Introdução à Relatividade Geral – Lista 4

Mais Relatividade Restrita e EM

1. Considere o espaço-tempo de Minkowski com as direções espaciais em coordenadas esféricas

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \qquad z = r\cos\theta\,.$$

Transforme agora as coordenadas (t, r) para as *coordenadas de Rindler* (ρ, T)

$$t = \rho\sinh T\,, \qquad r = \rho\cosh T\,, \qquad -\infty < T < \infty\,, \quad 0 \leq \rho < \infty\,.$$

Encontre $d\tau^2$ nessas coordenadas. Descreva as linhas com θ e φ constantes. Qual parte do espaço-tempo de Minkowski é coberta por essas coordenadas?

2. Considere um *boost* na direção x, seguido por um *boost* na direção y. Verifique explicitamente a relação

$$[K_x, K_y] = -iJ_z\,.$$

3. Em um espalhamento entre 2 partículas $p_1 + p_2 \to p_3 + p_4$ (com massas $p_a^2 = -m_a^2$, $a = 1, 2, 3, 4$) podemos formar três combinações invariantes de Lorentz (conhecidas como *variáveis de Mandelstam*)

$$s = (p_1 + p_2)^2\,, \qquad t = (p_1 - p_3)^2\,, \qquad u = (p_1 - p_4)^2\,.$$

Demonstre que somente duas delas são independentes.

4. Um próton com $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ colide elasticamente com um próton a repouso. Se os dois prótons ricocheteiam com a mesma energia, qual é o ângulo θ entre eles?

5. Demonstre que para o campo eletro-magnético a densidade Lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)\,.$$

Demonstre também que, em ausência de partículas carregadas, a componente 00 do tensor energia-momento é dada por

$$T^{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\,,$$

ou seja, é a densidade de energia do campo eletro-magnético.

6. Calcule explicitamente as componentes do tensor *dual*

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \, .$$

Considere as equações de Maxwell sem fontes e descreva a dualidade que elas têm sob troca dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. O que acontece incluindo as fontes?

Na sala nós consideramos $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Escreva essa combinação em termos de $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Faça o mesmo com $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$.

7. Escreva a relação entre os campos $\vec{E}(t,\vec{x})$ e $\vec{B}(t,\vec{x})$ e os potencias $V(t,\vec{x})$ e $\vec{A}(t,\vec{x})$. Demonstre que

$$V \to V - \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \, , \qquad \vec{A} \to \vec{A} + \nabla \epsilon \, ,$$

com $\epsilon(t,\vec{x})$ uma função escalar, deixam os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ invariantes.

8. Demonstre que, em ausência de cargas, o tensor

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu}_{\lambda}F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$$

obedece $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Demonstre também que o traço é nulo, $T^{\mu}_{\mu} = 0$.

9. *Crédito extra:* Descreva o eletromagnetismo em 2+1 e em 4+1 dimensões.