/ /

25/02

T^{ij} tensor de rank 2

$i,j = 1, 2, \ldots, D$

$$T^{ij} = \begin{cases} A^{ij} = T^{ij} - T^{ji} & D(D-1)/2 \text{ termos} \\ S = S^{ii} = \sum_{i=1}^{D} S^{ii} & 1 \text{ termos} \\ \tilde{S}^{ij} = \underbrace{(T^{ij} + T^{ji})}_{\equiv S^{ij}} - \frac{\delta^{ij} S}{D} & D(D+1)/2 - 1 \text{ termos} \end{cases}$$

$$\frac{D(D-1)}{2} \oplus 1 \oplus \frac{D(D+1)}{2}$$

↳ soma direta de termos que não se misturam

$\tilde{S}^{ij}$ não tem traço

$$\sum_{i,j}\sum \delta^{ij} \tilde{S}^{ij} = \sum_i \tilde{S}^{ii} = \tilde{S}^{ii}$$ ↗ notação de Einstein

$$\sum_{i,j}\sum \delta^{ij} \left(S^{ij} - \frac{\delta^{ij} S}{D} \right) = S^{ii} - \frac{\delta^{ij}\delta^{ij} S}{D} = S - \frac{D S}{D} = 0$$

Subgrupos

$SO(2) \subset SO(3)$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \end{array}$$

matriz em SO(3) que rotaciona apenas no plano xy.

V^i $i = 1, 2, 3$ vetor de SO(3)

$(V^1, V^2)\, V^3 \to$ escalar sob SO(2) (não se transforma)

↳ se transforma sob SO(2)

T^{ij} : A^{ij} $\quad 3 = 2 \oplus 1$ → singletos (ñ se transformam sob SO(2))

S^{ij} $\quad 5 = \underbrace{2 \oplus 2}_{\text{dois dupletos}} \oplus 1$

$\tilde{S}^{ij}$: $\tilde{S}^{11} + \tilde{S}^{12} + \tilde{S}^{13} + \tilde{S}^{22} + \tilde{S}^{23}, \tilde{S}^{33}$

$\tilde{S}^{11} + \tilde{S}^{22} + \tilde{S}^{33} = 0$ (pois $\tilde{S}$ não contém traço)

Sob SO(2)

$V^3 \to (V^3)' = V^3$ (V^3 não se transforma sob SO(2))

$\Rightarrow R^{33} = 1$

$R^{13} = R^{23} = 0$ (mas $R^{13} = R^{31} = 0$ e $R^{23} = R^{32} = 0$)

Os dois dupletos são: $(\tilde{S}^{13}, \tilde{S}^{23})$ e $(\tilde{S}^{12}, \tilde{S}^{11} - \tilde{S}^{22})$

mostrar isso!

$\tilde{S}^{12} + \tilde{S}^{22} = -\tilde{S}^{33}$, mas este não se transforma sob SO(2)

Tensores invariantes

δ^{ij} $\quad \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_D}$ $\begin{cases} D=2: \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1 \\ D=3: \epsilon_{123} = -\epsilon_{321} = \epsilon_{231} = 1 \\ \vdots \end{cases}$

*) $R^T R = \mathbb{1}$

$\delta^{ij} \to (\delta^{ij})' = R^{ik} R^{jl} \delta^{kl} = R^{ik} R^{jk} = R^{jk} R^{ik} = R^{jk} (R^T)^{ki}$
$= (RR^T)^{ji} = \delta^{ji} = \delta^{ij}$

portanto $(\delta^{ij})' = \delta^{ij}$

*) $\epsilon^{\overbrace{ijk \dots n}^{D \text{ índices}}}$

obs: $\det R = \epsilon^{ijk \dots n} R^{i1} R^{j2} R^{k3} \dots R^{nD}$

$D=2 \quad \begin{vmatrix} R^{11} & R^{12} \\ R^{21} & R^{22} \end{vmatrix} = R^{11} R^{22} - R^{12} R^{21} = \epsilon^{12} R^{11} R^{22} + \epsilon^{21} R^{12} R^{21}$

$\epsilon^{ij} R^{ip} R^{jq} = \epsilon^{pq}$

$p,q=1$

$\epsilon^{ij} R^{i1} R^{j1} = \overset{+1}{\epsilon^{12}} R^{11} R^{21} + \overset{-1}{\epsilon^{21}} R^{21} R^{11} = 0$

*) $\sum_k \epsilon^{ijk} \epsilon^{lnk} = \delta^{il}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jl}$

parte simétrica

*) $S^{ij} A^{ij} = 0$ parte antissimétrica

~~$\Rightarrow S^{ji} A^{ji} = 0$ mas $A^{ji} = -A^{ij}$, então~~

~~$S^{ji} A^{ij} = S^{ij} A^{ij}$ e $S^{ji} = S^{ij}$~~

~~então $S^{ij} A^{ij} = S^{ij} A^{ij}$~~

~~$\Rightarrow S^{ij} A^{ij}$~~

$S^{ij} A^{ij} = S^{ji} A^{ji} = S^{ij}(-A^{ij}) = -S^{ij} A^{ij}$

$\Rightarrow S^{ij} A^{ij} = 0$

Troca de coordenadas

1) Espaço euclideano 2D

$P = (x,y)$ $\qquad d(P,Q) = dx^2 + dy^2 \equiv ds^2$

$Q = (x+dx, y+dy)$

distância infinitesimal

2) em polares (r,θ)

$x = r\cos\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$

$y = r\sin\theta \qquad dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$

$dx^2 + dy^2 = ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$

3) Coordenadas genéricas

$x = f(u,v) \qquad (x,y) \mapsto (u,v)$

$y = g(u,v)$

$$f_v \equiv \frac{\partial f}{\partial v}$$

pela regra da cadeia

$$dx = f_u\, du + f_v\, dv$$
$$dy = g_u\, du + g_v\, dv$$

$$dx^2 + dy^2 = (f_u^2 + g_u^2)\, du^2 + (f_v^2 + g_v^2)\, dv^2 + 2(f_u f_v + g_u g_v)\, du\, dv$$

tem termos mistos

No caso 3D: 1) coordenadas esféricas

$$(x, y, z) \mapsto (r, \theta, \varphi)$$

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, dz^2$$
$$y = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

Usando notação d letras gregas 1) ~~Plano~~ coord. cartesianas

$$x^\mu = (x^1, \dots, x^D)$$

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^{D} (dx^\mu)^2 = dx^1 . dx^1 + dx^2 dx^2 + \dots + dx^D dx^D$$

$$= \sum_{\mu=1}^{D} \sum_{\nu=1}^{D} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

onde $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}_{D\times D} = \delta^{\mu\nu}$ "métrica"

Até então era arbitrário escrever os índices em cima ou embaixo (dx^μ ou dx_μ), mas agora a convenção é escrever um em cima e outro embaixo.
índices contraídos

2) Coord. esféricas 3D (ds^2: elemento de linha)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\varphi\, d\varphi^2$$

/ /

$x^\mu = (r, \theta, \varphi)$

$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$

com $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\varphi$

$\underbrace{g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}}_{\text{simétrico}}$, $g_{r\theta} = g_{\theta r} = g_{r\varphi} = g_{\varphi r} = g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

$g_{\mu\nu}$ depende das coordenadas: suas entradas dependem de r ou φ.

obs: se $r = a$ (casca esférica de raio a e centro na origem)

$dr = 0$ e a métrica nessa esfera:

$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\varphi\, d\varphi^2)$

↳ mede as distâncias na esfera

2-esfera ($\equiv S^2$, está embutida em R^3)

↳ cada ponto na esfera é identificado com (θ, φ)

Dado um espaço com métrica $g_{\mu\nu}(x)$, como posso saber se o espaço é plano (como R^3) ou curvo (como S^2)

$dj^2 = (1+u^2)\,du^2 + (1+4v^2)\,dv^2 + 2(2v-u)\,du\,dv$

$ds^2 = (1+u^2)\,du^2 + (1+2v^2)\,dv^2 + 2(2v-u)\,du\,dv$

Uma métrica é de espaço plano e a outra possui uma singularidade.

⇒ é necessário um conceito que independa do sistema de coordenadas utilizado (= curvatura)

tilibra

Espaço plano: a distância entre dois pontos é invariante por translações

Ex) Semi-plano de Poincaré

$y>0$ e $ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\to \tilde{x}_1 = x_1 + \Delta x \\ x_2 &\to \tilde{x}_2 = x_2 + \Delta x \end{aligned}\right\} \quad d\tilde{x} = dx = x_2 - x_1 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1$$

a métrica é invariante por translações no eixo Ox

mas não é por translações no eixo Oy por causa do fator $1/y^2$ no elemento de linha.

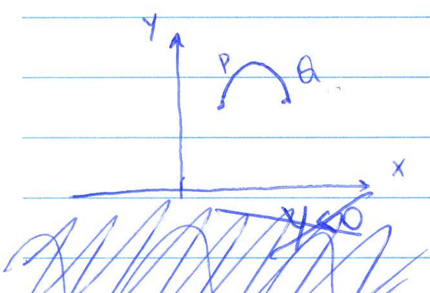
A distância de um ponto do eixo Oy à origem (um limite, dado que a origem não está no semi-plano)

$$dx = 0$$

$$s = \int ds = \int_{0^+}^{y^*} \frac{dy}{y} = \log|y| \Big|_{0^+}^{y^*} = \log\left|\frac{y^*}{0^+}\right| \to \infty$$

quando $0^+ \to 0$

Qual a menor distância entre os dois pontos (geodésica)?



$ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$ ao subir, $y\uparrow$ e $ds\downarrow$

Disco de Poincaré: plano hiperbólico

/ /

(métrica de Kerr)

Ex: espaço plano em coord. de Boyer-Lindquist

$$\begin{cases} x = f(r)\sin\theta\cos\varphi \\ y = f(r)\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad f' \equiv \frac{df}{dr}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (f'^2\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,dr^2 + (f'^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\,d\theta^2 + f^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 + 2(ff'-r)\sin\theta\cos\theta\,dr\,d\theta$$

quero que a métrica seja diagonal

$$\Rightarrow ff' - r = 0 \Rightarrow f^2(r) = r^2 + K$$

$$f\,df = r\,dr$$

$$\int f\,df = \int r\,dr \Leftrightarrow \frac{f^2}{2} = \frac{r^2}{2} + C \quad \therefore f^2 = r^2 + K$$

$$ds^2 = \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 + a^2}\,dr^2 + (r^2 + a^2\cos^2\theta)\,d\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta\,d\varphi^2$$

r constante $\Rightarrow ds^2$ é um elipsoide

$r = 0$ não é um ponto, mas um disco de raio a

$$ds^2 = a^2\cos^2\theta\,d\theta^2 + a^2\sin^2\theta\,d\varphi^2$$

tilibra