

$$-\frac{\sqrt{g}}{2} \delta g^{\mu\nu} \left( -\frac{1}{84} g_{\mu\nu} F^2 + \frac{1}{2} F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} \right)$$

$$L_{em} = -\frac{1}{4} \sqrt{g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\frac{\delta L_{em}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{g}}{2} \left( F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right) \delta g^{\mu\nu}$$

$$= T_{\mu\nu}$$

$$= -\frac{\sqrt{g}}{2} T_{\mu\nu}$$

16/5/2016

Identidade de Bianchi

$$D_{\nu} R^{\rho}_{\mu\sigma\lambda} = D_{\nu} \left( \partial_{\sigma} \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + \cancel{\Gamma^{\rho}_{\kappa\sigma} \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}} - (\mu \leftrightarrow \lambda) \right) = 0$$

coord. localmente planas

$$\Gamma = 0 \quad \partial \Gamma \neq 0$$

$$= \partial_{\nu} \partial_{\sigma} \Gamma_{\rho\mu\lambda} - \partial_{\nu} \partial_{\lambda} \Gamma_{\rho\mu\sigma} - \partial_{\nu} R_{\rho\mu\sigma\lambda}$$

permutação cíclica + soma

$$+ (\nu\sigma\lambda) - (\nu\lambda\sigma)$$

$$g^{\rho\sigma} \cdot \left( D_{\nu} R_{\rho\mu\sigma\lambda} + D_{\sigma} R_{\rho\mu\lambda\nu} + D_{\lambda} R_{\rho\mu\nu\sigma} = 0 \right) \rightarrow$$

identidade tensorial

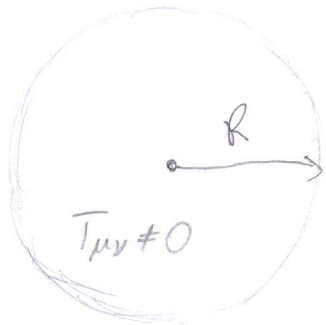
$$\rightarrow \left( D_{\nu} R_{\mu\lambda} + D^{\rho} R_{\rho\mu\lambda\nu} - D_{\lambda} R_{\mu\nu} = 0 \right) \cdot g^{\mu\lambda} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( D^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0 \right) \leftarrow \begin{array}{l} \text{as eq. de} \\ \text{Einstein n\~ao} \\ \text{s\~ao todas indep.} \end{array}$$

$$\begin{cases} R_{\theta\theta} = 0 \\ R_{rr} = 0 \\ R_{\phi\phi} = 0 \end{cases} \text{ vs. } \begin{cases} A(r) \\ B(r) \end{cases}$$

Métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$



$r > R \rightarrow$  vácuo

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0}$$

$$T_{\mu\nu} = 0$$

1 parâmetro:  $M$

\* estática (n\~ao tem dep. em  $t$ , n\~ao tem  $dt \cdot dx^i$ )

\* esf. simétrica

\* Kretschmann

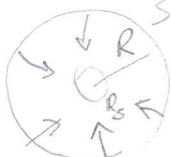
\*  $M \rightarrow 0$  Minkowski

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48 G^2 M^2}{r^6}$$

\*  $r \rightarrow \infty$  "

Teorema de Birkhoff

A solução de Schwarzschild continua válida mesmo para distribuições gênicas dependentes do tempo.



$R > R_s \rightarrow R < R_s$



Demonstração:

$A(r,t)$   $B(r,t) \rightarrow$  símbolos de Christoffel extra

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{\dot{A}}{2A} \quad \Gamma_{rr}^t = \frac{\dot{B}}{2A} \quad \Gamma_{tr}^r = \frac{\dot{B}}{2B}$$

$$\boxed{= \frac{\partial}{\partial t}}$$

$\rightarrow$  equação extra

$$R_{tr} = 0 = \frac{\dot{B}}{rB}$$

$\rightarrow B = \text{const. no tempo}$

$\rightarrow A = \text{const. no tempo}$



Estratégia para pontos singulares

escalar de curvatura  $\Rightarrow$  o ponto é singular  
 $\rightarrow \infty$

(o ponto onde  $\rightarrow \infty$   
deve ser a uma distância  
finita)

seria suficiente se agente  
calcular todos os escalares  
de curvatura

$\left\{ r=0 \text{ singular!} \right.$

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2 m^2}{r^6} \rightarrow \infty \quad r \rightarrow 0$$

$r = R_s$  ainda não demonstramos que é regular!



→ estrutura causal do espaço-tempo

cone de luz

$$\begin{cases} \Theta = \text{cte} \\ \Phi = \text{cte} \end{cases}$$

→ curvas nulas radiais

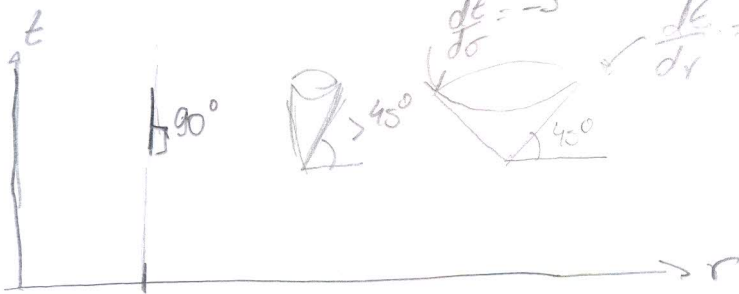
$$ds^2 = 0$$

$$0 = ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)}$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1/2}$$

um raio de luz parece não poder alcançar  $R_S$

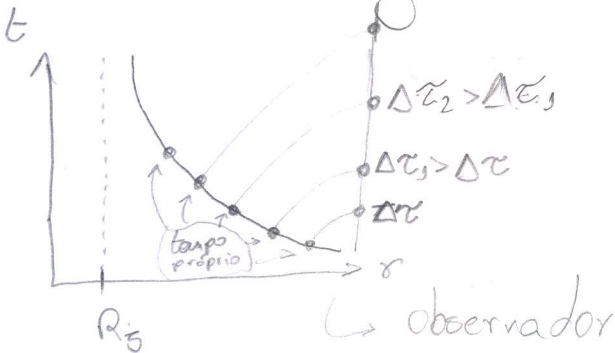
Ilusão  
devida às  
coordenadas



$$\frac{dt}{dr} \rightarrow \pm \infty$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm 1$$

Observador longe



Mudar coordenadas!

$$\frac{dt}{dr} \rightarrow \infty \text{ mais devagar}$$

$t$  = uma nova coord. que muda mais devagar ao longo de geodésicas nulas

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \rightarrow \text{solução: } t = \pm r^* + \text{cte} \quad \leftarrow \text{tortoise}$$

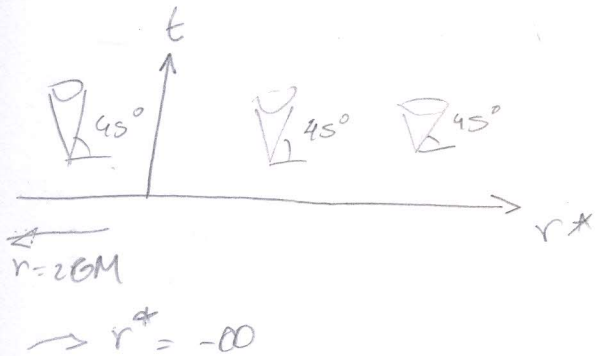
$$r^* = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \quad \text{válida para } r > 2GM \quad (\text{HW})$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega_2^2$$

$r = r(r^*)$

$r = R_s$  agora é

$$a \quad \boxed{r^* = -\infty}$$



Mais: uma mudança de coordenadas

$\rightarrow$  coord. adaptadas ao cone de luz

$$v = t + r^* \quad \left| \quad v = \text{const.} \rightarrow \text{geodésica nula "ingaling"}$$

$$u = t - r^* \quad \left| \quad u = \text{const.} \rightarrow \text{geodésica nula "outgoing"}$$

$$v = t + r^*$$

$$dv = dt + dr^*$$

$$dt = dv - dr^* = dv - \left( dr + \frac{2GM}{\frac{r}{2GM} - 1} \cdot \frac{1}{2GM} dr \right)$$

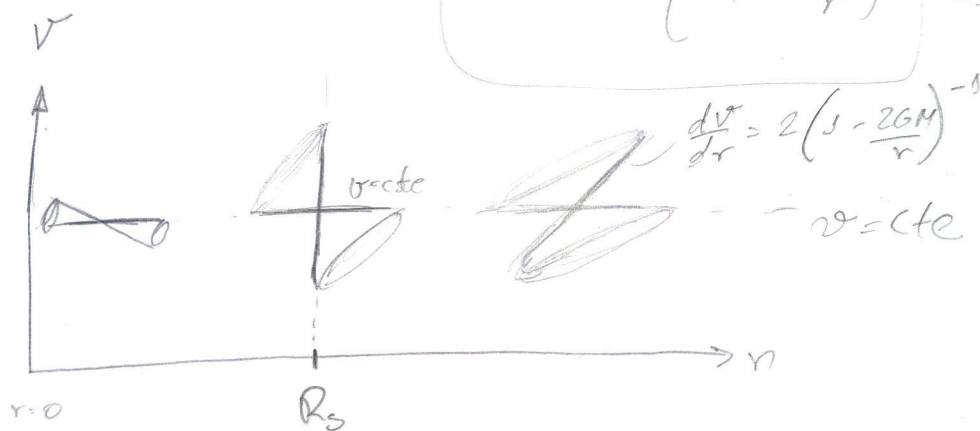
$$= dv - dr \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$$

$$ds^2 = \dots = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + 2dv dr + r^2 d\Omega_{2}^2 \quad (\text{Hw})$$

$$\det g_{\mu\nu} = \det \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} = -r^4 \sin^2\theta \neq 0$$

$$\begin{cases} \theta = \text{const} \\ \phi = \text{cte} \end{cases} \rightarrow \boxed{ds^2 = 0} \quad 2dv dr = \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2$$

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & \rightarrow v = \text{cte} \text{ "infalling"} \\ 2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1/2} & \rightarrow v \text{ "outgoing"} \end{cases}$$



$r < 2GM$ ; todos os caminhos no futuro  
vão na direção de  $r$  decrescente

$r = 2GM$ : localmente é regular  
globalmente  $\rightarrow$  superfície de "No-Return"  
Superfície - NULA  $\rightarrow$  Horizonte de eventos  
 $r < R_s$ : Buraco Negro