$$= -m \int \sqrt{\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu} = -m \int \sqrt{dt^2 - d\vec{x}^{\,2}}$$

S_{rel} e $\tilde{S}_{rel}$ são equivalentes na "$\underbrace{\text{camada de massa}}$" de e.

= usando as eq. do mov. de. e.

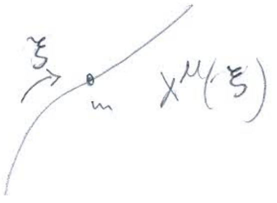
on shell

13/4/2016

$$S = -m \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu} = -m \int d\xi \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\xi} \frac{dx^\nu}{d\xi}}$$

1) invariante de Lorentz: $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

2) " sob reparametrizações



$$\xi \to \tilde{\xi}(\xi)$$
$$d\xi \to \frac{d\xi}{d\tilde{\xi}}\, d\tilde{\xi} = J\, d\tilde{\xi}$$

$$S \to -m \int J\, d\tilde{\xi} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{J d\tilde{\xi}} \frac{dx^\nu}{J d\tilde{\xi}}}$$

$$\boxed{d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - d\vec{x}^{\,2}}$$

E - L

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{\delta L}{\delta \frac{dx^\mu}{d\xi}}\right) = 0 \\[2ex] m \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{L}\, \eta_{\mu\nu} \dfrac{dx^\nu}{d\xi}\right) = 0 \end{cases}$$

Escolha inteligente

$\xi = \tau \longrightarrow L = -m$

Tempo próprio

$$\frac{d}{d\tau}\left(\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0}$$

Completamento e promoção

Velocidade $\quad \vec{v}_{Newton} = \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \dfrac{3\text{-vetor}}{3\text{-escalar}} = \dfrac{\text{vetor em } D=3}{\text{Componente } 0 \text{ de um } 4\text{-vetor}}$

promovido

$$\begin{cases} x^\mu = (ct, \vec{x}) \\ \quad = (cx^0, \vec{x}) \end{cases}$$

$\dfrac{d\vec{x}}{d\tau}$ $\Rightarrow$ $d\tau$ é um "4-escalar" = é escalar sob $SO(1,3)$

$v^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ é um 4-vetor $= \dfrac{4\text{-vetor}}{4\text{-escalar}} = 4\text{-vetor}$

$$d\tau \xrightarrow[\text{Lorentz}]{} d\tau' = d\tau$$

Conservação de momento

$$p^\mu = m v^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$K^\mu \equiv \sum_{a\in I} p_a^\mu - \sum_{a\in F} p_a^\mu = 0 \leftarrow \text{Cons. de momento}$$

$$\sum_{a\in I} p_a^\mu = \sum_{a\in F} p_a^\mu$$

$$K'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu K^\nu = 0$$

$\begin{cases} I: \text{ estados iniciais} \\ F: \text{ '' finais} \end{cases}$

$$(p^0, p^i) \to (p^{0'}(p^0, p^i), p^{i'}(p^0, p^i))$$

p^0 e p^i vão se misturar sob um T.L. $\Rightarrow$ devem ser conservados separadamente

$$E \equiv \underset{\underset{(c=1)}{\downarrow}}{p^0} = m\frac{dt}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}_{Newton}^{\,2}}} \overset{c\neq 1}{=} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{\vec{v}_{Newton}}{c}\right)^2}}$$

$$\underset{\underset{\left|\frac{\vec{v}_N}{c}\right| \ll 1}{\uparrow}}{\simeq} mc^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{v}_N}{c}\right)^2+\dots\right) = \underbrace{mc^2}_{\text{Energia de repouso}} + \underbrace{\frac{m\vec{v}_N^{\,2}}{2}}_{\text{energia não-rel.}} + \dots$$

$$\underset{\underset{\text{4-momento}}{\downarrow}}{p^2} = \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -(p^0)^2 + \vec{p}^{\,2} = m\left(\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = m\left(-\frac{d\tau^2}{d\tau^2}\right) = -m^2$$

$$= E^2 + \vec{p}^{\,2}$$

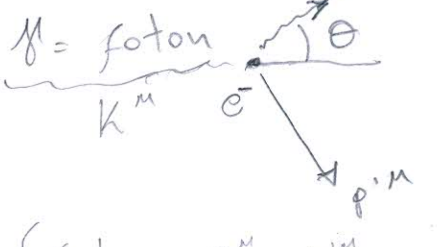
$$\boxed{p^2 = -E^2 + \vec{p}^{\,2} = -\underset{\underset{\text{escalar}}{\uparrow}}{m^2}}$$ "relação de camada de massa"

Convenções

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{"East coast" gravidade/cordas}}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$ "West coast" partículas $\to p^2 = +m^2$

Exemplo: Espalhamento compton



$$\begin{cases} \text{foton: } \underset{\text{antes}}{K^\mu},\ \underset{\text{depois}}{K'^\mu} \to E = \hbar\omega,\ \vec{p} = \hbar\vec{k} \\ \text{elétron: } \underset{\text{antes}}{p^\mu},\ \underset{\text{depois}}{p'^\mu} \end{cases}$$

Referencial laboratório:

$p^\mu = (m, \vec{0})$ (4-momento antes da colisão: $\vec{p} = 0$)

$$\boxed{k^\mu + p^\mu = k'^\mu + p'^\mu}$$

conservação do 4-momento

$$\boxed{k^2 = k \cdot k = \eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \neq 0}$$

$k^\mu = (\omega, \vec{k})$: $\boxed{\omega^2 = \vec{k}^2}$

relação de camada de massa para o fóton

$\rightarrow k \cdot p = k' \cdot p'$

$$k' \cdot p = k' \cdot (k' + p' - k)$$

$\hookrightarrow p + k = p' + k'$

$$= (k')^2 + \underbrace{k' \cdot p'}_{k \cdot p} - k' k \quad = \quad k \cdot p + k \cdot k'$$

$p^\mu = (m, \vec{0})$

$$k' \cdot p = k \cdot p + k \cdot k'$$

$$m\omega' = m\omega - (\omega'\omega - \vec{k}' \cdot \vec{k})$$

$$= m\omega - \omega'\omega(1 - \cos\theta)$$

$|\vec{k}| = \omega$

$|\vec{k}'| = \omega'$

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}$$

<u>Exemplo</u> Efeito Doppler Relativístico

partícula de momento p^μ emite fóton de momento k^μ

fóton é absorvido por uma partícula de momento p'

$k \cdot p'$ é um escalar → vai ser igual em todos os referenciais → calcular em 2 refs diferentes

Ref. repouso da part. que emite:

$$\left.\begin{array}{l} p=(m,\vec{0}) \\ k=(\omega,\vec{k}) \end{array}\right\} \rightarrow p' = m'\left(\frac{1}{\sqrt{1-v_N^2}}, \frac{\vec{v_N}}{\sqrt{1-v_N^2}}\right)$$

$\vec{v_N}$: velocidade da partícula que absorve nesse referencial

$$k \cdot p' = -\frac{m'(\omega - \vec{v_N}\cdot\vec{k})}{\sqrt{1-v_N^2}}$$

Ref. repouso da part. que absorve

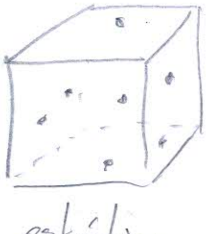
$$k \cdot p' = m\omega'$$

$$k \cdot p' = \frac{-m'(\omega - \vec{v_N}\cdot\vec{k})}{\sqrt{1-v_N^2}}$$

$$-\frac{m'(\omega - \vec{v_N}\cdot\vec{k})}{\sqrt{1-\vec{v_N}^2}} = -m'\omega' \qquad \vec{v_N}\cdot\vec{k} = \omega|\vec{v_N}|\cos\theta$$

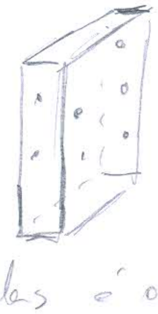
Correntes

densidade de partículas



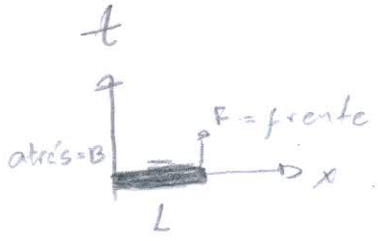
estático

$\vec{n}(t,\vec{x}) = \#$ de part. por und. de volume $\Rrightarrow$



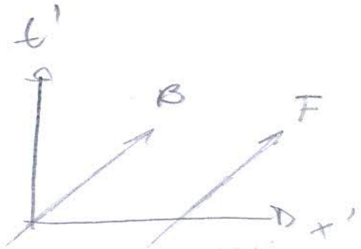
de partículas é o mesmo. O cubo está deformado por contração de Lorentz na direção ao longo do movimento

Contração de Lorentz:



$$(t,x)_B = (t,0)$$

$$(t,x)_F = (t,L)$$



$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = v$$

T. L.

$$(t',x')_B = \left(\frac{t}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

$$(t',x')_F = \left(\frac{t+vL}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{L+vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

Comprimento da régua em $\mathcal{O}$?

$x'_F - x'_B$ a $t'_F = t'_B$

$(t'_F = 0) \to t = -vL$

$$x'_F = \frac{L + v(-vL)}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{1-v^2} \cdot L < L$$

densidade de núm. $= \dfrac{\#\text{ part.}}{\text{volume}} \to \dfrac{\#\text{ part.}}{\sqrt{1-v^2} \cdot \text{volume}} >$ densidade original

sugere que a dens. de número vire a componente 0 de um 4-vetor

(por causa das dilatações temporais)

Corrente de Número $\left\{ \begin{array}{l} n^\mu(x) = \left(n^0(x), \vec{n}(x)\right) \end{array} \right.$

$n^0(x)$: dens. de # de partículas

$\vec{n}(x) \to$ corrente

A repouso

$$n^\mu(x) = \left(n(x), \vec{0}\right)$$

Em movimento (ao longo do eixo 1)

$$n'^0 = \frac{n^0 + |\vec{v}|\, n^1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-v^2}} \geq n$$

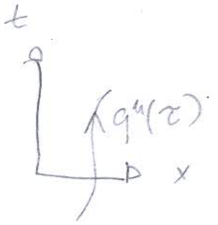
$$n'^1 = \frac{|\vec{v}|\, n^0 + n^1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{n|\vec{v}|}{\sqrt{1-v^2}} \geq n|\vec{v}|$$

Mais formalmente

uma partícula em repouso na origem

$$\begin{cases} n(t,\vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x}) \\ \int d^3\vec{x}\; n(t,\vec{x}) = 1 \end{cases}$$

$\Big\downarrow$ Promoção relativística



$$\begin{cases} q^0(t) = \tau \\ \vec{q}(\tau) = \vec{0} \end{cases} \qquad d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}\, dq^\mu dq^\nu$$

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) = \int d\tau\; \delta\left(x^0 - q^0(\tau)\right)\delta^{(3)}(\vec{x})$$

$$= \int d\tau\; \frac{dq^0}{d\tau}\; \delta\left(x^0 - q^0(t)\right)\delta^{(3)}\left(\vec{x} - \vec{q}(\tau)\right)$$

$$= \int d\tau\; \frac{dq^0}{d\tau}\; \delta^{(4)}\left(x - q(\tau)\right)$$

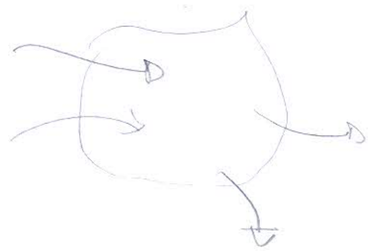
$$\boxed{n^\mu(x) = \int d\tau\; \frac{dq^\mu}{d\tau}\; \delta^{(4)}\left(x - q(\tau)\right)}$$

inv. sob SO(1,3

Conservação

$$\partial_\mu n^\mu = \frac{\partial n^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial n^0}{\partial t} + \frac{\partial n^i}{\partial x^i}$$

$$= \frac{\partial n^0}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{n} = 0$$



Checagem

$$\partial_\mu n^\mu(x) = \partial_\mu \overset{\text{sobre partícula}}{\sum_a} \int d\tau_a \frac{dq_a}{d\tau_a}\, \delta^{(4)}(x - q_a(\tau_a))$$

$$= \sum_a \int d\tau_a \frac{dq_a}{d\tau^a}\, \partial_\mu \delta^{(4)}(x - q_a(\tau_a))$$

$$= -\sum_a \int d\tau_a \frac{dq_a}{d\tau^a} \frac{\partial}{\partial q_a} \delta^{(4)} = -\frac{\partial}{\partial q_a} \delta^{(4)}(x - q_a(\tau_a))$$

$$= -\sum_a \delta^{(4)}(x - q_a(\tau_a)) \Big|_{\tau_a = -\infty}^{\tau_a = \infty} = 0$$

$$\left(\text{pois } q_a^0(\pm\infty) = \pm\infty\right)$$

Corrente e/m:

$$J^\mu(x) = \sum_a \underbrace{e_a}_{\text{cargas das partículas}} \int d\tau_a \frac{dq_a{}^\mu}{d\tau_a}\, \delta^{(4)}(x - q_a(\tau_a))$$

$$\boxed{x = q_a(\tau_a)}$$

$$J^\mu = (\underbrace{q}_{\text{dens de carga}}, \underbrace{\vec{j}}_{\text{corrente}})$$