

## Tensor energia-momento

1. Em um espaço-tempo curvo com métrica  $g_{\mu\nu}$ , a *field strength* do campo eletromagnético  $F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu$  obedece as equações de Maxwell  $D_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu$ . Cheque que as derivadas covariantes em  $F_{\mu\nu}$  podem ser substituídas por derivadas parciais ordinárias. Demonstre que  $D_\mu F_{\nu\rho} + D_\rho F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\rho\mu} = 0$  (identidades de Bianchi) e que as equações de Maxwell podem ser escritas também assim:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = -J^\nu .$$

2. O tensor energia-momento é dado agora por

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\sigma} F_\nu{}^\sigma - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} .$$

Compare com o exercício 5 da lista 3.

- a) Demonstre que, em ausência de cargas,  $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$  e que  $T^\mu{}_\mu = 0$ .  
b) Demonstre que a expressão acima pode ser obtida de

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{em}}{\delta g^{\mu\nu}} , \quad \mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} .$$

Cuidado para não esquecer as métricas escondidas na contração  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ !