Qual é o equivalente de $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ para a gravidade?

$-g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ é invariante sob

TGC (Trans gerais de coord.)

$$x^{\mu} \to \tilde{x}^{\mu}(x^{\nu})$$

// ——— //

27/4/2016

Princípio de equivalência

Localmente (em uma pequena região do espaço-tempo) nenhum experimento pode diferenciar entre campo gravitacional e referencial acelerado.

→ Gravidade é especial entre as forças

→ universal / é a geometria do espaço-tempo

$$\boxed{\text{Gravidade} = \text{Geometria}}$$

P.E. Fraca (WEP)

$\underset{m_i}{\text{massa inercial}} = \underset{m_g}{\text{massa gravitacional}}$

$\vec{F} = m_i \vec{a}$ → universal

$\vec{F}_g = -m_g \vec{\nabla}\phi$ → específica à gravidade

Galileo e outros: $\boxed{m_i = m_g}$

$\vec{F} = m_i \vec{a} = -m_g \vec{\nabla}\phi$ → somente gravidade: $\vec{F} = \vec{F}_g$

$$\rightarrow \boxed{\vec{a} = -\frac{m_g}{m_i}\nabla\phi = -\nabla\phi}$$

"queda livre"

↓

não tem força exceto a gravidade

1) Formulação equivalente

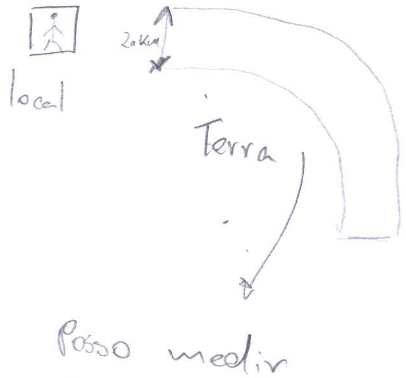
∃ trajetorias, chamadas de "inerciais" (ou de queda livre) percorridas por partículas não aceleradas (= aceleradas somente pela gravidade)

Não seria vdd para o E/M

$\vec{F} = m_i \vec{a}$ $\quad \vec{F} = \vec{F}_e = e\vec{E} = -e\vec{\nabla}\phi_E$

$$\vec{a} = \frac{e}{m_i}\vec{E} = -\frac{e}{m_i}\vec{\nabla}\phi_E$$

depende da partícula



Posso medir irregularidades do campo gravitacional

P.E. Einstein

Localmente, as leis da física se reduzem às leis da Rel. Restrita e é impossível detectar um campo grav. com exp. locais.

→ A grav. se acopla universalmente à qualquer forma de energia/momento (não necessariamente massa)

Aceleração e forças fictícias

$\vec{F}=0 \rightarrow \vec{a}=0$

*) Newton

partícula livre em 1D

$$\frac{d^2 y}{dt^2}=0$$

$\longrightarrow$ referencial acelerado $y = x - \frac{1}{2}at^2$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} - a = 0 \rightarrow$$ o observador vê uma "força" $\propto$ ma

*) Relativístico

$$d\tau^2 = -\eta_{\rho\sigma}\, dx^\rho dx^\sigma$$

$$\frac{d^2 y^\rho}{d\tau^2} = 0 \longrightarrow \text{referencial acelerado: TGC } y^\rho(x)$$

$$\frac{d}{d\tau} y^\rho = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} y^\rho = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{d\tau}\right) = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \quad \Big| \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\rho}$$

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} = \delta^\lambda_\mu$$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \underbrace{\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\rho}\frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}_{\text{"força fictícia"}} = 0$$

"força fictícia" $\longrightarrow$ Christoffel!

$$ds^2 = \eta_{\rho\sigma}\, dy^\rho dy^\sigma = \underbrace{\eta_{\rho\sigma}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\nu}}_{\text{"observador - x"}} dx^\mu dx^\nu$$

"observador - y" vê a métrica de Minkowski

"observador - x" vê a métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\sigma}{\partial y^\nu}$

Símbolo de Christoffel = "força" atribuída à gravidade

Coordenadas localmente planas ⇌ referencial localmente inercial

espaço curvo ⟶ espaço - tempo curvo

Coord. localmente Euclid ⟶ $\eta_{\mu\nu}$

localmente $g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu}$ ⟶ localmente $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$

$$\underbrace{\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0}$$

partícula "livre" (= somente sujeita à grav.)

= $\mathcal{F}^\mu$ na presença da grav.

+ a força $\mathcal{F}^\mu$

Limite NR ⟶ eq. de Newton

1) Velocidade pequenas $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}$

2) Campo grav. fraco $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + O(h^2)$

3) $h_{\mu\nu}$ não depende do tempo

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} + \cancel{2\Gamma^\mu_{0i}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^i}{d\tau}} + \cancel{2\Gamma^\mu_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}} = 0$$

$$1 \qquad\qquad 1$$

$$1 \quad \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 \simeq 0$$

$$2+3 \quad \Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{00}\right)$$

$$\left.\begin{matrix} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \end{matrix}\right\} \quad g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho = (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(\eta_{\nu\rho} + h_{\nu\rho})$$

$$= \underbrace{\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}}_{\delta^\mu_\rho} + \underbrace{\eta^{\mu\nu}h_{\nu\rho} - h^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}}_{=0} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\sigma} - h^{\mu\sigma})\left(\underbrace{2\partial_0(\cancel{\eta_{0\sigma}} + h_{0\sigma})}_{=0 \ 3} - \partial_\sigma(\cancel{\eta_{00}} + h_{00})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(-\partial_\sigma h_{00}) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\eta^{00}(-\partial_0 h_{00}) = 0$$

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\partial_i h_{00} \quad (\eta^{ii} = +1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0 \longrightarrow \dfrac{dx^0}{d\tau} = cte \\[2ex] \dfrac{d^2x^i}{d\tau^2} \simeq \dfrac{1}{2}\partial_i h_{00}\left(\dfrac{dx^0}{d\tau}\right)^2 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow dx^i \ll dx^0 \to x^0 = \tau \to \frac{dx^0}{d\tau} \approx 1$$

$$\boxed{h_{00} = -2\phi = 2\frac{GM}{r}} \hookrightarrow \boxed{\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla\phi}$$

Simetria esférica ($\to$ estrelas esféricas)

sem equações do movimento

$t, \vec{x}$

$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

*) Não estático (estrela pulsando)

$\to$ dependência em t

isotropia = invariança rotacional $\to dt \quad d\vec{x}^2 \quad \vec{x}\cdot d\vec{x}$

rotações $SO(3)$

$dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$

$= dr^2 + r^2 d\Omega_2^2$

dt
$dt\,dr$
dr^2
$d\Omega_2^2$

$f = f(t,r)$

não θ, ϕ!

Além disso

$r^2 = \vec{x}^2 \quad d(r^2) = d(\vec{x}^2)$

$\boxed{r\,dr = \vec{x}\cdot d\vec{x}}$

$$ds^2 = \underbrace{(\quad)}_{-U(t,r)} dt^2 + \underbrace{(\quad)}_{-2V(t,r)} dt\,dr + \underbrace{(\quad)}_{W(t,r)} dr^2 + \underbrace{(\quad)}_{(X(t,r))^2} d\Omega_2^2$$

4 funções
2 variáveis

Transf. de coord.

$r \to \tilde{r} = X(t,r)$

$d\tilde{r} = \partial_t X\, dt + \partial_r X\, dr$

$ds^2 = -\tilde{U}(t,\tilde{r})\,dt^2 - 2V(t,\tilde{r})\,dt\,\tilde{r} + \tilde{W}(t,\tilde{r})\,d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega_2^2$

3 funções 2 variáveis

$(t, \tilde{r}, \theta, \phi)$

$\to$ esqueçamos as ~ & redefinamos o tempo $t \to \tilde{t}$

$$d\tilde{t} = \zeta(t,r)\left(U\,dt + V\,dr\right)$$
$$= \partial_t\phi\,dt + \partial_r\phi\,dr$$

para algum $\phi(t,r)$

$$\partial_t\partial_r\phi = \partial_r\partial_t\phi$$

$$\longrightarrow \partial_t(\zeta V) = \partial_r(\zeta U)$$

$\longrightarrow$ posso determinar $\zeta(t,r)$ conhecendo U, V e $\zeta(0,r)$

$$-U\,dt^2 - 2V\,dt\,dr \longrightarrow \underbrace{-(\zeta^2 U)^{-1}}_{A}\,d\tilde{t}^2 + Y(\tilde{t},r)\,dr^2$$

$$\boxed{ds^2 = -A(t,r)\,dt^2 + B(t,r)\,dr^2 + r^2\,d\Omega_2^2}$$

$g_{\mu\nu} \longrightarrow \cancel{10}_{\,2}$ funções de $\cancel{4}_{\,2}$ variáveis

usando simetria esf. + TGC.

Estático: $A = A(r)$
$B = B(r)$

$$\boxed{A(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 1 - 2\frac{GM}{r}}$$

para recuperar Minkowski asympt.