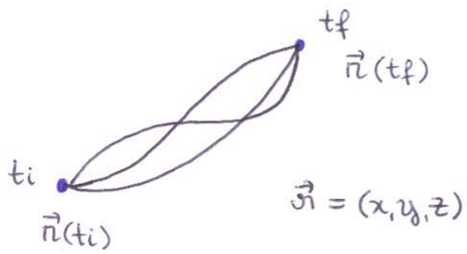
08/08 – Aula 2 – Eletromagnetismo I

Marina

Revisão do Formalismo Lagrangeano

Uma vantagem desse formalismo é que as simetrias do problema se manifestam (simetrias $\Rightarrow$ quantidades conservadas)
↳ Teorema de Noether

Entre dois pontos existem vários caminhos possíveis



Para cada caminho escrevo uma Lagrangeana $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$

↓ vetor tangente ao caminho
não depende do tempo

- $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$

↳ não é a forma mais geral; V podia depender de velocidade, por exemplo

E com a Lagrangeana posso escrever a ação S

- $S(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} dt \, L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$

↓ funcional; tem como input uma função

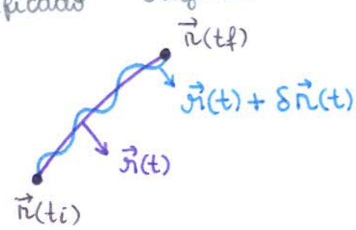
OBS: não necessariamente os extremos são mínimos

Para determinar a trajetória que uma partícula segue, devemos extremizar a ação. Isso significa:

colchetes indicam funcional

$$0 = \delta S = S[\underbrace{\vec{r} + \delta\vec{r}}_{\text{caminho modificado}}] - S[\underbrace{\vec{r}}_{\text{caminho original}}] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}})^2 - V(\vec{r} + \delta\vec{r}) - \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) \right]$$

O que é $\delta\vec{r}$?



É uma perturbação na trajetória tal que $\boxed{\delta\vec{r}(t_i) = \delta\vec{r}(t_f) = 0}$
(infinitesimal)

↳ importante!

$$0 = \delta S = \int_{ti}^{tf} dt \left[\frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}} + \delta \dot{\vec{r}})^2 - \boxed{V(\vec{r} + \delta\vec{r})}_{(*)} - \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) \right] =$$

$$= \int_{ti}^{tf} dt \left[\frac{1}{2} \cdot 2 m \dot{\vec{r}} \cdot \underbrace{\delta \dot{\vec{r}}} - \vec{\nabla} V \cdot \delta\vec{r} \right] + \mathcal{O}(\delta\vec{r}^2) =$$

↳ por causa da aproximação

δ é uma operação e $\frac{d}{dt}$ é outra.

Elas comutam (se convença!), $[\delta, \frac{d}{dt}] = 0$

(*)

$$\boxed{\begin{array}{c} V(\vec{r}+\delta\vec{r}) = V(\vec{r}) + \vec{\nabla} V \cdot \delta\vec{r} \\ \text{Taylor até a 1ª ordem} \end{array}}$$

$$= \int_{ti}^{tf} dt \left[m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}) - m \left(\frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} \right) \cdot \delta\vec{r} - \vec{\nabla} V \cdot \delta\vec{r} \right] + \mathcal{O}(\delta\vec{r}^2)$$

$$0 = \delta S = \underbrace{\int_{ti}^{tf} dt \frac{d}{dt} (m \dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r})}_{\text{termo de superfície}} + \underbrace{\int_{ti}^{tf} dt (-m \ddot{\vec{r}} - \vec{\nabla} V) \cdot \delta\vec{r}}_{\text{termo de volume ("bulk")}} + \mathcal{O}(\delta\vec{r}^2)$$

$= m \dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r} \Big|_{ti}^{tf} \overset{♥}{=} 0$

↳ porque $\delta\vec{r}(tf) = \delta\vec{r}(ti) = 0$.

deve ser $= 0$

Então $\delta S = 0$ se o termo de volume for zero. Ou seja: $-m\ddot{\vec{r}} - \vec{\nabla} V = 0$

Com isso obtemos a equação do movimento (Newton): $\boxed{m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V}$

Ela é válida para a Lagrangeana que a gente tinha escolhido.

E se não escolhermos uma Lagrangeana específica? Podemos extremizar a ação para uma Lagrangeana $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$:

$$0 = \delta S = \int_{ti}^{tf} dt \, \delta L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \int_{ti}^{tf} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \cdot \delta\vec{r} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \delta\dot{\vec{r}}} \right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \delta\vec{r} \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) \cdot \delta\vec{r}$$

↳ p/ integrar por partes

Integrando por partes:

$$0 = \delta S = \underbrace{\int_{ti}^{tf} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \delta\vec{r} \right)}_{\text{superfície} \overset{♥}{=} 0} + \underbrace{\int_{ti}^{tf} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) \cdot \delta\vec{r}}_{\text{volume} = 0} + \mathcal{O}(\delta\vec{r}^2)$$

↳ mesma razão anterior

Então, $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}}$ Equações de Euler-Lagrange (E-L)

↳ vou abreviar assim depois

se eu colocar $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r})$

sai exatamente $m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V$

Podemos ainda generalizar para mais de uma partícula. A diferença é que teremos N trajetórias e, consequentemente, N equações de E-L.

$$L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}}_{\text{são N equações diferenciais}} \quad \text{com } i = 1, \dots, N.$$

grau de liberdade

Sabemos que partículas puntiformes são caracterizadas por $\vec{r}(t)$ e por $\dot{\vec{r}}(t)$, pois só existem sobre suas trajetórias.

Mas agora como a gente faz para generalizar as E-L para campos?

Aliás... o que é um campo? Como podemos caracterizá-lo?

Campo $\phi(\vec{r}, t)$
- escalar (ex: temperatura)
- vetorial (ex: velocidades)
- tensorial

→ a diferença entre eles vai ficar mais clara com índices mais pra frente

(*) Note que antes $\vec{r}(t)$ era um grau de liberdade e agora é apenas um parâmetro.

Novamente devemos extremizar a ação, só que agora ela é calculada de outra maneira: $S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L$ ⇝ $L \equiv \int d\vec{r}\, \mathcal{L}\left(\phi(\vec{r},t), \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}, \vec{\nabla}\phi}_{\text{definição: } \partial_\mu \phi}\right)$

$\mathcal{L}$ ↓ densidade lagrangeana; $\phi(\vec{r},t)$ ↓ campo

Então $S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d\vec{r}\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ e temos

$$0 = \delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d\vec{r} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta \partial_\mu \phi \right)$$

→ equivalente ao que tínhamos antes: $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \delta \dot{\vec{r}}$

→ $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta\phi$ para integrar por partes

OBS: $\delta \partial_\mu \phi$ também comutam

$$0 = \delta S = \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \int d\vec{r}\, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta\phi \right)}_{\text{superfície}} - \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \int d\vec{r} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right)}_{\text{volume}} \delta\phi$$

$\heartsuit = 0 \rightarrow$ mesma razão anterior

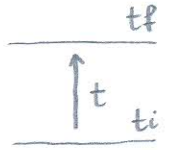
$$\text{superfície} = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d\vec{r} \left[\cancel{- \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial t}} \delta\phi\right)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x}} \delta\phi\right) + \dots}_{} \right] = 0$$

mistério, vai ser discutido depois, não se assustem **SPOILER:** $(-+++)$ métrica

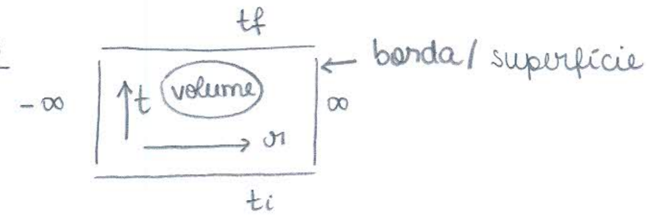
→ a borda(*) da integral é ∞, então é razoável dizer que $\phi \rightarrow 0$ no ∞.

(*) **OBS:** o que eu quero dizer com borda:

PARTÍCULAS



CAMPOS



Para que $\delta S = 0$, volume $= 0$. O termo de volume ser 0 implica:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}}$$

E-L para campos!

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial z}}$$

(em cartesianas)

mesmo sinal misterioso, aguardem ...

— || —

Simetrias → uma das coisas mais bonitas da física :)

- Partícula Livre $\boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2}$ (1)

Que exemplos de $\underbrace{\text{simetrias}}$ temos nesse caso?

↳ transformações que não alteram a física do problema.

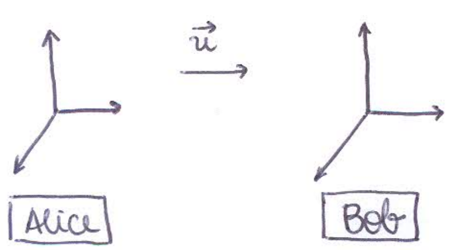
- Translação: $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{a}$
- Rotação: $\dot{\vec{r}}^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$

} contínuas → discutiremos mais na próxima aula porque tem a ver com Transformação de Lorentz.

- Paridade: $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$
- Inversão temporal: $t \rightarrow -t$

} discretas

Transformações de Galileo



$|\vec{u}| = u =$ constante

Alice e Bob são referenciais inerciais

Vamos supor que uma bala é disparada e esse é nosso evento

- $\Delta t_A = \Delta t_B$: o intervalo de tempo do evento é o mesmo medido tanto por Alice quanto por Bob. (Tempo absoluto)

- $\Delta x_B = \Delta x_A + u\,\Delta t_A$

- Da Lagrangeana, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = 0$

- $m_A = m_B$: a massa da bala é a mesma para ambos

* Equações do Movimento :

$\boxed{\text{Alice}}$ $m_A \frac{d^2}{dt_A^2} x_A = 0$ ← consistente

$\boxed{\text{Bob}}$ $m_B \frac{d^2}{dt_B^2} x_B = m_A \frac{d^2}{dt_A^2}(x_A + u t_A) = \overbrace{m_A \frac{d^2}{dt_A^2} x_A}^{=0} + \cancelto{0}{m_A u \frac{d^2}{dt_A^2} t_A} = 0$

OBS: Se u não fosse constante, teríamos termos com as suas derivadas e os referenciais não seriam mais inerciais

O que acontece com a ação ?

$$S_B = \int dt_B \, \frac{1}{2} m_B \dot{\vec{r}}_B^{\,2} = \int dt_A \, \frac{1}{2} m_A \underbrace{(\dot{\vec{r}}_A + \vec{u})^2}_{\dot{\vec{r}}_A^{\,2} + 2\dot{\vec{r}}_A\cdot\vec{u} + \vec{u}^{\,2}} = S_A + \underbrace{\int dt_A \, m_A \dot{\vec{r}}_A \cdot \vec{u}}_{\text{superfície (borda)}} + \underbrace{\int dt_A \, \frac{1}{2} m_A \vec{u}^{\,2}}_{\text{constante}}$$

$= \int dt_A \frac{d}{dt_A}(m_A \vec{r}_A \cdot \vec{u})$

↓ esse termo não muda as equações do movimento.

$= \frac{1}{2} m_A u^2 t_A$

↓ não altera as equações do movimento

—||—

Cenas do Próximo Capítulo :

Vamos entender melhor rotações, porque queremos sair da mecânica não-relativística. Precisamos introduzir as transformações de Lorentz, que são rotações.

Com isso, iremos generalizar E-L para a relatividade.

† NOTA DA AUTORA : CRÍTICAS E CORREÇÕES PODEM SER ENVIADAS PRA MIM POR EMAIL :)
marina.borges@usp.br