15/2/2016

Relatividade

dtrancau@fma.if.usp.br / dfma.if.usp.br/~dtrancau

Sala 344 Ala Central

Sub

aberta

Referências:

A. Lee "Einstein Gravity in a Nutshell"

S. Carroll 9712019 (gr-qc)

$\boxed{\text{arxiv.org}}$ { hep-th
hep-ex
gr-qc
⋮

A. Pais "Subtle is the Lord" → biografia do Einstein

1511.02684 [physics.ed-ph] → 1ª aula

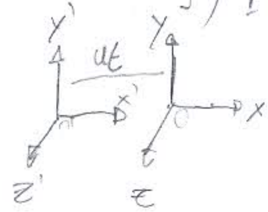
Análise dimensional, constantes fundamentais,
unidades naturais

17/2/2016

* Mecânica de Newton

$$\boxed{m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}}$$

1) Invariante sob transf. Galileo



$u = cte$ $\boxed{t = t'}$ relógios universais

$$\begin{cases} x' = x + ut \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} + u \Rightarrow \boxed{v' = v + u}$$

$$\frac{d^2x}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + 0 \rightarrow \boxed{a' = a}$$

$u \neq cte$

$$ma' = ma + m\frac{du}{dt}$$

Obs

Eletromag. não é invariante sob transf. de Galileo

2) 2 derivadas → dinâmica

3) Conservação

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ mas não de $\dot{\vec{x}}$

$$\frac{dx^i}{dt}\Bigg|\ F^i(\vec{x}) = -\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x^i} = m\frac{d^2}{dt^2}x^i$$

↳ multiplica $\frac{dx^i}{dt}$ pelo lado esquerdo

$$\sum_i\Bigg|\ \underbrace{m\frac{d^2x^i}{dt^2}\cdot\frac{dx^i}{dt}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} = -\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial V}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{d}{dt}\Bigg(\overbrace{\frac{m}{2}\sum_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + V(\vec{x})}^{cte \equiv E}\Bigg) = 0$$

$F' = $ central

$V(\vec{x}) = V(r)$ $\qquad r = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \sqrt{\sum_i (x^i)^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} V(r) = \frac{\partial r}{\partial x^i} V'(r) = \frac{x^i}{r} V'(r)$$

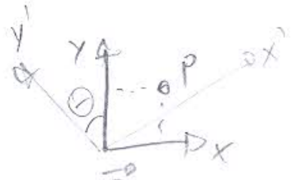
$$x^j \,\Big|\, F^i = -\frac{V'(r)}{r} x^i = m \frac{d^2}{dt^2} x^i \Rightarrow \left(m \frac{d^2 x^i}{dt^2} x^j = -\frac{V'}{r} x^i x^j \right) - (i \leftrightarrow j)$$

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2}x^j - m\frac{d^2x^j}{dt^2}x^i = \cancel{-\frac{V'}{r}x^i x^j} + \cancel{\frac{V'}{r}x^j x^i}$$

$$\Rightarrow m \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{x^j\frac{dx^i}{dt} - x^i\frac{dx^j}{dt}}_{cte \equiv l's}\Big) = 0$$

Rotações

2D



(Transf. passiva)

$x' = \cos\theta\, x + \sin\theta\, y$

$y' = -\sin\theta\, x + \cos\theta\, y$

$$\vec{r}' \qquad R(\theta) \qquad \vec{r}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{r}' = R(\theta)\,\vec{r}}$$

→ deixa inv. o módulo de um vetor $\rightarrow \vec{p}^T\cdot\vec{p} = p_1^2 + p_2^2$ $\qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{p} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{p}^2$ = cte sob rotações $= (\vec{u}+\vec{v})^T\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\,\vec{u}^T\cdot\vec{v} \rightarrow$

$$\rightarrow \vec{u}'^2 + \vec{v}'^2 + 2\,\vec{u}'^T\cdot\vec{v}' = \vec{p}'^2 \overset{}{=} \vec{p}^2$$

Deve ser

$\vec{u}^T\cdot\vec{v} = \vec{u}'^T\cdot\vec{v}'$

$$\vec{u}'^T\cdot\vec{v}' = \vec{u}^T R^T(\theta)\cdot R(\theta)\cdot\vec{v} = \vec{u}^T\cdot\vec{v}$$

$\vec{u}'^T = \vec{u}^T R^T(\theta)$

$$= \vec{u}^T\cdot \mathbb{1}\cdot\vec{v}$$

$$\boxed{R^T\cdot R = \mathbb{1}}$$

ortogonal

$O(D)$ $\quad (O(2))$

$$\det(R^T R) = \det \mathbb{1} = 1$$

$$\shortparallel$$

$$\det(R^T)\det(R)$$

$$\shortparallel$$

$$(\det(R))^2$$

$\rightarrow \det R = \pm 1$

$\boxed{\det R = +1} \longrightarrow \underbrace{SO(D)}$

$\hookrightarrow$ Rotações

Exemplo

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ "inversão de paridade"

$\det P = -1$

$P^T = P^{-1}$

Rotações infinitesimais (Lie)

$$R(\theta) \simeq \mathbb{1} + A + O(A^2) \qquad \underline{SO(D)}$$

$$R^T R = \mathbb{1} \Rightarrow (\mathbb{1}+A)^T \cdot (\mathbb{1}+A) = \mathbb{1} + A^T + A + \underbrace{\cancel{A^T A}}_{\text{segunda ordem}} = \mathbb{1}$$

$\therefore \boxed{A^T + A = 0}$ A = antissimétrica

$\underline{D=2}$

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gerador da transf.

$A = \theta J = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \underset{\theta \to 0}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \theta J$

$$e^x = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{1} + \frac{\theta J}{N}\right)^N = e^{\theta J} = R(\theta)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rotação finita}}}{R(\theta)} = \lim_{N\to\infty} \left(R\left(\frac{\theta}{N}\right)\right)^N$$

$\uparrow$ Rotação infinitesimal $\frac{\theta}{N}$

$$e^{\theta J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n J^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k} \overbrace{J^{2k}}^{(-1)^k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1} \overbrace{J^{2k+1}}^{(-1)^k J}}{(2k+1)!}$$

$$= \boxed{\cos\theta \cdot \mathbb{1} + \sin\theta \cdot J}$$

Até agora escolhemos a origem, mas não é necessário.

$$\vec{r}_p = (x, y) \qquad \vec{r}_Q = (\tilde{x}, \tilde{y})$$

$$\vec{r}_{p'} = (x', y') \qquad \vec{r}_{Q'} = (\tilde{x}', \tilde{y}')$$

$$= R(\theta)\vec{r}_p \qquad = R(\theta)\vec{r}_Q$$

$$\vec{r}_{Q'} - \vec{r}_{p'} = R(\theta)(\vec{r}_Q - \vec{r}_p)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$\Delta x = \tilde{x} - x$$

$$\Delta y = \tilde{y} - y$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}}$$

$\to$ $d\vec{x}$ é o protótipo de um vetor

Examplo de não-vetor

$\vec{p}$ vetor $\quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} ap_1 \\ bp_2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(\theta) \begin{pmatrix} ap_1 \\ bp_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ap_1 \\ bp_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, ap_1 + \operatorname{sen}\theta\, bp_2 \\ -\sin\theta\, ap_1 + \cos\theta\, bp_2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} ap_1' \\ bp_2' \end{pmatrix}$$

é vetor?

$$ap_1' = a(\cos\theta\, p_1 + \sin\theta\, p_2)$$

$$bp_2' = b(-\sin\theta\, p_1 + \cos\theta\, p_2)$$

p/ a e b gerais não é válido

SO(3)

$$R = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \mathbb{1} + A$$

$A^T = A$

$\hookrightarrow \theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z$

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo

$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ são vetores de SO(3)

índice

$\begin{pmatrix} p^2 q^3 \\ p^3 q^1 \\ p^1 q^2 \end{pmatrix}$ é um vetor? Não.

$\begin{pmatrix} p^2 q^3 - p^3 q^2 \\ p^3 q^1 - p^1 q^3 \\ p^1 q^2 - p^2 p^1 \end{pmatrix}$ é um vetor? Sim, produto vetorial.