Eletromagnetismo 2 – Lista 1

Potenciais retardados e radiação

1. Um fio infinito e fino com densidade de carga linear λ está orientado ao longo do eixo z. Encontre o campo elétrico E_r em um ponto P a uma distancia x_0 da origem no eixo x.

   A $t = 0$, uma corrente é ligada subitamente, com velocidade v na direção positiva do eixo z. Calcule $A_z(x_0, t)$, para $t > x_0/c$ e $t < x_0/c$.

   Usando a simetria cilíndrica, encontre $\mathbf{B}(\rho, t)$, quando $t \to \infty$. Esse resultado bate com o que a gente esperaria usando Biot-Savart?

2. **Linhas espectrais atómicas clássicas**

   Imaginemos que um átomo seja um elétron de massa m e carga e em um potencial de oscilador harmônico. Haja uma força de atrito e a equação do movimento do elétron seja dada por

   $$m\ddot{\mathbf{x}} + m\omega_0^2\mathbf{x} + \gamma\dot{\mathbf{x}} = 0\,.$$

   Vamos escolher $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ e $\dot{\mathbf{x}} = 0$ a $t = 0$. Qual é o moto do elétron para $t > 0$? Um elétron clássico executando esse moto vai emitir radiação. Determine a intensidade dessa radiação $I(\omega)$ em função de ω, assumindo $\gamma/m \ll \omega_0$. (Não importa a normalização absoluta, somente a dependencia em ω).

   Vamos impor agora $\gamma = 0$ e imaginemos que a única fonte de atrito seja a perda de energia devida à radiação (um efeito que foi ignorado no ponto acima). A energia U do oscilador decai como $U_0 e^{-\Gamma t}$. Calcule Γ (de novo, assumindo $\gamma/m \ll \omega_0$ e que em uma oscilação o elétron perda uma pequena fração de energia).

   Qual seria a espessura de uma linha espectral de 5000 Angstroms, usando o resultado acima? Quantas oscilações faz o életron enquanto perde metade da própria energia?

3. A equação do movimento de uma partícula de massa m e carga q em um campo eletromagnético é

   $$m\dot{\mathbf{v}} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) + \frac{2q^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}\,,$$

   onde o último termo é a força de reação de radiação. Derive esse termo.

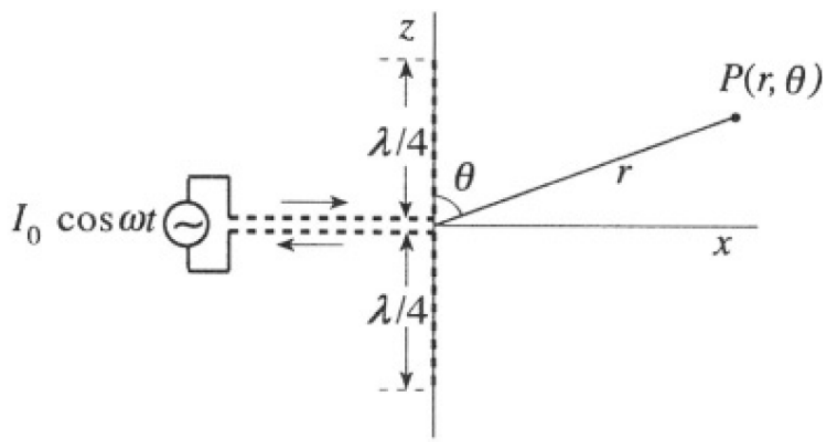
   Assumindo $v \ll c$ e que a força de reação de radiação seja pequena se comparada com a força de Lorentz, encontre uma expressão approximada para a força de reação de radiação em termos de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Com as mesmas approximações acima, calcule a força de reação de radiação media para um elétron livre inicialmente a repouso na origem e subjeto a uma onda eletromagnética que se propaga na direção z.

Derive de novo a mesma força de reação de radiação considerando o momento adquirido pelo elétron no processo. Pode ser útil usar a fórmula de espalhamento de Thomson:

$$\sigma = \frac{8\pi e^2}{3mc^2}\,.$$

4. Considere a antena na figura abaixo. A corrente é indicada com uma linha tratejada e é dada por $I(t) = I_0 \cos(2\pi z/\lambda)\cos(\omega t)$.



Encontre o potencial na zona de radiação (dica: pode complexificar a corrente: $\cos(\omega t) \to \exp(i\omega t)$).

Encontre os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Demonstre que a potencia media irradiada no ângulo sólida $d\Omega$ é

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{2\pi c}\frac{\cos^2((\pi/2)\cos\theta)}{\sin^2\theta}\,.$$

5. **Radiação Cherenkov**

A radiação Cherenkov é uma onda de choque causada por uma partícula carregada que viaja com uma velocidade v maior que a velocidade da luz c/n em um meio material com índice de refração n.

Demonstre que a onda de choque é emitida com um ângulo θ_c relativo à direção de propagação da partícula, dado por

$$\cos\theta_c = \frac{c}{nv}\,.$$

Demonstre que um espelho esférico com raio de curvatura R pode focalizar essa onda de choque em um anel no plano focal do espelho. Encontre o raio do anel.