28/3/2016

$\boxed{\text{Partículas + campos}}$

Pricípio de ação para partículas

$$S_{\text{matéria}} = \int dt \underbrace{\sum_a}_{\text{vários partículas}} m_a \left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{q}_a}{dt}\right)^2 - \phi(q_a(t))\right)$$

Pricípio de ação para campos (ex. gravidade)

$$S_{\text{grav.}} = -\int dt \int d^3\vec{x} \left(\frac{1}{8\pi G}(\nabla\phi)^2 + \rho\phi\right)$$

$\phi = \phi(\vec{x})$

$$\int d^3x\, \rho\phi = \sum_a m_a \phi(\vec{q}_a(t)) \quad \text{Potencial gravitacional}$$

$$\rho = \sum_a m_a\, \delta^3(\vec{x} - \vec{q}_a(t))$$

$$S = \int dt \left\{ \sum_a \frac{m_a}{2}\left(\frac{d\vec{q}_a}{dt}\right)^2 - \int d^3x \frac{1}{8\pi G}(\nabla\phi)^2 - \underbrace{\int d^3x \sum_a m_a\, \delta^3(\vec{x} - \vec{q}_a(t))\phi}_{\text{Interação}} \right\}$$

<u>Problemas</u>: 1) O campo não é dinâmico pois não há 2 derivadas temporais de ϕ → propagação instântanea

2) Campos e partículas são tratados de maneira diferente

$\int dt$ vs. $\int dt\, d^3x$

→ além do curso de RG: TQC

Solução de 1):

$$\boxed{(\nabla\phi)^2 \to -\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + (\nabla\phi)^2}$$

Lorentz

Simetrias e Conservação | Teorema de E. Noether

$L\left(q_a, \frac{dq_a}{dt}, t\right)$, tem uma simetria = Invariante sob uma transformação

$q_a \to q_a + \delta q_a$

Ex 1: Partícula em 2D

Pot. central

$V(\vec{r}) = V(r)$

$$L = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) - V(r)$$

$\hookrightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\to$ é invariante sob rotações

$$\begin{cases} x \to x + \epsilon y \\ y \to y - \epsilon x \end{cases} \text{(Hw)}$$

Ex. 2: 2 partículas q_1, & q_2

com pot depende só da distância $|q_1 - q_2|$

$$L = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2\right) - V$$

Invariante sob translações

$$\begin{cases} q_1 \to q_1 + \epsilon \\ q_2 \to q_2 + \epsilon \end{cases}$$

Vai ter qtds conservados

$$\begin{cases} q_a(t) \to q_a(t) + \delta q_a(t) \\ L = L\left(q_a, \dfrac{dq_a}{dt}\right) \\ \dfrac{d}{dt} q_a \to \dfrac{d}{dt}\left(q_a + \dfrac{d}{dt} q_a\right) = \dfrac{d}{dt} q_a + \delta\left(\dfrac{dq_a}{dt}\right) \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\delta L = 0 \\ \text{por invariância}}}{0} = \sum_a \left(\underbrace{\boxed{\frac{\delta L}{\delta q_a}}}_{\overset{E-L}{\Downarrow}\ = \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}}} \delta q_a + \frac{\delta L}{\delta\left(\frac{dq_a}{dt}\right)} \frac{d}{dt} \delta q_a \right)$$

$$= \sum_a \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}} \right) \delta q_a + \frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}} \frac{d}{dt} \delta q_a \right] = \sum_a \frac{d}{dt} \left[\frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}} \delta q_a \right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\epsilon Q\right] = 0$$

$$\boxed{\epsilon Q = cte}$$

Ex3. Cons. de energia

$\delta L = 0$ pode ser generalizado

para $\delta L = \dfrac{dK}{dt}$ (derivada total)

$$0 \neq \delta L = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_a \left(\frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}} \delta q_a \right)$$

$$\boxed{\epsilon Q = \left(\sum_a \frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}} \delta q_a \right) - K} \text{ conservada}$$

L não depende explicitamente do tempo

translação no tempo: $t \to t + \overset{cte. \to dt = dt'}{\epsilon} \equiv t'$? $\to$ * Obs

$\downarrow$

$\to$ * Obs:
$$\boxed{\begin{aligned} q_a(t) &\to q_a(t+\epsilon) \simeq q_a(t) + \epsilon \frac{dq_a}{dt} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \frac{dq_a(t)}{dt} &\to \frac{d}{dt} q_a(t+\epsilon) \simeq \frac{dq_a}{dt} + \epsilon \frac{d^2 q_a}{dt^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}}$$

HW: $\delta L = \epsilon \frac{dL}{dt}$ $\boxed{K = \epsilon L}$

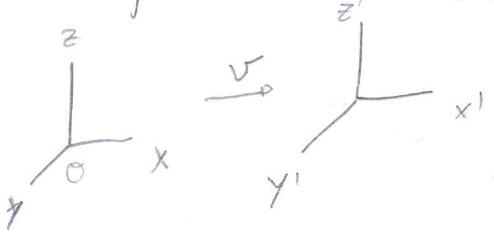
$$\to \epsilon Q = \sum_a \frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}} \epsilon \frac{dq_a}{dt} - \epsilon L = \epsilon \left(\sum_a \underbrace{\boxed{\frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}}}}_{= p_a} \frac{dq_a}{dt} - L \right)$$

$$= \epsilon \Big(\underbrace{\sum_a p_a \dot{q}_a - L}_{\text{Hamiltoniana}} \Big)$$

Hamiltoniana

$\boxed{\text{Espaço - Tempo}}$

Transf. de Galileo



$$\begin{cases} t = t' \\ x' = x + vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Princípio da Relatividade de Galileo

2 observadores em moto relativo uniforme não podem decidir quem está em moto com respeito ao outro.

Adição de velocidades

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} + u = v + u$$

mecânica de Newton é invariante pois $\frac{du}{dt} = 0$

(HW)

$$S = \int dt' \frac{1}{2} m \left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 = \int dt \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} + u\right)^2$$

$$= \int dt \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \boxed{u \int dt \, m \frac{dx}{dt}} + \underbrace{u^2 \int dt \frac{m}{2}}_{\text{const.}}$$

= deriv. total

Maxwell: $\boxed{c = c'}$

$$\rho = \vec{J} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad ***$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad *$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad **$$

$$* \quad \underbrace{\nabla \times (\nabla \times \vec{E})} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\underbrace{\nabla (\nabla \cdot \vec{E})}_{=0 \; ***} - \nabla^2 \vec{E}$$

$\boxed{\text{Galileo} \rightarrow \text{Lorentz}}$

consequência

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

independe do referencial

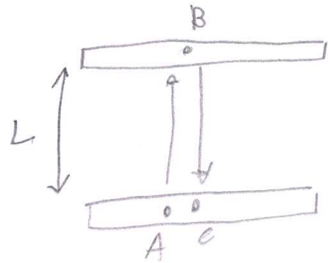
$$\rightarrow \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E}\right) = 0 \rightarrow \text{Solução:}$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

Ondas

$$\frac{\lambda}{T} = v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

2 espelhos



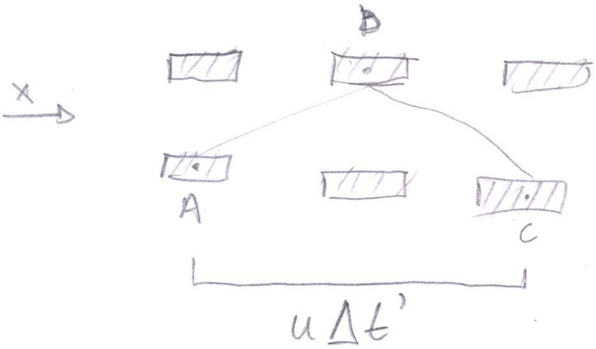
$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$

$\Delta t = \frac{2L}{c}$

Referencial em movimento ao longo de x

$\Delta y' = \Delta z' = 0$

$\Delta x' \neq 0 \qquad \Delta x' = u\,\Delta t'$



$$\Delta t' = \frac{dist}{c} \Rightarrow c\Delta t' = 2\sqrt{L^2 + \left(\tfrac{1}{2}u\Delta t'\right)^2}$$

$$c\Delta t' = 2\sqrt{\left(\frac{\Delta x'}{2}\right)^2 + L^2}$$

$$c^2\Delta t'^2 = 4\left(\frac{1}{4}\Delta x'^2 + L^2\right) \Rightarrow \boxed{c\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = 4L^2}$$

$$\boxed{c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = 4L^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2}$$

$-\Delta y'^2 - \Delta z'^2 \qquad\qquad -\Delta y^2 - \Delta z^2$

$\boxed{c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{x}^2}$

combinação invariante

$SO(D)$; $\Delta\vec{x}\cdot\Delta\vec{x}$

$\boxed{?\,;\quad c\Delta t^2 - \Delta\vec{x}\cdot\Delta\vec{x}}$