Eletrodinâmica de Born-Infeld (1934)

As equações de Maxwell que estudamos até agora são lineares nos campos. Em geral, é interessante considerar generalizações não-lineares, que se aplicam a vários contextos, do estudo da eletrodinâmica em meios materiais à teoria de cordas. Nesse exercício vamos considerar um exemplo de eletrodinâmica não-linear, a chamada *eletrodinâmica de Born-Infeld*.

O ponto de partida é procurar uma ação, que além de ser invariante de Lorentz e invariante de calibre, *i)* se reduza à ação de Maxwell para campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ pequenos e *ii)* apresente um valor máximo para o campo elétrico $\vec{E}$, quando $\vec{B}=0$. Vamos chamar esse valor máximo $E_{\max} \equiv b$. Uma consequência desse valor máximo para $\vec{E}$ vai ser que a auto-energia de cargas vai ser finita (diferentemente do que acontece na eletrodinâmica de Maxwell).

1. Entenda como surge o limite $v \leq c$ para as velocidades do ponto de vista da ação de uma partícula relativistíca. Dica: isso tem a ver com a raiz quadrada na ação.

2. Inspirados pelo ponto 1., consideremos uma ação[1] com raiz quadrada:

   $$\mathcal{L} = -b^2\sqrt{1-\frac{2s}{b^2}} + b^2\,, \qquad s \equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,.$$

   Essa ação é obviamente invariante de Lorentz e de calibre (por quê?).

   Demonstre também que $E \leq b$ para $B=0$. Dica: expresse s em termos de $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

   Demonstre que para campos pequenos, ou seja $s \ll b^2$, essa ação se reduz à ação de Maxwell, $\mathcal{L}=s$.

3. Generalizemos a ação acima incluindo $p \equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ da seguinte maneira:

   $$\mathcal{L}_{\rm BI} = -b^2\sqrt{1-\frac{2s}{b^2}-\frac{p^2}{b^4}} + b^2\,.$$

   Essa ação é chamada de Born-Infeld.

   Relembre que p é também invariante de Lorentz e de calibre. Demostre que p pode ser escrito como uma derivada total $p = -\frac{1}{4}\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\nu\rho}A_\sigma)$.

   Demostre que $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ é proporcional à s e portanto incluir essa combinação não acrescentaria nada.

   Cheque o limite de campos pequenos, que de novo deve dar $\mathcal{L}=s$.

[1] Na linguagem de todos os dias, os físicos chamam a densidade Lagrangeana $\mathcal{L}$ de ação, embora seja um abuso de linguagem. O correto seria chamar de ação $S=\int d^4x\mathcal{L}$.

4. Demostre que a ação de Born-Infeld pode ser escrita em termos de um determinante:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BI}} = -b^2 \sqrt{-\det\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} F_{\mu\nu}\right)} + b^2 \,.$$

5. Demonstre a invariança de Lorentz de $\det(\eta_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})$. Coloquei, sem perda de generalidade, $b = 1$ para simplificar a notação. Para restaurar $b \neq 1$ é só rescalar $F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}/b$. Dicas:

   (a) Demostre que o determinante de uma matriz M com índices covariantes $M_{\mu\nu}$ é igual ao determinante da matriz $\overline{M}$ com índices contravariantes $M^{\mu\nu}$. Isso implica que $\det(\eta + F) = \det(\overline{\eta} + \overline{F})$ (espero que a notação esteja óbvia: η é $\eta_{\mu\nu}$, $\overline{\eta}$ é $\eta^{\mu\nu}$, etc.).

   (b) Considere uma transformação de Lorentz atuando sobre $\eta_{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}$.

   (c) Relembre que $(\det \Lambda)^2 = 1$.

6. Demostre que $\mathcal{L}_{\mathrm{BI}}$ é uma função par de F.

7. **Auto-energia ("self-energy") de uma carga pontiforme**

   Consideremos o caso $\vec{B} = 0$, o que é suficiente para as considerações que seguem. Calcule

$$\vec{D} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}}$$

   e escreva E^2 em termos de D^2. Demostre que $E \leq b$ e $E \leq D$.

   Escreva $\vec{E}$ em termos de $\vec{D}$ e D^2. Escreva $\mathcal{L}$ em termos de D^2.

   Calcule a (densidade de) hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \vec{E} \cdot \vec{D} - \mathcal{L} \,.$$

   Na teoria de Maxwell a densidade de energia é proporcional a E^2 (ver Lista 3) e $E \sim 1/r^2$. Portanto $d^3x\, E^2 \sim dr/r^2$, que diverge quando integrado por r pequeno. Na teoria de Born-Infeld é também $D \sim 1/r^2$ (confire!), porém podemos ver da expressão para $\mathcal{H}$ que, para $D \to \infty$, temos $\mathcal{H} \sim bD$. Portanto $d^3x\, bD \sim dr$, que é regular perto da origem.

   Entenda isso de forma mais precisa, para uma carga pontiforme. Você vai ter que calcular uma integral do tipo

$$\int_0^\infty dx \left(\sqrt{1 + x^4} - x^2\right) = \frac{(\Gamma(1/4))^2}{6\sqrt{\pi}} \simeq 1.236, ,$$

   que, justamente, é convergente.

   Tente repetir a conta com $\vec{B} \neq 0$. (Resposta: $\mathcal{H} = \sqrt{1 + B^2 + D^2 + (\vec{D} \times \vec{B})^2} - 1$, sempre usando $b = 1$).

8. **Capacidade de Born-Infeld**

   A capacidade de uma configuração de dois condutores com cargas Q e $-Q$ e diferença de potencial V é definida como $C = Q/V$. Seja C_{M} a capacidade na teoria de Maxwell.

   Explique porque C_{M} é constante (independente de Q e V).

   Considere um capacitor plano de area A e separação d entre os planos. Demostre que a capacidade de Born-Infeld C_{BI} é dada por

$$C_{\mathrm{BI}} = \frac{C_{\mathrm{M}}}{\sqrt{1 - (V/V_{\mathrm{c}})^2}}\,, \qquad V_{\mathrm{c}} = bd\,.$$