/ /

29/02

Métrica de Poincaré: $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$

o espaço não é plano e a métrica não é invariante por translação na coordenada y

R^3: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$
também não é invariante por translação $(r \to r+a)$
mas o espaço é plano

→ vetores de Killing: relacionados à isometrias (transformações que preservam a métrica)

Transformações gerais de coordenadas
$x^\mu \to x'^\mu$

Ex: $(x, y) \to (r, \theta)$
$x = r\cos\theta$
$\underbrace{y = r\sin\theta}_{\text{não linear em } \theta}$

mas as transformações infinitesimais são lineares
$dx = \cos\theta \, dr - r\sin\theta \, d\theta$
$dy = \sin\theta \, dr + r\cos\theta \, d\theta$
lineares em dr e dθ

$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\nu$ caso geral: $dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$

ou $dx'^\mu = \partial_\nu x'^\mu dx^\nu$
$\equiv S^\mu_\nu(x)$

$\to$ generaliza vetores (rotação é um caso especial)

relação linear: $dx'^{\mu} = S_{\nu}^{\mu}(x)\, dx^{\nu}$

é bom que a transformação seja inversível:

$$dx^{\mu} = \partial_{\nu} x^{\mu}\, dx'^{\nu}$$
$$= S^{-1}{}_{\nu}^{\mu}\, dx'^{\nu}$$

$S^{\mu}_{\nu}(x)$ é uma generalização de $dx'^{\mu} = R^{\mu}_{\nu}\, dx^{\nu}$ que depende de x

$$(S^{-1})^{\mu}_{\rho}\, S^{\rho}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \cdot \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

Ex: $dx'^{1} = dr = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$dx'^{2} = d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

$$S^{1}_{1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad S^{1}_{2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$S^{2}_{1} = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad S^{2}_{2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

E a métrica?

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\rho\theta}(x')\, dx'^{\rho} dx'^{\theta}$$

é o mesmo ponto P em coord. $\neq$ (x^{μ} e x'^{ρ})

trocando dx^{μ} por $S^{-1}{}^{\mu}_{\rho}\, dx'^{\rho}$

temos que

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, S^{-1}{}^{\mu}_{\rho}\, dx'^{\rho}\, S^{-1}{}^{\nu}_{\theta}\, dx'^{\theta} = g_{\rho\theta}(x')\, dx'^{\rho} dx'^{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad g_{\rho\theta}(x') = g_{\mu\nu}\, S^{-1}{}^{\mu}_{\rho}\, S^{-1}{}^{\nu}_{\theta}$$

tilibra

$x^\mu \to x'^\mu$

índice alto transforma como S

índice baixo : S^{-1}

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \partial_\mu x^\nu \partial_\nu = (S^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$$

vetor sob transf. geral de coordenada

transformação da métrica na forma matricial

$$g'_{\rho\theta}(x') = g_{\mu\nu}(x)(S^{-1})^\mu{}_\rho (S^{-1})^\nu{}_\theta$$
$$= (S^{-1})^\mu{}_\rho\, g_{\mu\nu}(x)(S^{-1})^\nu{}_\theta$$
$$= ((S^{-1})^T)_\rho{}^\mu\, g_{\mu\nu}(x)\,(S^{-1})^\nu{}_\theta$$

$$g'(x') = (S^{-1})^T g(x)\, S^{-1}$$

* $R^T R = \mathbb{1}$

$\Leftrightarrow \mathbb{1} = R^T \mathbb{1} R$

uma rotação é uma transf. geral de coord. que deixa a métrica euclidiana ($\mathbb{1}$) invariante

métrica inversa

$$\underset{(g^{-1})^{\mu\nu}}{\underset{\shortparallel}{g^{\mu\nu}}} g_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\rho$$

$$g'^{\mu\nu}(x') = S^\mu{}_\rho S^\nu{}_\theta\, g^{\rho\theta}(x)$$

$$R^{i}{}_{j} = R^{ij} \qquad (R^{i}{}_{j})^T = R^{j}{}_{i}$$

1º, 2º

/ /

Escalares, vetores e tensores sob transf. gerais de coordenadas

vetor contra-variante

$$W'^{\mu}(x') = S^{\mu}{}_{\nu}(x)\, W^{\nu}(x)$$

vetor covariante

$$W'_{\mu}(x') = W_{\rho}(x)\,(S^{-1})^{\rho}{}_{\mu}$$

escalar : $\phi'(x') = \phi(x)$

$$V'_{\mu}(x')\, W'^{\mu}(x') = W_{\rho}(x)\,(S^{-1})^{\rho}{}_{\mu}\, S^{\mu}{}_{\nu}\, W^{\nu}(x) =$$
$$\delta^{\rho}{}_{\nu}\, W_{\rho}(x)\, W^{\nu}(x) = W_{\rho}(x)\, W^{\rho}(x)$$

Abaixar / subir índices

$$W^{\nu} \rightarrow W_{\mu} = g_{\mu\nu} W^{\nu}$$
$$V_{\mu} \rightarrow V^{\mu} = g^{\mu\nu} W_{\nu}$$

Mostrar que
$$\begin{cases} V'_{\mu} = V_{\rho}\,(S^{-1})^{\rho}{}_{\mu} \\ V'_{\mu} = g'_{\mu\nu}\, W'^{\nu} \end{cases}$$

Ex) $g_{\mu\rho} A^{\rho} = B_{\mu}$

$$g^{\sigma\mu} g_{\mu\rho} A^{\rho} = g^{\sigma\mu} B_{\mu}$$
$$\Leftrightarrow \delta^{\sigma}{}_{\rho} A^{\rho} = g^{\sigma\mu} B_{\mu}$$
$$\Rightarrow A^{\rho} = g^{\rho\mu} B_{\mu}$$

/ /

Área e volume

$d^D x$ não se transforma apropriadamente sob uma TGC $x^\mu \to x'^\mu$

Ex: $dx\,dy\,dz \neq dr\,d\theta\,d\rho$

precisamos de um determinante Jacobiano

$$d^D x = d^D x' \, J$$

$$J = \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}\right)$$

$$\det\left(g'_{\rho\sigma}(x') = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}\right)$$

$$\det g'_{\rho\sigma}(x') = g' = g \cdot J \cdot J$$

$$g' = g J^2$$

elemento próprio de volume (é invariante)

$$d^D x \sqrt{g} = d^D x' \cdot J \cdot \frac{\sqrt{g'}}{J} = d^D x' \cdot \sqrt{g'}$$

$dx\,dy\,dz$: $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det g_{\mu\nu} = 1$

$g_{\rho\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$ $\det g_{\rho\theta} = r^4 \sin^2\theta$

$$dx\,dy\,dz \cdot \sqrt{1} = dr\,d\theta\,dz \cdot \sqrt{r^4 \cdot \sin^2\theta}$$

Divergência e Laplaciano

$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ e $\vec{\nabla}^2\phi$ (são escalares)

* $\partial_\mu W^\mu$ não é divergência pois não é escalar

$$\partial_\mu W^\mu \to \partial'_\mu W'^\mu = \underbrace{(S^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu}_{\partial_\mu'} \underbrace{(S^\mu{}_\rho W^\rho)}_{W'^\mu} =$$

$$(S^{-1})^\nu{}_\mu (\partial_\nu S^\mu{}_\rho) W^\rho + \underbrace{(S^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu W^\rho S^\mu{}_\rho}_{\delta^\nu{}_\rho}$$

$$= \partial_\rho W^\rho + \underbrace{(S^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu S^\mu{}_\rho W^\rho}_{\neq 0 \text{ p/ t.f.c}}$$

é necessário mudar a definição de divergência

truque: $I = \int \underbrace{d^D x \sqrt{g}}_{\text{escalar}} \underbrace{W^\mu(x)\partial_\mu \phi(x)}_{\text{escalar}}$ (HW)

$\Rightarrow$ escalar

int. por partes

$$I = -\int d^D x\, \partial_\mu(\sqrt{g} W^\mu(x))\phi(x)$$

perdi a demonstração

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g} W^\mu) \equiv D_\mu W^\mu$$

ex: coord. esférica

$$D_\mu W^\mu = \frac{\partial_\mu \sqrt{g}}{\sqrt{g}} W^\mu + \partial_\mu W^\mu = \partial_r W^r + \partial_\theta W^\theta + \partial_\varphi W^\varphi +$$
$$2/r\, W^r + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} W^\theta$$

tilibra

*) Laplaciano

truque

$$\int \underbrace{d^D x \sqrt{g}}_{\text{escalar}} \; g^{\mu\nu} \underbrace{\partial_\mu \phi \, \partial_\nu \phi}_{\text{escalar (HW)}}$$

$$= - \int d^D x \sqrt{g} \, \frac{\partial_\mu \left(\sqrt{g} \, g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right)}{\sqrt{g}} \; + \text{termos de superfície}$$

$$D^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \left(\sqrt{g} \, g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right)$$