} \neq 0$

recupera a operação definindo a derivada covariante

$$\ldots = R^{jk}R^{il}\frac{\partial V^l(x)}{\partial x^k} = \sum_{l,k=1}^{D} R^{jk}R^{il}W^{lk}$$

$$\frac{\partial V^l(x)}{\partial x^k} \equiv W^{lk}(x)$$

$\frac{\partial}{\partial x^k} \equiv \partial_k$ se transforma como vetor

Representações

T^{ij} $\quad i,j = 1,2,3$

$$\begin{matrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{matrix}$$

$T^{ij} \to (T^{ij})' = R^{ik}R^{jl}T^{kl}$

transformação linear em T^{ij}

Pode-se representar $R^{ik}R^{jl}T^{kl}$ como uma matriz $D(R)$ 9×9 atuando sobre

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ \vdots \\ T_{32} \\ T_{33} \end{pmatrix}_{9\times 1}$$ não é um vetor

$D(R)$ é uma representação tensorial de $SO(3)$ 9-dimensional

Vetor é a representação fundamental de $SO(3)$

$$\sum_{k,l}\sum R^{ik}R^{jl}T^{kl} - \sum_{l,k}\sum R^{ik}R^{jl}T^{lk} = \sum_{l,k}\sum R^{ik}R^{jl}(T^{kl}-T^{lk}) = R^{ik}R^{jl}A^{kl}$$

$$T^{11} \to (T^{11})' = R^{1k}R^{1l}T^{kl}$$
$$= R^{1k}(R^{11}T^{k1} + R^{12}T^{k2} + R^{13}T^{k3})$$
$$= R^{11}R^{11}T^{11} + R^{11}R^{12}T^{12} + \dots$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} T_{11}' \\ \vdots \\ T_{33}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{11}R^{11} & R^{11}R^{12} & \dots \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{11} \\ \vdots \\ T_{33} \end{pmatrix}$$

Redutível vs irredutível

$A^{ij} = T^{ij} - T^{ji}$ parte assimétrica de T^{ij}

$A^{ij} = -A^{ji}$

$$A^{ij} \to (A^{ij})' = (T^{ij})' - (T^{ji})' = R^{ik}R^{jl}T^{kl} - R^{jl}R^{ik}T^{lk} = \dots$$

$$\dots = R^{ik}R^{jl}\underbrace{(T^{kl}-T^{lk})}_{A^{kl}}$$

$S_{ij} = T^{ij} + T^{ji}$

$$\left(T^{ji} = \frac{S^{ji} + A^{ji}}{2}\right)$$

Mostre que $S^{ij} \to (S^{ij})' = R^{ik}R^{jl}S^{kl}$

$S^{ii} = S^{11} + S^{22} + S^{33}$

$(S^{ii})' = R^{ik}R^{il}S^{kl} = (R^{ki})^{T}R^{il}S^{kl} = \delta^{kl}S^{kl} = S^{kk} = S^{ii}$

p/ $D=3$ $\quad 9 \to 1 + 3 + 5$

traço $\quad A_{ij} \quad S_{ij}$ - traço

$$\underset{9\times 9}{D(R)} = \begin{pmatrix} 3\times 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1\times 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5\times 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{13} \\ A_{23} \\ \text{traço} \\ S_{11} - \text{traço} \\ S_{12} - \text{traço} \end{pmatrix}$$

"não se mistura"

o tensor pode ser gerado pelas suas partes simétrica, antissimétrica e traço