22/12/2016

Rotações $SO(3)$

1) Transf. que deixa o produto escalar (comprimento) invariante

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = \sum_{i=1}^{3} (dx_i)^2$$

$\downarrow SO(3)$

$$d\vec{x}' \cdot d\vec{x}' = d\vec{x} \cdot d\vec{x} \Rightarrow R^T(\Theta) R(\Theta) \doteq 1$$

$$(\det R = \pm 1)$$

2) Um vetor é def. pelas suas propriedades de transf. sob $SO(3)$

Um vetor é alguma coisa que se transf. como $d\vec{x}$ sob $SO(3)$

<u>Mec. Quântica</u>: Representações operatoriais

$SO(3)$: J_x J_y J_z

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{J}_x &= -i J_x \\ \mathcal{J}_y &= -i J_y \\ \mathcal{J}_z &= -i J_z \end{aligned}}$$

$-i \rightarrow$ para deixar $\mathcal{J}_i$ hermitiano

$$\mathcal{J}_x^\dagger = (\mathcal{J}_x^*)^T = (-i)^* J_x^T$$

$$= +i(-J_x)$$

$$= -i J_x = \mathcal{J}_x$$

$$J_z \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\mathcal{J}_z = i\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)}$$

Álgebra:

$$\boxed{[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk} J_k}$$

unid. imaginária

$i, j, k = x, y, z$

$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$

$\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ijk}$

$\epsilon_{kij} = +\epsilon_{ijk}$

$\boxed{\epsilon_{ijk}\text{ tot}}$ → tot. Antissimétrico

$$\begin{cases} \epsilon_{xyz} = +1 \\ \epsilon_{iij} = 0 \end{cases}$$

$$\epsilon_{ijk} J_k = \sum_{k=x,y,z} \epsilon_{ijk} J_k = \sum_{\mu=x,y,z} \epsilon_{ij\mu} J_\mu$$

índices repetidos = somados

posso renomear k

$$[J_i, J_j] = J_i J_j - J_j J_i$$

$i = x$, $j = y$: $J_x J_y - J_y J_x$

$[J_x, J_y] = i\,\epsilon_{xyk} J_k = \sum_k \epsilon_{xyk} J_k$

$= i\,\epsilon_{xyz} J_z = i J_z$, com $\epsilon_{xyz} = 1$

$[J_x, J_z] = i\,\epsilon_{xzy} J_y = -i J_y$

$[J_y, J_z] = i\,\epsilon_{yzx} J_x = i J_x$

$\boxed{[A,B] = -[B,A]}$

$$[J_i, J_j]^\dagger = (i\,\epsilon_{ijk} J_k)^\dagger = (J_i J_j - J_j J_i)^\dagger =$$

$i^\dagger \epsilon_{ijk} J_k^\dagger$, com $i^\dagger = -i$, $J_k^\dagger = J_k$

$$= J_j^\dagger J_i^\dagger - J_i^\dagger J_j^\dagger = -[J_i, J_j]$$

$J_j J_i - J_i J_j = [J_j, J_i] =$

Álgebra de $SO(D)$

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

D - dimensões

$i,j = 1 \dots D$ índices da matriz

$$J^{ij}_{(mn)} = -i\left(\delta^{mi}\delta^{nj} - \delta^{mj}\delta^{ni}\right)$$

etiqueta da matriz

$(m\,n)$

$m,n = 1,\dots,D$

$(m\,n) = -(n\,m)$

$\frac{D(D-1)}{2}$ etiquetas

$D=3$ $\boxed{J_{(12)} \quad J_{(13)} \quad J_{(23)}}$

$J_z \quad J_y \quad J_x$

$J^{ij}_{(mn)} \qquad J^{kl}_{(pq)}$

$$\boxed{[J_{(mn)}, J_{(pq)}] = i\left(\delta_{mp} J_{(nq)} + \delta_{nq} J_{(mp)} - \delta_{np} J_{(mq)} - \delta_{mq} J_{(np)}\right)}$$

Álgebra de $SO(D)$

Vetor de $SO(D)$

$$x^i \to x^{i\prime} = R^{ij} x^j = \sum_{j=1}^{D} R^{ij} x^j$$

$\hookrightarrow R \in SO(D)$

Tensor de $SO(D)$

$$T^{ij} \longrightarrow T^{ij\prime} = R^{ik} R^{jl} T^{kl} = \sum_{k=1}^{D}\sum_{l=1}^{D} R^{ik} R^{jl} T^{kl}$$

tensor de ordem (= rank) 2

$$W^{ijk} \to (W^{ijk})' = R^{ii'} R^{jj'} R^{kk'} W^{i'j'k'}$$

$$= R^{ia} R^{jb} R^{kc} W^{abc}$$

$\downarrow$

Tensor de ordem 3

Vetor

$$V^i \to (V^i)' = R^{ij} V^j$$

Atuar com derivadas $V^i(x)$

$$W^{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} V^i \qquad \frac{\partial}{\partial x^j} \to \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)' = \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= R^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$dx^i \to R^{ij} dx^j = (dx^i)'$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \to R^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)'$$

Não vai ser verdade no espaço curvo

$$\frac{\partial}{\partial x} R \neq 0$$

$$W^{ij}(x) \to (W^{ij}(x'))' \equiv \frac{\partial V'^i(x')}{\partial x'^j}$$

$(x^i \to x'^i = R^{ij} x^j)$

$$= R^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(R^{il} V^l(x)\right)$$

$\frac{\partial}{\partial x^k} R^{il} = 0$

$$= R^{jk} R^{il} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^k} V^l(x)}_{W^{lk}(x)} = \sum_{l,k=1}^{D} R^{il} R^{jk} W^{lk}(x)$$

$\frac{\partial}{\partial x^k} \equiv \partial_k$ se transforma como um vetor $\vec{\nabla}$

Representações

T^{ij} $\quad ij = 1,2,3$

$$\begin{matrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{matrix}$$

$$T^{ij} \to (T^{ij})' = \underbrace{R^{ik}R^{jl}}_{\text{Matrizes } 3\times 3} T^{kl}$$

Transf. linear em T^{ij}

Eu posso pensar em fazer:

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{32} \\ T_{33} \end{pmatrix}_{9\times 1}$$

Não é um vetor!

Representar $R^{ik}R^{jl}T^{kl}$

Como uma matriz 9×9 atuando sobre $\to \boxed{D(R)}$

$D(R)$ é uma representação tensorial de $SO(3)$
↳ 9-dimensional

$$D(R_1, R_2) = D(R_1)\,D(R_2)$$

Obs: vetor = representação fundamental de $SO(3)$

$$T^{11} \to (T^{11})' = R^{1k}R^{1l}T^{kl} = R^{1k}(R^{11}T^{k1} + R^{12}T^{k2} + R^{13}T^{k3})$$

$$= R^{11}R^{11}T^{11} + R^{11}R^{12}T^{12} + R^{11}R^{13}T^{13} + R^{12}R^{11}T^{21} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} (R_{11})^2 & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{9\times 9} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ \vdots \end{pmatrix}_{9\times 1} = \begin{pmatrix} T_{11}' \\ T_{12}' \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Redutível vs. Irredutível

$A^{ij} = T^{ij} - T^{ji}$ parte antissimétrica de T^{ij}

$\frac{D(D-1)}{2}$ $\quad \boxed{A^{ij} = -A^{ji}}$

$$A^{ij} \to (A^{ij})' = (T^{ij})' - (T^{ji})' = R^{ik}R^{jl}T^{kl} - R^{j\cancel{k}\,l}R^{i\cancel{l}\,k}T^{\cancel{kl}\,lk}$$

$$= R^{ik}R^{jl}(\underbrace{T^{kl} - T^{lk}}_{A^{kl}})$$

$S^{ij} = T^{ij} + T^{ji}$ $\qquad \frac{D(D+1)}{2}$

$$\left(T^{ij} = \frac{S^{ij} + A^{ij}}{2}\right)$$

$S^{11} \quad S^{12} \quad S^{13}$

$\quad S^{22} \quad S^{23}$

$\quad\quad S^{33}$

$$\boxed{S^{ij} \to R^{ik}R^{jl}S^{kl}}$$

$$S^{ii} = S^{11} + S^{22} + S^{33}$$

$$\Downarrow$$

$$(S^{ii})' = R^{ik}R^{il}S^{kl} = (R^{ki})^T R^{il} S^{kl}$$

$$= \delta^{kl}S^{kl} = S^{kk} = S^{ii}$$

D=3

$9 \to 1 + 3 + 5$

traço $\quad A_{ij} \quad$ (sij - traço)

$$D = \frac{D(D-1)}{2} + 1 + \left(\frac{D(D+1)}{2} - 1\right)$$

$D(R)_{9\times 9}$

$$D(R) = \begin{pmatrix} 3\times 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1\times 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5\times 5 \end{pmatrix}_{9\times 9} \quad \begin{pmatrix} A^{12} \\ A^{13} \\ A^{23} \\ \text{traço} \\ S^{11} - \text{traço} \\ S^{22} - \text{traço} \\ \vdots \end{pmatrix}$$