Introdução à Relatividade Geral – Lista 2

Princípio variacional e geodésicas

1. Dada uma métrica da forma
$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} + A_{\mu\nu\lambda}x^{\lambda} + \dots\,,$$
determine explicitamente os $L^{\mu}_{\nu\lambda}$ em $x^{\mu} = x'^{\mu} + L^{\mu}_{\nu\lambda}x'^{\nu}x'^{\lambda} + \dots$ que cancelam os termos lineares em $A_{\mu\nu\lambda}$ na métrica acima.

2. A esfera S^2 em coordenadas esféricas é dada por
$$d\Omega_2^2 = a^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\,.$$
a) Calcule os símbolos de Christoffel 'by hand'.

   b) Prove que círculos máximos são geodésicas.

3. Prove que, se a métrica for diagonal, somente um termo dos três no lado direito de
$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}\right)$$
não é zero.

4. Encontre as geodésicas da semi-plano de Poincaré
$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}\,, \qquad y > 0\,,$$
usando o comprimento ℓ como parâmetro das curvas.

5. Considere a transformação $(x^1, x^2) = (x, y) \to (x'^1, x'^2) = (r, \theta)$ de coordenadas cartesianas para polares e, usando as propriedades de transformação dos símbolos de Christoffel, encontre $\Gamma^{r}_{\theta\theta}$ e $\Gamma^{\theta}_{r\theta}$.

6. Considere um oscilador harmônico de massa m e frequência ω ao longo da direção x.

   a) Escreva a ação para o oscilador entre $t_i = 0$ e t_f.

   b) Calcule a variação da ação $\Delta S = S[x + \delta x] - S[x]$, com $\delta x(0) = \delta x(t_f) = 0$, e ache as equações do movimento.

   c) Ache a solução mais geral para $\delta x(t)$ obedecendo às condições iniciais e finais $\delta x(0) = \delta x(t_f) = 0$. Esta solução vai ser uma superposição de variações de tipo $\delta_n x = \sin\left(\frac{\pi n}{t_f}t\right)$ com $n \in \mathbb{N}^+$.

   d) Demonstre que
$$\Delta S[\sum_n c_n\delta_n x] = \sum_n \Delta S[c_n\delta_n x]\,.$$
e) Ache as condições sobre t_f para que a solução clássica seja um *mínimo* da ação (ou seja, $\Delta S[\delta_n x] > 0$ para qualquer $n \geq 1$) e para que seja um *ponto de sela* da ação (ou seja, $\Delta S < 0$ para alguns n).