Eletromagnetismo I – Lista 3

Formulação covariante do eletromagnetismo

1. **Ginástica com o símbolo ϵ**
   Na segunda página de capa do Jackson há fórmulas de cálculo vetorial, tipo

   $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\,, \qquad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\,,$$

   etc. Demonstre essas fórmulas usando o símbolo ϵ_{ijk}. (Você vai precisar saber que $\vec{a} = \vec{b}\times\vec{c}$ nessa linguagem vira $a_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k$ – demonstre ou cheque isso!).

2. **Importante: transformações de Lorentz dos campos eletromagnéticos**
   Escreva como os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ se transformam sob um boost de Lorentz na direção x.

3. **Importante: caso de uma densidade linear de carga**
   Considere uma distribuição linear uniforme de carga, λ, ao longo da direção x. Veremos nas próximas semanas, ou talvez você já viu em Física III, que o campo elétrico generado por tal distribuição é

   $$\vec{E} \propto \frac{\lambda}{y^2+z^2}\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}\,.$$

   Para cargas estáticas o campo magnético é nulo: $\vec{B} = 0$. Descreva esse mesmo sistema do ponto de vista de um observador com velocidade v ao longo da direção x.

4. **Importante: caso de uma carga pontiforme**
   Faça a mesma coisa do exercício anterior para o caso de uma partícula estática de carga q, que produz um campo elétrico

   $$\vec{E} = \frac{q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\,.$$

   Descreva esse mesmo sistema do ponto de vista de um observador com velocidade v ao longo da direção x. Você vai achar que no novo referencial o campo elétrico não é mais isotrópico e que também vai ter um campo magnético.

5. Demonstre que, em ausência de cargas, o tensor

   $$T^{\mu\nu} = F^{\mu}{}_{\lambda}F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$$

   obedece $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Demonstre também que o traço é nulo, $T^\mu_\mu = 0$.

6. Demonstre que para o campo eletro-magnético a densidade Lagrangeana é dada por
$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)\,.$$
Demonstre também que, em ausência de partículas carregadas, a componente 00 do tensor acima é dada por
$$T^{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\,.$$
Veremos que esta é a densidade de energia do campo eletro-magnético. $T^{\mu\nu}$ é chamado de tensor de enrgia-momento.

7. Calcule explicitamente as componentes do tensor *dual*
$$\tilde{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\,.$$
Considere as equações de Maxwell sem fontes e descreva a dualidade que elas têm sob troca dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. O que acontece incluindo as fontes?

   Na sala nós consideramos $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e no exercício acima você escreveu essa combinação em termos de $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Faça o mesmo com $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$.

8. Escreva a relação entre os campos $\vec{E}(t,\vec{x})$ e $\vec{B}(t,\vec{x})$ e os potencias $V(t,\vec{x})$ e $\vec{A}(t,\vec{x})$. Demonstre que a transformação de calibre
$$V \to V - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\,, \qquad \vec{A} \to \vec{A} + \nabla\Lambda\,,$$
com $\Lambda(t,\vec{x})$ uma função escalar, deixa os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ invariantes.

9. Descreva o eletromagnétismo em 2+1 e em 4+1 dimensões.

10. **Opcional: um pouco de álgebra de Lorentz**
Escreva explicitamente os geradores de rotações e boosts em 3+1 dimensões. Dica: como feito na aula, considere transformações infinitesimais $T = 1 + A + O(A^2)$, onde A é o produto do parâmetro da transformação e do gerador. É útil, por razões que ficam claras estudando mecânica quântica, multiplicar os geradores por $-i$. Chamemos os geradores das rotações J_i e os dos boosts K_i (com $i = 1,2,3$ ou $i = x,y,z$).

    Verifique a álgebra de rotações $SO(3)$:
$$[J_i, J_j] \equiv J_iJ_j - J_jJ_i = i\epsilon_{ijk}J_k\,.$$
Verifique também a relação
$$[K_x, K_y] = -iJ_z\,.$$
Vemos então que dois boosts produzem uma rotação!

11. **Opcional e difícil: a contração de Inonu-Wigner**
Procure em algum livro – ou derive! – as álgebras de Lorentz+translações (juntas são também conhecidas como álgebra de Poincaré) e a álgebra de Galieo. Encontre um rescalamento dos geradores de Poincaré com fatores de c, tal que, quando $c \to \infty$, a álgebra de Poincaré se reduz à álgebra de Galileo.