Aula 3 - Eletromagnetismo I - 11/08 Marina

Rotações

↗ "um vetor é algo que se transforma como um vetor".

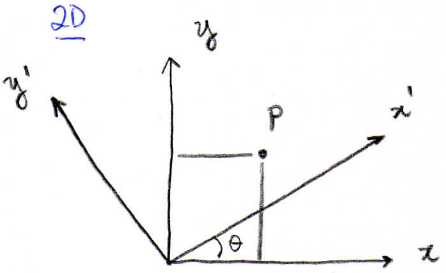
- Escalar
- Vetor
- Tensor

} são definidos a partir das propriedades de transformação

* Vetores

↳ não vamos diferenciar índices em cima e embaixo ainda

2D



- Transformação ativa: transforma o ponto e mantém fixo o referencial
- Transformação passiva: transforma o referencial e mantém fixo o ponto
  ↳ rotações são t. passivas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{matriz de rotação 2D}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Notação: $x'^i = \sum_{j=1}^{2} R^{ij} x^j$

Convenção de Einstein: Índices repetidos indicam soma.

Ao invés de escrever $x'^i = \sum_{j=1}^{2} R^{ij} x^j$, escrevemos $x'^i = R^{ij} x^j$ simplesmente.

O j é chamado de índice mudo. Posso trocar ele por qualquer coisa que nada vai mudar. Ex: $x'^i = R^{i*} x^*$ ↪ (eu posso pensar no x numa integral. Se eu trocar por y nada muda)

→ Uma rotação é uma transformação que não muda a norma do vetor em que é aplicada. Ou seja:

$\vec{x}\cdot\vec{x} = x^i x^i$ deve ser invariante sob uma rotação. Então:

$$\underbrace{\vec{x}'\cdot\vec{x}'}_{\text{deve ser } = \vec{x}\cdot\vec{x}} = x'^i \cdot x'^i = \underbrace{R^{ij}R^{ik}}_{\delta^{jk}} x^j x^k = x^j x^j$$

↳ $\delta^{jk} x^j x^k = x^j x^j$

$$\begin{cases} \text{se } j \neq k, & \delta^{jk} x^j x^k = 0 \\ \text{se } j = k, & \delta^{jk} x^j x^k = x^j x^j \end{cases}$$

↳ $\boxed{R^{ij}R^{ik} = \delta^{jk}} \Rightarrow \underbrace{(R^T)^{ji}}_{\text{faço isso para que seja multiplicação usual de matrizes}} R^{ik} = \delta^{jk} \Rightarrow \boxed{R^T R = \mathbb{I}}$

soma sobre esses índices

não é multiplicação de matrizes porque o índice i não está no meio

toda matriz R deve satisfazer

Então $\begin{cases} R^T R = \mathbb{1} \\ R^{ij} R^{ik} = \delta^{jk} \\ (R^T)^{ji} R^{ik} = \delta^{jk} \end{cases}$ (1) $\quad i = 1, \dots, D \rightarrow$ número de dimensões

$\rightarrow$ **O(D)**: transformação ortogonal

"special"

Caso $|\det R| = 1$, chamo a transformação de **SO(D)**

Pegando a relação (1): $\det(R^T R) = \det \mathbb{1}$

$$\det R^T \det R = 1$$

$$\det R \det R = 1$$

$$(\det R)^2 = 1$$

$$\boxed{\det R = \pm 1}$$

$+1$: rotações

-1: paridade

Rotação: $SO(D) \begin{cases} R^T R = \mathbb{1} \\ \det R = +1 \end{cases}$

- Escalar: algo que não se transforma
- Vetor: algo que se transforma como $V^i \rightarrow V'^i = R^{ij} V^j$
- Tensor: algo que se transforma como $\begin{cases} W^{ij} \rightarrow W^{ij'} = R^{ik} R^{jl} W^{kl} & \text{(ordem 2)} \\ X^{ijk} \rightarrow X^{ijk'} = R^{il} R^{jm} R^{kn} X^{lmn} & \text{(ordem 3)} \\ (\dots) \end{cases}$

  ↳ "se transforma como um vetor para cada índice"

Exercícios p/ casa:

① $D = 2$ $\quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ é um vetor sob SO(2) $\quad \vec{q} = \begin{pmatrix} a\,p_1 \\ b\,p_2 \end{pmatrix}$ é um vetor?

$a, b \in \mathbb{R}$

(sim, se $a = b$)

↳ Provar (OK)

② $D = 3$ $\quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ vetor sob SO(3) $\quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ vetor sob SO(3)

$\vec{v} = \begin{pmatrix} p_2 q_3 \\ p_3 q_1 \\ p_1 q_2 \end{pmatrix}$ é um vetor? (Não. Provar)

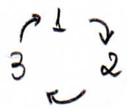
Complemente para que seja.

só somar $\begin{pmatrix} -p_3 q_2 \\ -p_1 q_3 \\ -p_2 q_1 \end{pmatrix}$ e vira o vetor $\vec{p} \times \vec{q}$

③ Demonstre que δ^{ij} é invariante sob SO(D), $i, j = 1, \dots, D$

④ Demonstre que $\varepsilon^{i_1, \dots, i_D}$ é também invariante sob SO(D)

$D = 2$ $\begin{cases} \varepsilon^{12} = 1 \quad \varepsilon^{21} = -1 \\ \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0 \end{cases}$ (antissimétrico)



↻ pares

↺ ímpares

$D = 3$ $\begin{cases} \text{permutações pares } (123, 231, 312) = 1 \\ \text{permutações ímpares } (213, 321, 132) = -1 \\ \text{índices repetidos} = 0 \quad \text{(antissimétrico)} \end{cases}$

* Tensores W^{ij} (ordem 2)

$W^{ij} \to W^{ij'} = R^{ik} R^{jl} W^{kl}$ abrindo as somas sobre k e l

$W^{11'} = R^{1k} R^{1l} W^{kl} = R^{11} R^{11} W^{11} + R^{12} R^{11} W^{21} + \dots$ (são muitos)... $+ R^{13} R^{13} W^{33}$

↳ basicamente é uma t. linear em que W' é combinação linear de W

$W = \begin{bmatrix} W^{11} & W^{12} & W^{13} \\ W^{21} & W^{22} & W^{23} \\ W^{31} & W^{32} & W^{33} \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{posso pensar assim}}$ $W = \begin{bmatrix} W^{11} \\ W^{12} \\ W^{13} \\ W^{21} \\ W^{22} \\ W^{23} \\ W^{31} \\ W^{32} \\ W^{33} \end{bmatrix}_{9\times 1}$ ↳ não é um vetor!

$$\underbrace{W'_{9\times1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{9\times 9}}_{\text{Representação 9-dimensional (ou tensorial)}} W_{9\times 1}$$

↳ é redutível (pode ser decomposta em partes assimétrica, simétrica sem traço e traço)

Redutível : algumas das combinações de W^{ij} se transformam somente entre elas.

Exemplo 1) Parte Assimétrica A^{ij}

$A^{ij} = W^{ij} - W^{ji}$ com $A^{ij} = -A^{ji}$

$$A^{ij'} = W^{ij'} - W^{ji'} = R^{ik} R^{jl} W^{kl} - \underbrace{R^{jk} R^{il} W^{kl}}_{R^{jl} R^{ik} W^{lk}} = R^{ik} R^{jl} (\underbrace{W^{kl} - W^{lk}}_{A^{kl}}) = R^{ik} R^{jl} A^{kl}$$

posso trocar os índices k e l porque ambos são mudos

A^{ij} $\begin{cases} \text{índices repetidos} = 0 \\ A^{12} A^{13} A^{23} \text{ são as únicas componentes} \end{cases}$ → não se misturam entre elas (irredutível)

Exemplo 2) Parte <u>Simétrica</u> S^{ij}

$$S^{ij} = \frac{W^{ij} + W^{ji}}{2} \quad \text{com} \quad S^{ji} = S^{ij}$$ (com 6 componentes)

Traço da matriz: $Tr(S^{ij}) = S^{ii}$ → soma dos elementos da diagonal principal

$S^{ij\prime} = R^{ik} R^{jl} S^{kl}$ → porém isso aqui ainda é redutível por causa do traço. O que a gente faz é separar o traço da parte simétrica para que sejam ambas irredutíveis

$$S^{ii} = R^{ik} R^{il} S^{kl} = \underbrace{(R^{ki})^T R^{il}}_{\delta^{kl}} S^{kl} = \delta^{kl} S^{kl} = S^{ll}$$ → o traço é invariante e irredutível

A parte simétrica <u>sem</u> traço seria $\tilde{S}^{ij} = S^{ij} - \frac{\delta^{ij}}{D} S^{kk}$ → se isso não te convence, pegue uma matriz como exemplo e faça a conta

$$\delta^{ij} \tilde{S}^{ij} = \delta^{ij} S^{ij} - \delta^{ij} \frac{\delta^{ij}}{D} S^{kk} = S^{ii} - \frac{D}{D} S^{kk} = 0$$

→ $\tilde{S}^{ij}$ tem 5 componentes porque agora retiramos 1 (o traço)

Representação 9-dimensional

$$W^{ij} \begin{cases} A^{ij} & 3 \text{ componentes} \\ \tilde{S}^{ij} & 5 \text{ componentes} \\ S^{ii} & 1 \text{ componente} \end{cases}$$

$\boxed{3 \oplus 5 \oplus 1 = 9}$

esse símbolo significa "soma direta" e ele soma subespaços de modo que não haja intersecção.

generalizando:

$$D^2 = \underbrace{\frac{D(D-1)}{2}}_{\text{anti-simétrica}} \oplus \underbrace{\frac{D(D+1)}{2}}_{\text{simétrica}} \oplus \underbrace{1}_{\text{traço}}$$

A gente pode separar a matriz em blocos

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{9\times 9} \rightarrow \left(\begin{array}{c|c|c} 3\times3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5\times5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{9\times 9}$$

Pegando somente a parte antissimétrica com $\frac{D(D-1)}{2}$:

Dimensões	Componentes
$D = 1$	0
$D = 2$	1
$\boxed{D = 3}$	$\boxed{3}$
$D = 4$	6
$D = 5$	10

→ único caso em que o número de componentes é igual ao de dimensões

Uma base para matrizes assimétricas de dimensão 3 seria

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

são os geradores das rotações em 3D.

Sophus Lie deixou o seguinte legado: Rotações podem ser descritas através de rotações infinitesimais.

• $\underline{D=2}$ $\quad R = \mathbb{1} + A + \mathcal{O}(A^2)$ → apenas 1 rotação possível

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^2) = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^2) =$$

$$= \mathbb{1} + \theta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} + \mathcal{O}(\theta^2)$$

parâmetro da transformação

→ gerador da transformação (é único em 2D)

• $\underline{D=3}$ $\quad R = \mathbb{1} + \underbrace{\theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z}$ → 3 rotações possíveis

J_x, J_y e J_z são aquelas matrizes da base ali em cima

• $\underline{D=4}$ $\quad$ Espaço tempo tem $\begin{cases} 3 \text{ boosts}: x \text{ e } t,\ y \text{ e } t,\ z \text{ e } t \\ 3 \text{ rotações}: x \text{ e } y,\ x \text{ e } z,\ y \text{ e } z \end{cases}$ → total de 6

— || —

† NOTA DA AUTORA: CRÍTICAS E CORREÇÕES PODEM SER ENVIADAS PARA MIM POR EMAIL :) marina.borges@usp.br