/ /

*) Laplaciano

truque

$$\int \underbrace{d^D x \sqrt{g}}_{\text{escalar}} \underbrace{g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}_{\text{escalar (HW)}}$$

$$= - \int d^D x \sqrt{g} \frac{\partial_\mu}{\sqrt{g}} (\sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \text{termos de superfície}$$

$$D^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi)$$

02/03

Espaços curvos

numa esfera de raio L e centro na origem:

$x^2 + y^2 + z^2 = L^2$ $\to$ $z = \pm\sqrt{L^2 - x^2 - y^2}$ (sinal consistente c/ polo sul: $-$)

↳ no polo sul $x = y = 0$ e $z = -L$

$z \to z + L$: polo sul no plano $z = 0$

$z = -\sqrt{L^2 - x^2 - y^2} + L$

localmente, perto do polo sul S: $(x, y) \simeq (0, 0)$

$$z \simeq -L\left(\cancel{1} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{L^2}\right) \cancel{+L} = \frac{1}{2L}(x^2 + y^2)$$

$$z \simeq \frac{1}{2} a x^2 + \frac{1}{2} b y^2 + \frac{1}{2} c x y \quad \text{no qual}$$

$[a] = [b] = [c] = L^{-1}$ ($+ L$ raio)

não tem termos de grau 1 pois S é ~~mínimo~~ extremo

$$dz = (ax+cy)dx + (by+cx)dy$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + [(ax+cy)dx + (by+cx)dy]^2$$
$$ds^2 = g_{xx}\,dx^2 + g_{yy}dy^2 + 2g_{xy}\,dx\,dy$$

c/ $g_{xx} = 1+(ax+cy)^2$ $\quad g_{xy} = (ax+cy)(by+cx)$
$g_{yy} = 1+(by+cx)^2$

$$z \simeq \frac{1}{2}\vec{x}^T M \vec{x} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{pmatrix} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

localmente o espaço é plano

O espaço ser curvo ou plano é mais fundamental que o sistema de coordenadas usado p/ descrevê-lo ⇒ deve existir alguma informação invariante

Ex: a curvatura deve ser invariante por rotações
$$\vec{x} \to \vec{x}' = R\vec{x}$$
$$z \to z' = \frac{1}{2}\vec{x}'\underbrace{R^T M R}_{\equiv M'}\vec{x}$$

Se a curvatura estiver escondida em M, então ela deve ser invariante por rotação (deve ser a mesma p/ M e M')

↳ traço e determinante

Diagonalizar M

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

$$z = \frac{1}{2} \vec{x}'^{T} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \vec{x}' = \frac{1}{2} (u \ \ \vartheta) \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \mu u^2 + \frac{1}{2} \nu \vartheta^2$$

$*$ $\det M = ab - c^2 = \mu\nu$

$*$ $\frac{(\mathrm{tr}\, M)^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(\mu+\nu)^2}{4}$

} independem do sistema de coordenada

$\det M \Rightarrow$ curvatura intrínseca

$\frac{(\mathrm{tr}\, M)^2}{4} \Rightarrow$ curvatura extrínseca

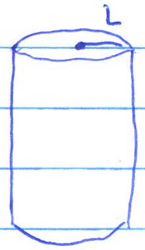
Ex: esfera

$a = b = 1/L \quad c = 0$

$\det M = 1/L^2$

$\frac{(\mathrm{tr}\, M)^2}{4} = 1/L^2$

Ex: um cilindro tem curvatura ~~intrínseca~~ extrínseca, mas não intrínseca



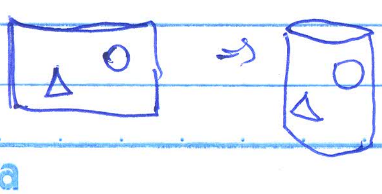
$z = -\sqrt{L^2 - x^2} + L$

$z = z(x)$ independe de y

$\Rightarrow b = c = 0, \ a \neq 0$

$\det M = 0 \quad \frac{1}{4} \mathrm{tr}(M) = \frac{a^2}{4} \neq 0$

o que isso significa?

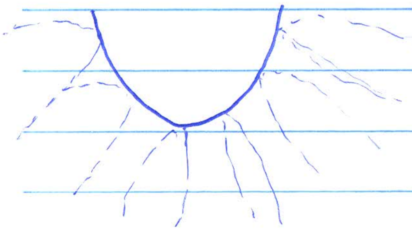


não muda ângulos e tamanhos

o que é falso ao planificar uma esfera, por exemplo (ela possui curvatura intrínseca)

esfera: curvatura constante e positiva
$a^2 > 0$

curvatura negativa e constante



$\mu = -\nu$
$z = \frac{1}{2}\mu u^2 - \frac{1}{2}\mu v^2$
$\det M = -\mu^2 < 0$

"embedding"
$(x^1, \dots, x^D) \to X^A(x_1, \dots, x_D)$
$A = 1, 2, \dots, \cancel{N}$

Ex: $S^2 \to \mathbb{R}^3$
$(x_1, x_2) = (\theta, \varphi)$
$(X^1, X^2, X^3) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$
$X^{1^2} + X^{2^2} + X^{3^2} = 1$

$$ds^2 = \sum_A dX^{2A} = \sum_A \frac{\partial X^A}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^A}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_{\mu,\nu} \underbrace{\left(\sum_A \frac{\partial X^A}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^A}{\partial x^\nu}\right)}_{\text{métrica induzida } g_{\mu\nu}(X)} dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = \sum_{A,B} G_{AB}\, dX^A dX^B$$
métrica do espaço ambiente

Esfera: $S^2 \to \mathbb{R}^3$ (ambiente)

$$ds^2 = dX'^2 + dX^{2\,2} + dX^{3\,2}$$

Achar a métrica induzida

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = 1$$

$$X^3 dX^3 = -X^2 dX^2 - X^1 dX^1$$

$$dX^3 = -\frac{X^2 dX^2 + X^1 dX^1}{\sqrt{1-(X^2)^2-(X^1)^2}}$$

$$dS^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + \frac{(X^2 dX^2 + X^1 dX^1)^2}{1-(X^2)^2-(X^1)^2}$$

No geral "localmente plano"
(dimensão D)

$$g'_{\lambda\sigma}(x') = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}$$

$$g_{\mu\nu}(x) \simeq g_{\mu\nu}(0) + A_{\mu\nu\lambda} x^\lambda + B_{\mu\nu\rho\sigma} x^\rho x^\sigma + \dots$$

expandindo
perto de 0

$$x^\mu \simeq K^\mu{}_\nu x'^\nu + L^\mu{}_{\nu\lambda} x'^\nu x'^\lambda + M^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} x'^\nu x'^\lambda x'^\sigma + \dots$$

Quero que a transformação deixe

$$\begin{cases} g_{\mu\nu}(0) = \delta^\nu_\mu \\ A_{\mu\nu\lambda} = 0 \end{cases}$$

Não é possível, em geral, colocar $B_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = K^\mu{}_\nu + \frac{\partial}{\partial x^\nu}(L^\mu{}_{\nu\lambda} x'^\nu x'^\lambda) + \frac{\partial}{\partial x'^\nu}(M^\mu{}_{\rho\lambda\sigma} x'^\rho x'^\lambda x'^\sigma) + \dots$$

$$= K^\mu{}_\nu + 2L^\mu{}_{\nu\lambda} x'^\lambda + 3M^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} x'^\lambda x'^\sigma + \dots$$

simetrias de índices
(HW)

tilibra

$$\Rightarrow g'_{\lambda\sigma}(x') = (g_{\mu\nu}(0) + A_{\mu\nu\lambda} x^\lambda + B_{\mu\nu\lambda\sigma} x^\lambda x^\sigma + \dots)$$
$$(K^\mu{}_\lambda + 2\underbrace{L^\mu{}_{\lambda\rho} x'^\rho + \dots}_{*})(K^\nu{}_\sigma + 2\underbrace{L^\nu{}_{\sigma\xi} x'^\xi + \dots}_{**})$$

$x \to x'$

$$g'_{\lambda\sigma}(x') = (g_{\mu\nu}(0) + A_{\mu\nu\lambda} K^\lambda{}_\rho x'^\rho + B_{\mu\nu\lambda\sigma} K^\lambda{}_\rho K^\sigma{}_\xi x'^\rho x'^\xi + \dots)\cdot(*)\cdot(**)$$

$x' = 0$

$$g'_{\lambda\sigma}(0) = g_{\mu\nu}(0) \cdot K^\mu{}_\lambda K^\nu{}_\sigma$$

$K^\mu{}_\lambda$ tem D^2 componentes

$$g' = K^T g K$$

preciso usar $1/2\, D(D+1)$ componentes de $K^\mu{}_\lambda$ p/ colocar g de forma diagonal

$$\frac{D(D+1)}{2} : g \to \begin{pmatrix} g_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{DD} \end{pmatrix}$$

re-escalando os elementos : $x^i \to \dfrac{x^i}{g^{ii}}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} g_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{DD} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Sobraram $\frac{D(D-1)}{2}$ componentes de K que não usei
$\Rightarrow$ elementos que deixam $\delta_{\mu\nu}$ invariante por rotação,

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} + \tilde{A}_{\mu\nu\lambda} x'^\lambda + \dots$$

↳ novo $A_{\mu\nu\lambda}$ nas novas coordenadas com $K^\mu{}_\lambda$ fixado

$$\underbrace{K^\mu{}_\lambda}_{\llcorner} \cdot \underbrace{L^\mu{}_{\lambda\sigma}}_{\text{simétrica } (x'^\sigma x'^\lambda)}$$

\# de componentes de $\tilde{A}_{\mu\nu\lambda}$

$$\underset{\lambda}{D} \cdot \underbrace{D(D+1)/2}_{(\nu\mu)\text{ simétricos}} = \#\text{comp. de } L^\mu{}_{\lambda\sigma} \Rightarrow \text{ posso fixar } \tilde{A}_{\mu\nu\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} + B_{\mu\nu\lambda\sigma}\, x^\lambda x^\sigma + \dots$$
$$x^\mu = x'^\mu + M^\mu{}_{\nu\lambda\sigma}\, x'^\nu x'^\lambda x'^\sigma + \dots$$

$B_{\underbrace{\mu\nu}\underbrace{\lambda\sigma}}$: $\left(\frac{1}{2} D(D+1)\right)^2$

$M^\mu{}_{\underbrace{\nu\lambda\sigma}}$: $D \cdot \frac{D(D+1)(D+2)}{6}$

$$\left(\frac{D(D+1)}{2}\right)^2 - \frac{D^2(D+1)(D+2)}{6} = \frac{D^2(D+1)(D-1)}{12}$$

de componentes
de B que não podem ser removidas usando B

→ curvatura

$D=1$: 0

$D=2$: 1 $\quad$ $D=4$: 20

$D=3$: 6

Esquematicamente "$B \sim \partial^2 g + (\partial g)^2$"
curvatura tem a ver com as segundas derivadas de métrica.