

## Espaço-tempo curvo II

1. Demonstre que, para uma métrica da forma  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + B_{\mu\nu\rho\sigma}x^\rho x^\sigma + \dots$ , o tensor de Riemann é dado por  $R_{1212} = 2B_{1212} - B_{1122} - B_{2211}$ .
2. Usando  $[D_\mu, D_\nu]S_\rho = -R^\sigma_{\rho\mu\nu}S_\sigma$ , calcule o tensor de Riemann da esfera  $S^2$ . Verifique o resultado usando o pacote RGTC.
3. Demonstre que

$$R_{\tau\rho\mu\nu} + R_{\tau\mu\nu\rho} + R_{\tau\nu\rho\mu} = 0,$$

e que isso dá  $d(d-1)(d-2)(d-3)/24$  vínculos.

4. Qual dos dois espaços

$$\begin{aligned} ds_a^2 &= (1+u^2)du^2 + (1+4v^2)dv^2 + 2(2v-u)du\,dv, \\ ds_b^2 &= (1+u^2)du^2 + (1+2v^2)dv^2 + 2(2v-u)du\,dv \end{aligned}$$

é plano e qual é curvo?

5. **O tensor de Weyl (ou conforme).**

O tensor de Weyl in  $d$  dimensões é dado por

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{g_{\mu\sigma}R_{\rho\nu} + g_{\nu\rho}R_{\sigma\mu} - g_{\mu\rho}R_{\sigma\nu} - g_{\nu\sigma}R_{\rho\mu}}{d-2} + \frac{(g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu})R}{(d-1)(d-2)}.$$

- a) Demonstre que  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$  tem as mesmas propriedades de simetria de  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  e, além disso, tem todos os traços nulos.
  - b) Demonstre que se duas métricas,  $g_{\mu\nu}$  e  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , são conformemente equivalentes, logo  $C^\mu_{\nu\rho\sigma} = \tilde{C}^\mu_{\nu\rho\sigma}$ . Como é o tensor de Weyl de uma métrica conformemente plana?
6. **Espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter.**

Usando o pacote RGTC, demonstre que

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - r^2\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} - r^2} - r^2 d\Omega_2^2$$

é uma solução de  $R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$ , quando  $\Lambda = 3$ . Imprima a planilha.

7. **AdS black holes in 5 dimensions**

Using the RGTC package verify that the following 5-dimensional metric

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{r_0^4}{L^2 r^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{r_0^4}{L^2 r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2$$

is a solution of the Einstein equations with cosmological constant  $\Lambda = -6/L^2$ . This is called an *AdS/Schwarzschild black hole* in global coordinates.