Schwarzschild — Geodésicas
↳ Buracos Negros (Penrose)

TOV

RN

grav. + Maxwell

} Matéria da Prova

// — //

8/6/2016

Cosmologia

Isotropia. (em largas escalas > 300 M l.y) (light year)
+ princípio cosmológico = não estamos em lugar privilegiado
→ $\boxed{\text{isotropia em qlqr lugar}}$ → homogeneidade

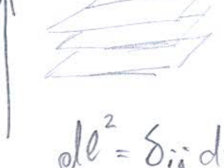
Universo = isotrop. + homog. → 3 classes de espaço-tempo

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

folha a $t = cte$

Σ_t 3d espaciais

Curvatura: 0, positiva cte., negativa cte $\boxed{\vec{x}^2 - u^2 = -a^2}$

t 

$dl^2 = \delta_{ij}\, dx^i dx^j$

E^3 em $\mathbb{R}^3$

$S^3 \subset \mathbb{R}^4$

mergulho em $\mathbb{R}^4$

$\boxed{dl^2 = du^2 + d\vec{x}^2}$ $\vec{x}^2 + u^2 = a^2$

mergulho de um hiperboloide H^3 em $\mathbb{R}^{1,3}$

$dl^2 = d\vec{x}^2 - du^2$

Redef. de coord.

$$\begin{cases} \vec{x} \to a\vec{x} \\ u \to au \end{cases}$$

$\vec{x}, u \to$ adimensionais

$[a] = L$

$$\boxed{\begin{aligned} dl^2 &= a^2(d\vec{x}^2 \pm du^2) \\ \vec{x}^2 &\pm u^2 = \pm 1 \end{aligned}}$$

$$d(x^2 \pm u^2 = \pm 1)$$

$$\vec{x} \cdot d\vec{x} = \mp u du$$

$$dl^2 = a^2\left(d\vec{x}^2 \pm \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{u^2}\right)$$

$$= a^2\left(d\vec{x}^2 \pm \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 \mp \vec{x}^2}\right)$$

$$= a^2\left(d\vec{x}^2 + K\frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - K d\vec{x}^2}\right)$$

$$K = \begin{cases} 0 & \text{plano} \\ 1 & \text{curv. positiva} \to \text{esferico} \\ -1 & \text{" negativa} \to \text{hiperbólico} \end{cases}$$

$$= a^2 \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j$$

coord. esféricas

$$d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

$$\vec{x} \cdot d\vec{x} = r dr$$

$$dl^2 = a^2\left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 + K\frac{r^2 dr^2}{1 - Kr^2}\right)$$

$$= a^2\left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega_2^2\right)$$

outro sistema coord.

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \longrightarrow dl^2 = a^2(d\chi^2 + S_K^2(\chi) d\Omega_2^2)$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \text{sh}\chi & K = -1 \\ \chi & K = 0 \\ \sin\chi & K = +1 \end{cases}$$

Métrica FRW (Friedmann - Robertson - Walker)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\, \tilde{g}_{ij}\, dx^i dx^j$$

não tem um termo $\tilde{g}_{0i}$

$\boxed{a(t)}$ $\boxed{k}$

fator de escala

Coord. comoveis

$$\begin{cases} \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \\ U^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau} = (1,0,0,0) \end{cases}$$

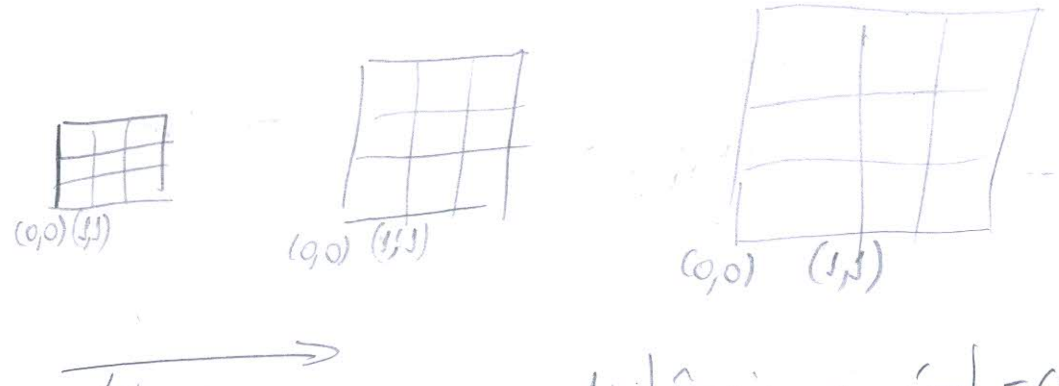
t = relógio comóvel

coord. físicas

$$x^i_{físicas} = a(t)\, x^i$$

(exemplo)

$a(t) \longrightarrow$ expansão



distância comóvel = fixa

distância física = cresce

Métrica do universo

$(c=1)$

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r\, d_2\Omega_2^2\right]$$

liberdade de "rescaling"

$$\begin{cases} a \longrightarrow \lambda a \\ r \longrightarrow r/\lambda \\ k \longrightarrow \lambda^2 k \end{cases} \longrightarrow$$

usar para colocar $a(\text{hoje}) \equiv a_0 \equiv a(t_0) = 1$

$$= dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + S_{-k}^2(\chi)\, d_2\Omega_2^2\right]$$

tempo conforme

$$\boxed{d\tau = \frac{dt}{a(t)}}$$

$$ds^2 = \underbrace{a^2(\tau)}_{\text{fator conforme}}\underbrace{\left[d\tau^2 - d\chi^2 - S_k^2(\chi)\, d_2\Omega_2^2\right]}_{\text{Minkowski estática}}$$

raio de luz $\underline{ds^2 = 0}$ $\longrightarrow$ propagação como em Minkowski usando τ.

Geodésicas

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$$

fixar λ: $\frac{dx^\mu}{d\lambda} = p^\mu =$ momento da partícula ou da luz (= fóton)

$$\rightarrow \frac{dp^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta$$

$$\parallel$$

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \cdot \frac{dp^\mu}{dx^\alpha} = p^\alpha \frac{dp^\mu}{dx^\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{p^\alpha \frac{dp^\mu}{dx^\alpha} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta}$$

Símbolos de Christoffel

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\,\tilde{g}_{ij}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\,\delta_{ij}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{jk}$$

↳ calculado com $\tilde{g}_{ij}$

Homogeneidade

$$\partial_i p^\mu = 0$$

$$\rightarrow \boxed{p^0 \frac{dp^\mu}{dt} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta = -2\Gamma^\mu_{0j}\, p^0 p^j}$$

$$\boxed{p \propto \frac{1}{a}}$$

Se $p^i = 0$ (= partícula a repouso nas coord. comóveis)

$$\frac{dp^i}{dt} = 0$$

um observador em queda livre fica em queda livre nessas coord.

$p = |\vec{p}|$

$$\mu = 0 \quad p^0 \frac{dp^0}{dt} = -\Gamma^0_{ij}\, p^i p^j = -\frac{\dot{a}}{a}\,\vec{p}^{\,2}$$

↳ $\vec{p}^{\,2} = a^2 \tilde{g}_{ij}\, p^i p^j$

$$(p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2 \rightarrow p^0 dp^0 = p\,dp \rightarrow p\dot{p} = -\frac{\dot{a}}{a}\,\vec{p}^{\,2} \rightarrow \frac{\dot{p}}{p} = -\frac{\dot{a}}{a}$$

Partícula sem massa ; $p = E \propto \frac{1}{a}$ energia decai

Partícula com massa: $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\sigma^2}} \propto \frac{1}{a}$

$\hookrightarrow \sigma^2 = a^2 \tilde{g}_{ij} v^i v^j$

Redshift = expansão do universo "estica" o comprimento de onda:

$$\lambda = \frac{h}{p} \sim a(t) \qquad \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} > 1$$

$t_0 \to$ detecção

$t_1 \to$ emissão

$$\boxed{\lambda_0 > \lambda_1}$$

Parâmetro de Redshift

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}$$

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \frac{1}{a(t_1)}$$

Lei de Hubble

expansão de $a(t)$ para fontes perto

$$a(t_1) = a(t_0)\left[1 + (t_1 - t_0) H_0 + \dots\right]$$

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} = \text{cte de Hubble}$$

$$z = H_0 \underbrace{(t_0 - t_1)}_{c=1} \simeq H_0\, d$$

dist. física

$t_0 = t_{Hoje}$

H_0 = rate of expansion

convenção $H_0 \equiv 100\, h \dfrac{km}{s\, Mpc}$

$h = 0.71 \pm 0.03$; $pc = 3.26\, ly$

$\boxed{\text{Válido para objetos próximos}}$

Distância métrica $\boxed{d_m}$
(não é observável)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + S_k^2(\chi)\, d\Omega_2^2\right]$$

$k=0$ plano $d_m = \chi$
$(S_k(\chi) = \chi)$

$$\chi(z) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}$$

→ dist. até uma galáxia c redshift = z.

2) Distância de luminosidade

Supernovae de tipo IA

= "Velas padrão"

Conhecemos a luminosidade absoluta emitida (L)

L = energia emitida/segundo

fluxo observado

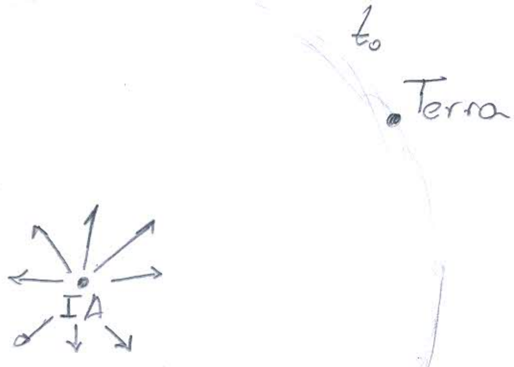
(F) = energia recebida/segundo. area

Fonte à distância comóvel fixada χ

Espaço Euclid. estático

$$F = \frac{L}{4\pi \chi_e^2}$$

Em um espaço FRW isso vai ser modificado



*) Área da esfera em t_0

$$\boxed{4\pi d_m^2}$$

*) Comprimento de onda foi reduzido pelo redshift $\frac{a(t_1)}{a(t_0)} = \frac{1}{1+z}$

-> energia hf_0 do fóton observado é

$$hf_0 = \frac{1}{1+z} \underbrace{hf_1}_{\text{energia do fóton emitido}}$$

$$F = \frac{L}{4\pi d_m^2 (1+z)^2} = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

$$\boxed{d_L = d_m (1+z)}$$ = distância de luminosidade

3) Distância de diâmetro angular

objetos com tamanho D padrão

<u>Dinâmica</u>

$a(t) = ? \rightarrow$ precisamos das eq. de <u>Einstein</u>

tensor en-mom de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)\, u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu})$$

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ P = P(t) \end{cases} \qquad D_\mu T^\mu{}_\nu = 0 = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda{}_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu{}_\lambda$$

$$\boxed{\nu = 0} \xrightarrow{HW} \boxed{\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0}$$ eq. da continuidade

<u>Matéria</u> $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Bariônica}} + \boxed{\text{Escura}}$

$$|P| << \rho$$

densidade de energia é dominada pela <u>massa</u>

<u>$P = 0$</u> $\quad \dfrac{d\rho}{dt} + \dfrac{3\dot{a}}{a}\rho = 0 \longrightarrow \boxed{\rho \propto a^{-3}}$

$\boxed{\text{Radiação}}$ $\rightarrow$ fótons, neutrinos, gravitons...

universo primordial

CMB = Cosmic Microwave Background

$$P = \frac{1}{3}\rho$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a}\frac{4}{3}\rho = 0 \rightarrow \boxed{\rho_{rad} \propto a^{-4}}$$

$$\frac{1}{a^4} = \frac{1}{\text{Volume}} * \left(\text{redshift} \sim \frac{1}{a}\right)$$

Energia Escura

$$P = -\rho \rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\rho_{EE} \propto a^0}$$