30/3/2016

$$\begin{cases} SO(D): d\vec{x}^2 \\ ?: c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (\vec{x}, t) \to (\vec{x}', t') \text{ tal que:} \\ c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 \end{cases}$$

1) Relacão entre $(\vec{x}', t')$ deve ser Linear

reescalando $\{t', \vec{x}'\} \to \{\lambda t', \lambda \vec{x}'\}$

uma relação não-linear vai dar problemas

por ex: $t' = t + ax^2 \to \lambda t' = \lambda t + a\lambda^2 x^2 \neq \lambda(t + ax^2)$

2) "$u \to 0$" : preciso obter Galileo
$(u \ll c)$

Análise Dim.

•) sem c: a única combinação com dimensão de tempo é: $\frac{x}{u}$

$t' = t + \zeta \frac{x}{u}$ 1) ✓
2) × $u \to 0$ diverge $\Rightarrow \zeta = 0$

•) Com c: $\frac{ux}{c^2}$ 1) ✓

$t' = t + \zeta \frac{ux}{c^2}$ 2) ✓

ζ não precisa ser cte
$\zeta = \zeta\left(\frac{u}{c}\right)$

$$\boxed{t' = \xi\left(t + \zeta \frac{u x}{c^2}\right)}$$

$$\xi = \xi\left(\frac{u}{c}\right) \quad \zeta = \zeta\left(\frac{u}{c}\right)$$

$$\xi(0) = 1$$

$$\boxed{x' = \chi(x + ut)}$$

$$\begin{cases} \chi = \chi\left(\frac{u}{c}\right) \\ \chi(0) = 1 \end{cases}$$

Queremos $(t'_0 = 0 \quad t_0 = 0 \quad x'_0 = 0 \quad x_0 = 0)$

$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2$$

$$c^2 \xi^2 \left(t + \zeta \frac{u x}{c^2}\right)^2 - \chi^2 (x + ut)^2 = c^2 t^2 - x^2$$

$$c^2 t^2 \underbrace{\left(\xi^2 - \frac{u}{c^2}\chi^2\right)}_{=1} + 2tx \underbrace{\left(c^2 \xi^2 \zeta \frac{u}{c^2} - \chi^2 u\right)}_{=0} - x^2 \underbrace{\left(\chi^2 - c^2 \xi^2 \zeta^2 \frac{u^2}{c^4}\right)}_{=1}$$

$$= c^2 t^2 - x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ct' = \dfrac{ct + \frac{u}{c} x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\[2ex] x' = \dfrac{x + \frac{u}{c} ct}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{cases}$$

Transf. de Lorentz

$y' = y$

$z' = z$

.) HW: $\frac{u}{c} << 1 \to$ Galileo

.) $\frac{u^2}{c^2} \leq 1 \to u \leq c$

c = Velocidade da Luz

.) $t' \neq t$: não tem um relógio universal

Outro sistema de coordenadas: "cone de Luz"

$$\begin{cases} x^+ \equiv x + ct \\ x^- \equiv -x + ct \end{cases}$$

$$c t'^2 - x'^2 = (ct' - x')(ct' + x') = (x^+)'(x^-)'$$

$$(x^+)'(x^-)' = x^+ x^- \Longrightarrow \text{Solução} \quad \begin{matrix} (x^+)' = e^{\varphi} x^+ \\ (x^-)' = e^{-\varphi} x^- \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} ch\varphi = \cosh\varphi \\ sh\varphi = \sinh\varphi \end{matrix}}$$

$$\begin{cases} ct' = \frac{1}{2}\left((x^+)' + (x^-)'\right) = \\ \quad = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi} x^+ + e^{-\varphi} x^-\right) = ch\varphi \, ct + sh\varphi \, x \\ x' = \frac{1}{2}\left((x^+)' - (x^-)'\right) = sh\varphi \, ct + ch\varphi \, x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

φ = parâmetro de boost

$$x' = 0 \to x = -ut$$

$$ch\varphi \, x = -sh\varphi \, ct$$

$$\Rightarrow \frac{u}{c} = th\varphi \qquad \boxed{\varphi = \overset{\text{tanh}}{th^{-1}}\left(\frac{u}{c}\right)}$$

relação entre boost e velocidade

$$ch\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad sh\varphi = \frac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Adição de velocidades

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx + u\,dt}{dt + u\,dx} = \frac{\overset{v}{\frac{dx}{dt}} + u}{1 + u\frac{dx}{dt}} = \frac{v+u}{1+uv} \neq v+u$$

Minkowski e a geometria do espaço-tempo

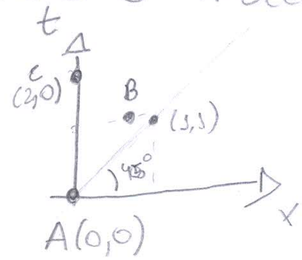
$$\underbrace{dl^2 = d\vec{x}^{\,2} = dx_1^2 + \dots + dx_D^2}_{\text{invariante sob rotações } SO(D)} \Rightarrow ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^{\,2}$$

$$\underbrace{\underline{c=1} \quad (c \neq 1:\ -c^2dt^2 + d\vec{x}^{\,2})}_{\text{invariante sob transf. de Lorentz}}$$

?

$$ds^2 = \begin{cases} < 0 & \text{tipo-tempo} \\ = 0 & \text{tipo-luz ("null")} \\ > 0 & \text{tipo-espaço} \end{cases}$$

⇒ uma linha reta entre 2 pontos no espaço-tempo não é necessariamente o caminho de dist. mais curta!



$B = (1, x<1)$

$d_{AC} = \sqrt{dt^2 - dx^2} = \sqrt{2^2 - 0} = 2$

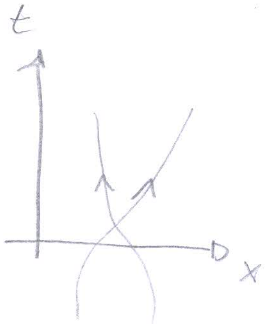
$d_{AB} = d_{BC} = \sqrt{1 - x^2}$

$d_{AB} + d_{BC} = 2\sqrt{1-x^2} < 2 = d_{AC}$

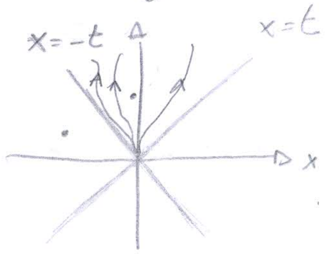
A mais curta: $x = 1$: $d_{AB} = d_{BC} = 0$

Partículas → "linha-de-mundo"
(world-line)

Causalidade: um evento dentro do cone não se communica com um fora do mesmo.



cone-de-luz



$\boxed{ds^2=0}$

$\Rightarrow dt^2 = d\vec{x}^2$

Partículas com massa se propagam dentro do cone de luz

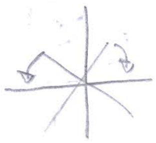
$dt^2 > d\vec{x}^2$

"tipo-tempo"

$c \to \infty$

"limite não-relativístico"

cone de luz "se abre"



Tempo próprio (τ)

referencial: $d\vec{x}=0$

$\boxed{d\tau^2 = dt^2 - \cancel{d\vec{x}^2} = dt^2}$

Para um outro observador

$dt^2 = -ds^2$ é a mesma coisa

mas não vai ter o significado de tempo

Distância

$$\int_A^C d\tau = \int_A^C \sqrt{dt^2 - dx^2} = \int_A^C dt \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$= \int_A^C d\tau \sqrt{\frac{dt^2}{d\tau^2} - \frac{dx^2}{d\tau^2}}$$

linha reta $\int_A^C \frac{dx}{d\tau} = 0$: distância máxima

Métrica de Minkowski

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$= - \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$x^0 = ct \overset{c=1}{=} t$

$x^i = (x, y, z)$

$i = 1, 2, 3$

$\mu = 0, 1, 2, 3$

$x^0 = ct$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ métrica de Minkowski

$\hookrightarrow \delta_{ij}$

$$dx^\mu = (c\,dt, \overbrace{dx, dy, dz}^{d\vec{x}})$$

"vetor contra-variante"

Vetor sob transf. de Lorentz

$$p^2 = p \cdot p = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2$$

$$\boxed{p_\nu = \eta_{\mu\nu}\, p^\mu}$$

$$
\circledast
\begin{cases}
p^\mu = (p^0, p^i) \\
p_\mu = (p_0, p_i) = (-p^0, p^i) \\
p \cdot q = \eta_{\mu\nu}\, p^\mu q^\nu = p_\nu q^\nu = -p^0 q^0 + \vec{p} \cdot \vec{q}
\end{cases}
$$

$$g_{\mu\nu} \to g^{\mu\nu}$$

$$\eta_{\mu\nu} \to \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

métrica inversa

$$\eta_{\mu\nu}\, \eta^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$$

η^ν_μ ~~$\delta_{\mu\nu}\ \delta^{\mu\nu}$~~

Não existem

Tipo - tempo

$ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2 < 0$

$\sqrt{ds^2} =$ imaginario

$d\tau^2 = -ds^2$

$\sqrt{-ds^2} = \sqrt{d\tau}$