Introdução à Relatividade Geral – Lista 5

Mais EM e espaço-tempo curvo I

1. Demonstre que a divergência de um tensor é dada por

$$D_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda} \,.$$

2. Dada a derivada covariante $D_\nu W^\mu = \partial_\nu W^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} W^\lambda$, integre por partes a expressão

$$\int d^D x \, \sqrt{-g}\, T^\nu_\mu D_\nu W^\mu$$

para obter a divergência de T^ν_μ, e compare com o exercício acima.

3. Usando a definição explícita dos símbolos de Christoffel, demonstre que $D_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ e também que $D_\lambda g^{\mu\nu} = 0$. Em alguns livros estas equações são consideradas como a *definição* dos símbolos de Christoffel (que de consequência são chamados de *metric connection*). Usando $D_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ ache os símbolos de Christoffel para a esfera S^2.

4. Em um espaço-tempo curvo com métrica $g_{\mu\nu}$, a *field strength* do campo eletromagnético $F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu$ obedece as equações de Maxwell $D_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu$. Cheque que as derivadas covariantes em $F_{\mu\nu}$ podem ser substituidas por derivadas parciais ordinárias.

   Demonstre que $D_\mu F_{\nu\rho} + D_\rho F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\rho\mu} = 0$ (identidades de Bianchi) e que as equações de Maxwell podem ser escritas também assim:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = -J^\nu \,.$$

5. O tensor energia-momento é dado agora por

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\sigma} F_\nu{}^\sigma - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \,.$$

   Compare com o exercício 8 da lista 4.

   a) Demonstre que, em ausência de cargas, $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ e que $T^\mu_\mu = 0$.

   b) Demonstre que a expressão acima pode ser obtida de

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{em}}{\delta g^{\mu\nu}} \,, \qquad \mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,.$$

   Cuidado para não esquecer as métricas escondidas na contração $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$!